

Fisica Generale B

Campo elettrostatico

Scuola di Ingegneria e Architettura

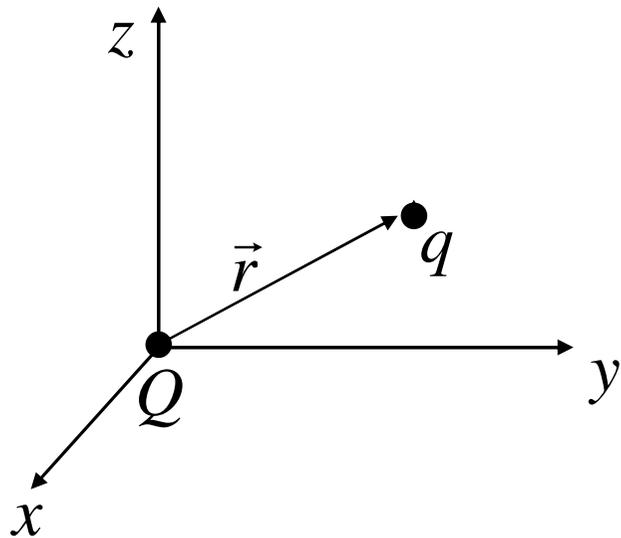
UNIBO – Cesena

Anno Accademico 2014 – 2015

Campo elettrostatico

$$\vec{F}_{Qq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^3} \vec{r}$$

Leggi elementari (Coulomb)



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

La carica Q crea un campo elettrico $E(\mathbf{r})$ in ogni punto dello spazio.

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

La forza su q è dovuta all'accoppiamento locale tra la carica q ed il campo $E(\mathbf{r})$ nel punto r.

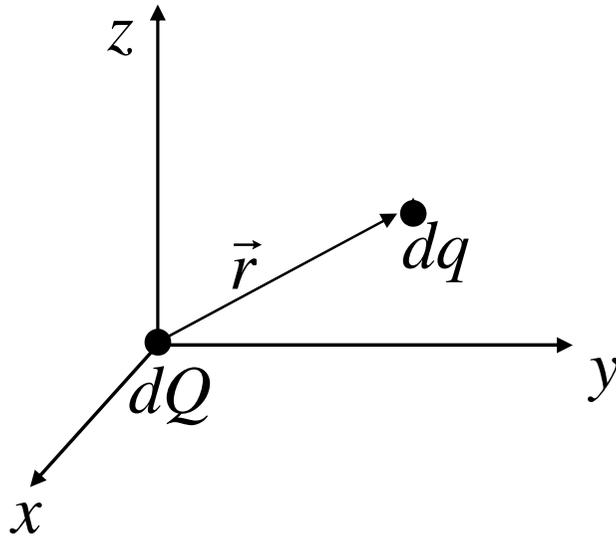
Unità di misura di E nel SI: N/C (oppure V/m)

Dimensioni:

$$[E] = \frac{[F]}{[Q]} = [MLT^{-3}I^{-1}]$$

Campo elettrostatico

Leggi elementari in forma differenziale



$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \hat{r}$$

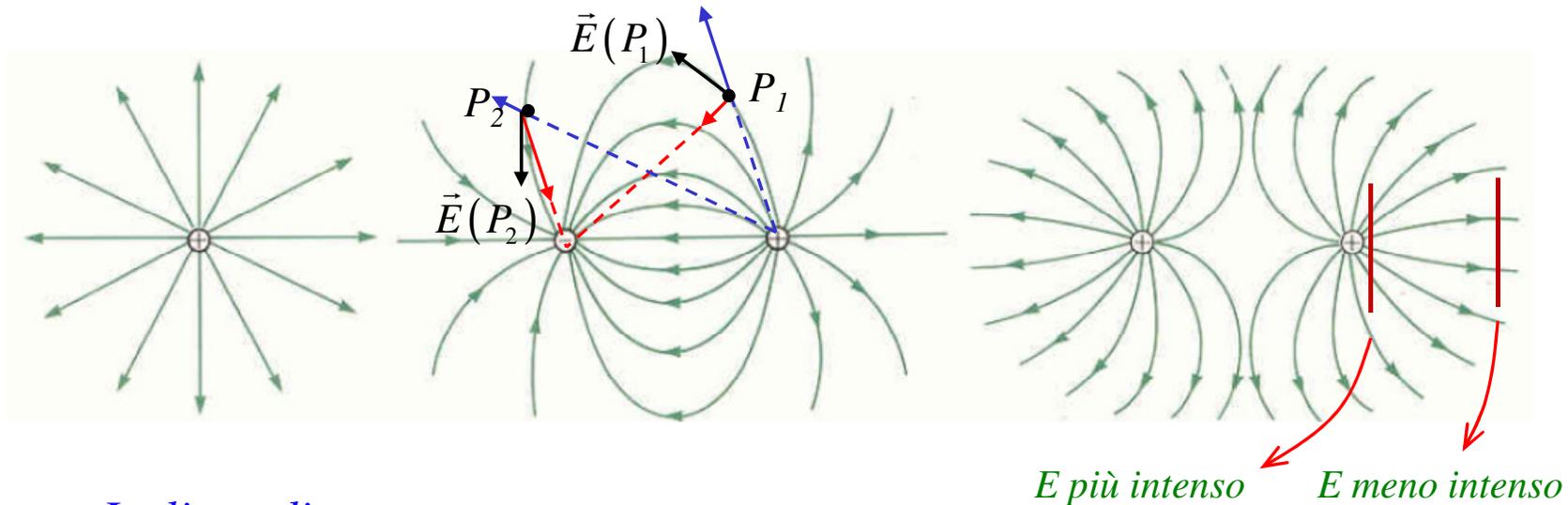
La carica dQ crea un campo elettrico $d\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in ogni punto dello spazio.

$$d\vec{F}(\vec{r}) = dq\vec{E}(\vec{r})$$

La forza su dq è dovuta allo accoppiamento locale tra la carica dq ed il campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ nel punto \mathbf{r} .

Campo elettrostatico

Linee di campo (o di flusso)



Le linee di campo sono:

- *tangenti in ogni punto al vettore campo elettrico;*
- *orientate col verso del campo elettrico;*
- *in numero, per unità di superficie, proporzionale al modulo del campo elettrico .*

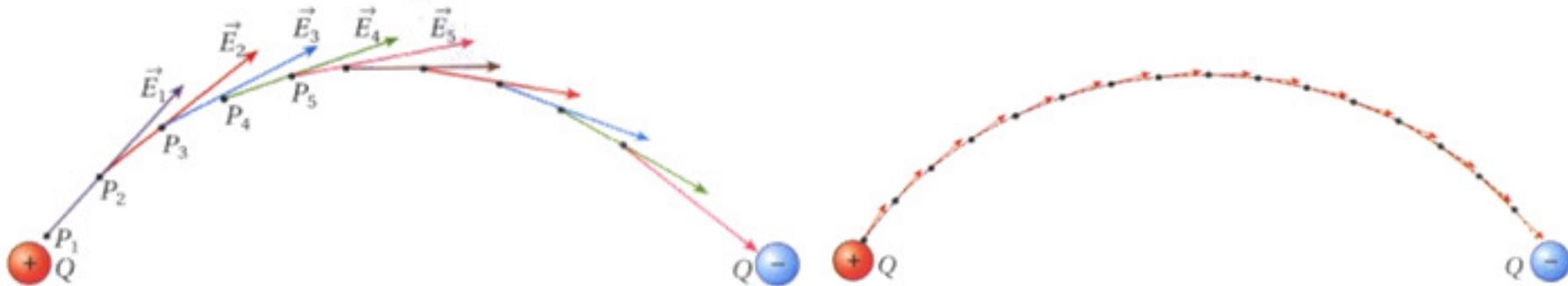
Campo elettrostatico

Linee di campo (o di flusso)

Per disegnare una linea di campo (o di forza):

Si disegna \vec{E}_1 in un punto vicino a una carica; ci si sposta su \vec{E}_1 di una distanza infinitesima e si disegna \vec{E}_2 . Ci si sposta su \vec{E}_2 di una distanza infinitesima e si disegna \vec{E}_3 , e così via.

Se gli spostamenti infinitesimi tendono a zero la spezzata tende a una curva: è la linea di campo, di forza o di flusso.



Campi vettoriali

Operatori differenziali

Nabla

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Gradiente di un campo scalare

$$\vec{F} = \vec{\nabla} U \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} \right)$$

Rotore di un campo vettoriale

$$\vec{R} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \equiv \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{k} \right]$$

Divergenza di un campo vettoriale

$$d = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \equiv \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

Campi vettoriali

Operatori differenziali

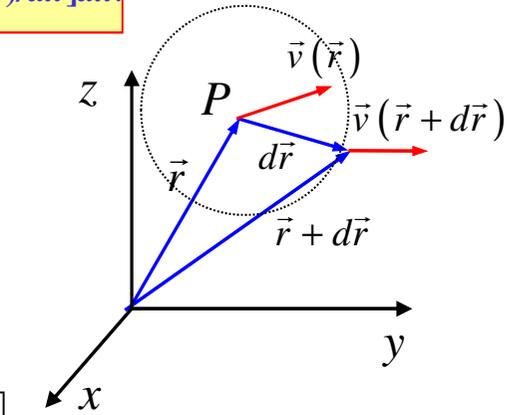
Noto il campo \mathbf{v} in un punto P identificato dal vettore posizionale \mathbf{r} , quanto vale \mathbf{v} in un intorno di P ?

Nel caso di una funzione scalare $f(x)$, al primo ordine si ha $f(x+dx) = f(x) + [df(x)/dx]dx$.

Nel caso di un campo vettoriale:

$$\vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{v}(x + dx, y + dy, z + dz) = \begin{bmatrix} v_x(x + dx, y + dy, z + dz) \\ v_y(x + dx, y + dy, z + dz) \\ v_z(x + dx, y + dy, z + dz) \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} v_x(x, y, z) + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz \\ v_y(x, y, z) + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz \\ v_z(x, y, z) + \frac{\partial v_z}{\partial x} dx + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

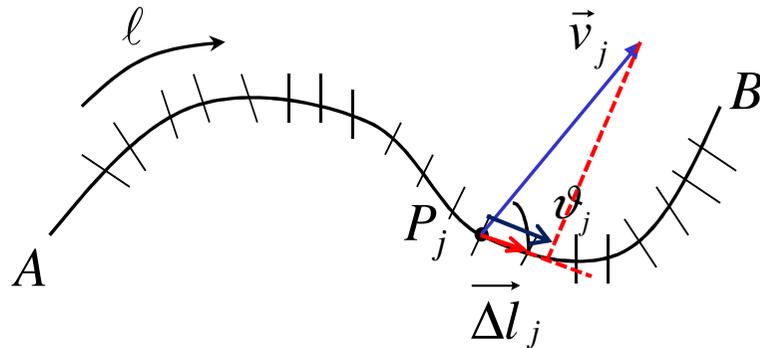


$$\vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}) \approx \vec{v}(\vec{r}) + Dd\vec{r}$$

Campi vettoriali

Integrali

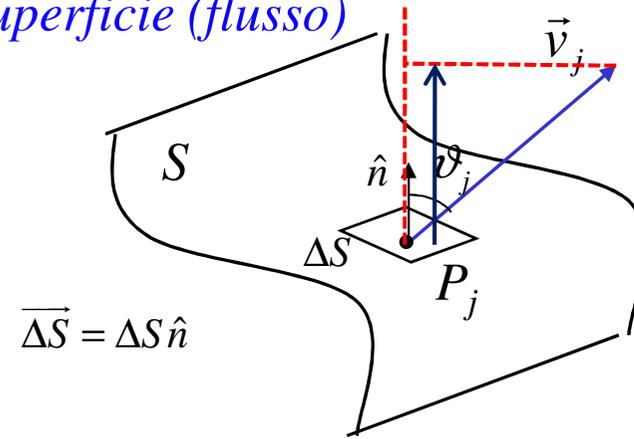
... di linea (circolazione)



$$L_\ell = \lim_{|\Delta l_j| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N |\overrightarrow{\Delta l}_j| |\vec{v}_j| \cos \vartheta_j =$$

$$= \lim_{|\Delta l_j| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \vec{v}_j \cdot \overrightarrow{\Delta l}_j = \int_\ell \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

... di superficie (flusso)



$$\varphi_S = \lim_{|\Delta S_j| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N |\overrightarrow{\Delta S}_j| |\vec{v}_j| \cos \vartheta_j =$$

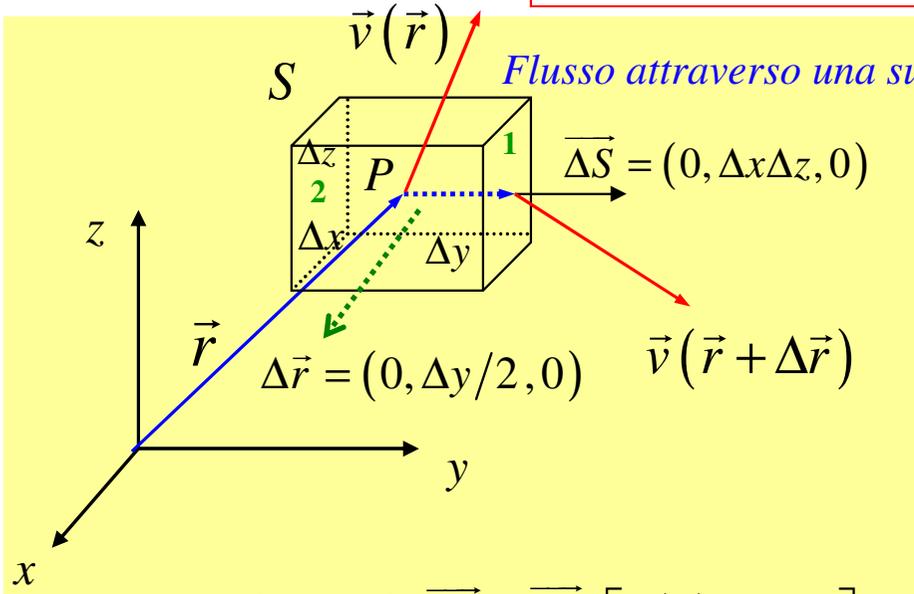
$$= \lim_{|\Delta S_j| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \vec{v}_j \cdot \overrightarrow{\Delta S}_j = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Campi vettoriali

$$\vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}) \approx \vec{v}(\vec{r}) + Dd\vec{r}$$

Divergenza

$$\phi_s = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$



Flusso attraverso una superficie chiusa infinitesima

$$\Delta\phi_1 \approx v_y \Delta x \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta\phi_2 \approx -v_y \Delta x \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 \approx \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta V$$

$$\Delta\phi_1 \approx \vec{v}(\vec{r} + \Delta\vec{r}) \cdot \vec{\Delta S} \approx \vec{\Delta S} \cdot [\vec{v}(\vec{r}) + D\Delta\vec{r}]$$

$$\phi_{S(\Delta V)} = \sum_1^6 \Delta\phi_i \approx \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta V$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta x \Delta z \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta x \Delta z \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta y/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\oiint_{S(\Delta V)} \vec{v} \cdot d\vec{S} \approx \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \Delta V$$

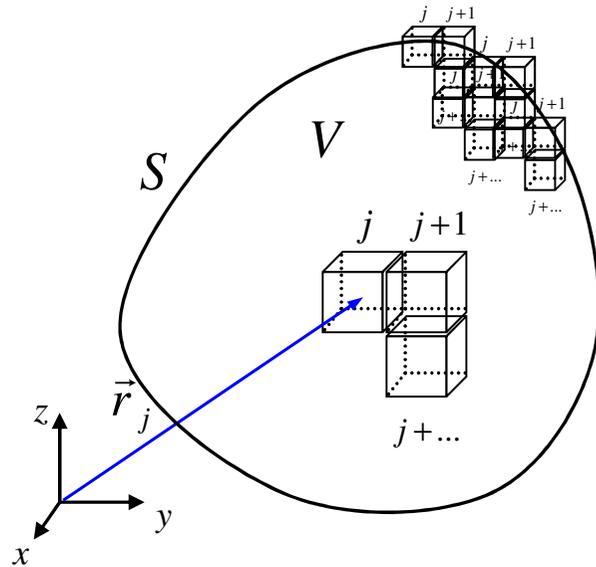
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{S(\Delta V)} \vec{v} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

Campi vettoriali

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{S(\Delta V)} \vec{v} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

Teorema di Gauss

Il flusso del campo vettoriale \mathbf{v} attraverso una superficie chiusa S eguaglia l'integrale della divergenza di \mathbf{v} esteso al volume V limitato da S .



$$\sum_{j=1}^N \oiint_{S(\Delta V_j)} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \sum_{j=1}^N \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}_j) \Delta V_j$$

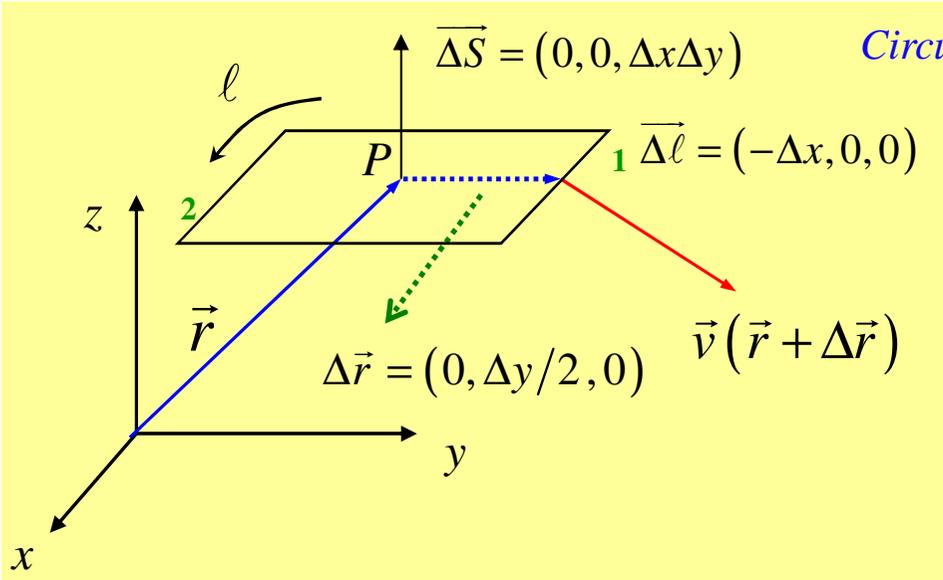
$$\xrightarrow[\substack{\Delta V_j \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}]{}$$

$$\oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV$$

Campi vettoriali

Rotore

$$L_\ell = \int_\ell \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$$



Circuitazione intorno ad una superficie infinitesima

$$\Delta L_1 \approx -v_x \Delta x - \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta x \Delta y$$

$$\Delta L_2 \approx v_x \Delta x - \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta x \Delta y$$

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 \approx -\frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta S$$

$$L_{\ell(\Delta S)} = \sum_1^4 \Delta L_i \approx \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \Delta S$$

$$\oint_{\ell(\Delta S)} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \approx (\vec{\nabla} \wedge \hat{v})_z \Delta S =$$

$$= (\vec{\nabla} \wedge \hat{v}) \cdot \vec{\Delta S} = (\vec{\nabla} \wedge \hat{v}) \cdot \hat{n} \Delta S$$

$$\Delta L_1 \approx \vec{v}(\vec{r} + \Delta\vec{r}) \cdot \vec{\Delta\ell} \approx \vec{\Delta\ell} \cdot [\vec{v}(\vec{r}) + D\Delta\vec{r}]$$

$$= \begin{bmatrix} -\Delta x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta y/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

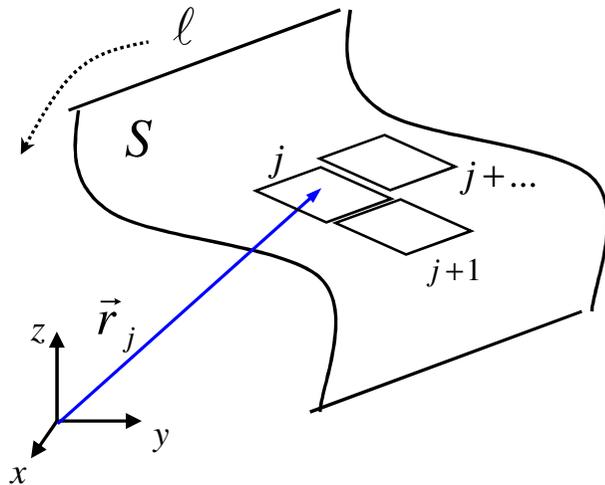
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\ell(\Delta S)} \vec{v} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta S}$$

Campi vettoriali

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\ell(\Delta S)} \vec{v} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta S} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \cdot \hat{n}$$

Teorema di Stokes

La circuitazione del campo vettoriale \vec{v} lungo una linea chiusa ℓ eguaglia il flusso del rotore di \vec{v} attraverso una qualunque superficie S limitata da ℓ .



$$\sum_{j=1}^N \oint_{\ell(\Delta S_j)} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \sum_{j=1}^N \vec{\nabla} \wedge \vec{v}(\vec{r}_j) \cdot \hat{n}_j \Delta S_j$$

$$\xrightarrow[\substack{\Delta S_j \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}]{\uparrow}$$

$$\oint_{\ell} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Equazioni del campo elettrostatico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$$|d\vec{S}_l| \cos \vartheta_l = dS_{lc} = d\Omega r_l^2$$

$$\vec{E}_l \cdot d\vec{S}_l = |\vec{E}_l| |d\vec{S}_l| \cos \vartheta_l = |\vec{E}_l| d\Omega r_l^2$$

$$\vec{E}_{e'} \cdot d\vec{S}_{e'} = |\vec{E}_{e'}| |d\vec{S}_{e'}| \cos \vartheta_{e'} = -|\vec{E}_{e'}| d\Omega r_{e'}^2$$

$$\vec{E}_l \cdot d\vec{S}_l = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_l^2} d\Omega r_l^2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$\vec{E}_{e'} \cdot d\vec{S}_{e'} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_{e'}^2} d\Omega r_{e'}^2 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$\phi_S = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0}$$

$$\phi_S = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

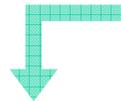
Legge di Gauss (forma integrale)

Equazioni del campo elettrostatico

Legge di Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0}$$

Forma integrale



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V_S} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V_S} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

Teorema di Gauss



$$\iiint_{V_S} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \iiint_{V_S} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad \forall V$$



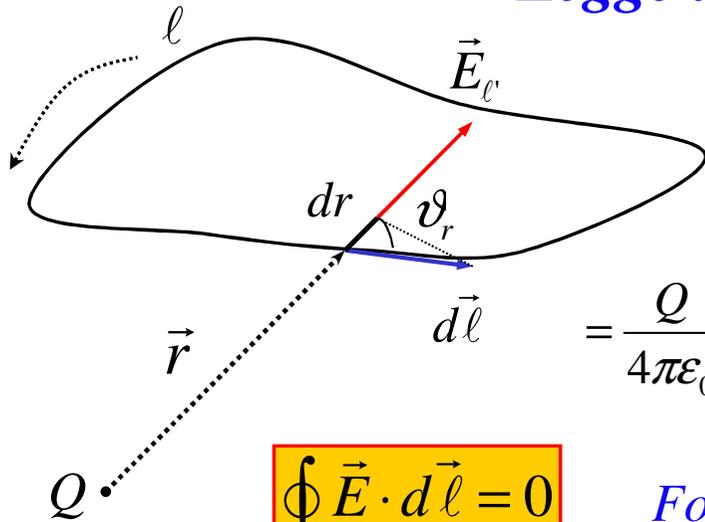
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Forma differenziale

Equazioni del campo elettrostatico

Legge della circuitazione

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$



$$C_l = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_l \frac{1}{r^2} \cos \vartheta_r dl = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_l \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_A^{B=A} = 0$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Forma integrale

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Teorema di Stokes

$$\iint_{S_l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \forall S$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

Forma differenziale

Il campo elettrostatico è conservativo

Equazioni del campo elettrostatico

Riepilogo

Legge di Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_s}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Forma integrale

Forma differenziale

Legge della circuitazione

$$\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

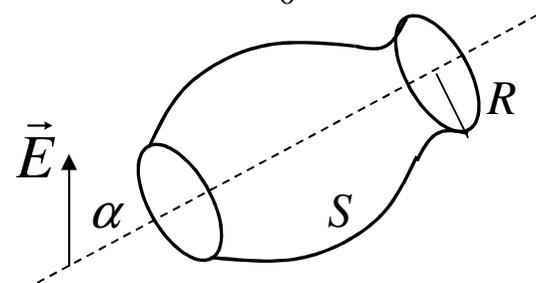
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

Campo elettrostatico

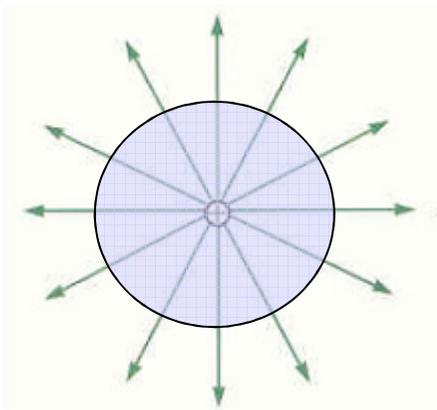
Legge di Gauss - applicazioni

Campo di una lamina piana estesa: $E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}$

Flusso di un campo elettrico uniforme attraverso la superficie laterale di un vaso:



$$\Phi_S = -E\pi R^2 \cos \alpha$$



Legge di Coulomb dalla legge di Gauss:

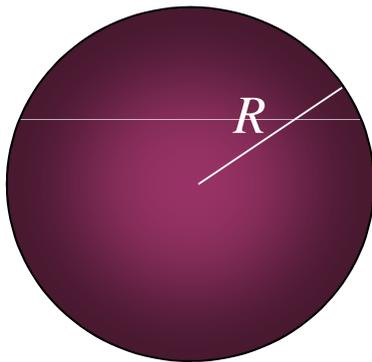
$$\left. \begin{aligned} \Phi_S &= 4\pi r^2 \vec{E} \cdot \hat{n} = 4\pi r^2 E \\ \Phi_S &= \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Campo elettrostatico

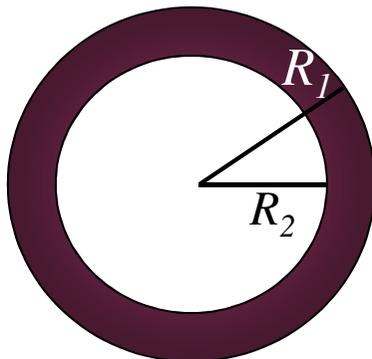
Legge di Gauss – sfera carica

Sfera uniformemente carica con carica totale q e densità di carica ρ



$$\text{Se } r > R \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$\text{Se } r < R \quad E = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r$$



Sfera cava

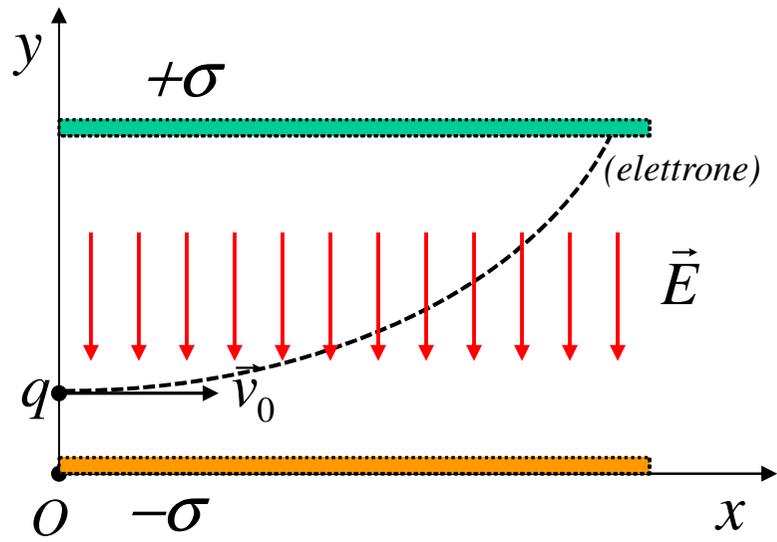
$$\text{Se } r < R_2 \quad E = 0$$

Campo elettrostatico

Moto di una particella in un c. e.

In regime non relativistico:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{E} = m\vec{a}$$



$$F_x = ma_x = 0$$

$$F_y = ma_y = -qE$$

$$a_x = 0 \Rightarrow v_x = v_0 ; x = v_0 t$$

$$a_y = -\frac{qE}{m} \Rightarrow v_y = -\frac{qE}{m} t \quad y = y_0 - \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2$$

