Esame scritto di Fisica Generale T-B

(CdL Ingegneria Civile)

Prof. M. Sioli

II appello dell'A.A. 2017-2018 - 25/01/2018

Esercizi

Esercizio 1

Quattro cariche sono poste ai vertici di un quadrato nel piano cartesiano (x, y) con coordinate, in mm: $Q_1(0,0) = 1\,\mu\text{C}$, $Q_2(2,0) = -2\,\mu\text{C}$, $Q_3(2,2) = 4\,\mu\text{C}$, $Q_4(0,2) = -3\,\mu\text{C}$. Calcolare:
a) il valore del campo elettrico $\vec{\mathbf{E}}(1,1) = (E_x, E_y)$;
b) il valore del potenziale $V(1,1)$;
c) il momento di dipolo elettrico del sistema.

Soluzione Esercizio 1

a) Il campo elettrico nel punto P di coordinate (1,1) è la somma vettoriale dei campi elettrici generati dalle quattro cariche:

$$\vec{\mathbf{E}}(P) = \sum_{i=1}^{4} \vec{\mathbf{E}}_i = \sum_{i=1}^{4} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

dove $\vec{r}$ indica la posizione del punto P mentre $\vec{r}_i$ indica la posizione della carica i-esima. In termini delle componenti x e y:

$$E_x(P) = \sum_{i=1}^{4} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, \qquad E_y(P) = \sum_{i=1}^{4} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - y_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}.$$

Tenendo conto che $|\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{2}$ mm e che $x - x_i$ e $y - y_i$ valgono +1 mm oppure -1 mm a seconda della carica i-esima, otteniamo:

$$\vec{\mathbf{E}}(P) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0}, -\frac{1}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0}\right) = \left(-k\sqrt{2}, -\frac{k}{\sqrt{2}}\right) = (-12{,}7, -6{,}36)\,\frac{\text{GV}}{\text{m}}.$$

b) Il potenziale elettrico nel punto (1,1) è dato da:

$$V(P) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2} \cdot 10^3 \text{ mm}} \sum_{i=1}^{4} Q_i = 0.$$

c) Il momento di dipolo per un sistema di cariche è definito da:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{4} Q_i \vec{r}_i,$$

dove, in questo caso, i vettori $\vec{r}_i$ sono definiti rispetto a un polo arbitrario, essendo nulla la somma delle cariche. Quindi, prendendo come polo l'origine:

$$p_x = \sum_{i=1}^{4} Q_i x_i = Q_1(-1) + Q_2 + Q_3 + Q_4(-1) = 4 \cdot 10^{-9}\text{Cm}$$

$$p_y = \sum_{i=1}^{4} Q_i x_i = Q_1(-1) + Q_2(-1) + Q_3 + Q_4 = 2 \cdot 10^{-9}\text{Cm}.$$

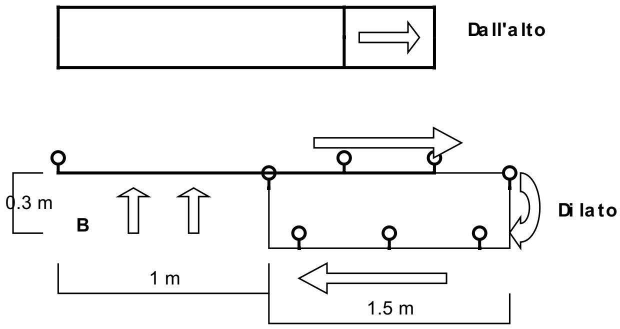
Esercizio 2

Un circuito è formato da due fili lunghi, paralleli e di resistenza elettrica trascurabile, connessi da un filo metallico, più breve di lunghezza $b = 0{,}5$ m, disposto perpendicolarmente in modo da formare tre lati di un rettangolo. Un cingolo di materiale isolante, che si muove con velocità $v = 8$ m/s, trasporta fili metallici disposti perpendicolarmente alla direzione di moto e a distanza $d = 50$ cm l'uno dall'altro. Il cingolo è disposto in maniera tale da mettere in contatto i fili con i due lati lunghi del rettangolo in una regione lunga $L = 1$ m. Sapendo che in ogni istante vi sono due fili del cingolo in contatto con i lati lunghi, che l'intero sistema è immerso in un campo magnetico diretto verso l'alto di modulo $B = 0{,}5$ T e che tutti i lati corti, sia quello fisso che quelli in moto hanno una sezione $S = 1\text{ mm}^2$ e una resistività $\rho = 10^{-4}\ \Omega$m e determinare:

a) la forza elettromotrice indotta nel circuito;

b) la corrente che passa nel filo corto fisso;

c) la forza magnetica agente sul cingolo.



Soluzione Esercizio 2

a) La forza elettromotrice è determinata dalla legge di Faraday-Neumann-Lentz. In questo caso la variazione di flusso è data solo dall'aumento lineare della superficie contenuta nel circuito. Quindi:

$$|\epsilon_{\text{ind}}| = \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{d}{dt}[Bb(L + vt)] = Bbv = 2\text{V}.$$

Tale f.e.m. è applicata in maniera eguale su entrambi i fili in movimento del cingolo.

b) La corrente che passa nel filo corto fisso si può determinare considerando il circuito costituito dai fili e il suo equivalente. Infatti, non è altro che un circuito con due resistenze in parallelo (fili corti del cingolo) alla stessa differenza di potenziale (f.e.m. indotte), in serie con una resistenza uguale alle altre due.

Avendo sia la sezione dei fili che la resistività, possiamo trovare il valore delle resistenze $R = \rho l/S = 50\,\Omega$. Allora la resistenza equivalente del parallelo vale $R' = R/2$ e, di conseguenza, la resistenza equivalente totale del circuito è la serie tra R e R':

$$R_{\text{eq}} = R + R' = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R.$$

La corrente che passa nel filo corto è dunque:

$$i = \frac{\epsilon_{\text{ind}}}{R_{\text{eq}}} = \frac{2\epsilon_{\text{ind}}}{3R} = 27\,\text{mA}.$$

c) Sapendo che, per la II legge di Laplace, la forza magnetica agente su un filo di lunghezza l è definita come:

$$\vec{F} = i\,\vec{l} \times \vec{B}$$

ne segue che la forza totale agente sul cingolo è il doppio della forza che agisce su ciascun filo (che è uguale):

$$|\vec{F}| = 2\left(\frac{i}{2}bB\right) = 75 \cdot 10^{-4}\text{N}.$$