Fisica Generale B

Potenziale elettrostatico

Scuola di Ingegneria e Architettura

UNIBO – Cesena

Anno Accademico 2014 – 2015

Equazioni del campo elettrostatico

Riepilogo

Legge di Gauss		*Legge della circuitazione*
$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\varepsilon_0}$	*Forma integrale*	$\oint_\ell \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	*Forma differenziale*	$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0$

Potenziale elettrostatico

NB.: attenzione al diverso uso delle denominazioni potenziale ed energia potenziale, rispetto alla meccanica.

Il campo elettrostatico è conservativo ⇒ $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

V = potenziale elettrostatico ⇐ NB.: È una energia potenziale per unità di carica

*Forza agente su una carica q posta in **P**:* $\vec{F} = q\vec{E} = -q\vec{\nabla} V$

*Energia potenziale della carica q in **P**:* $U_q(P) = qV(P)$

Unità di misura del potenziale nel SI: Volt (V) $1\,\mathrm{V} = \dfrac{1\,\mathrm{N}\times 1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{C}} = \dfrac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{C}}$

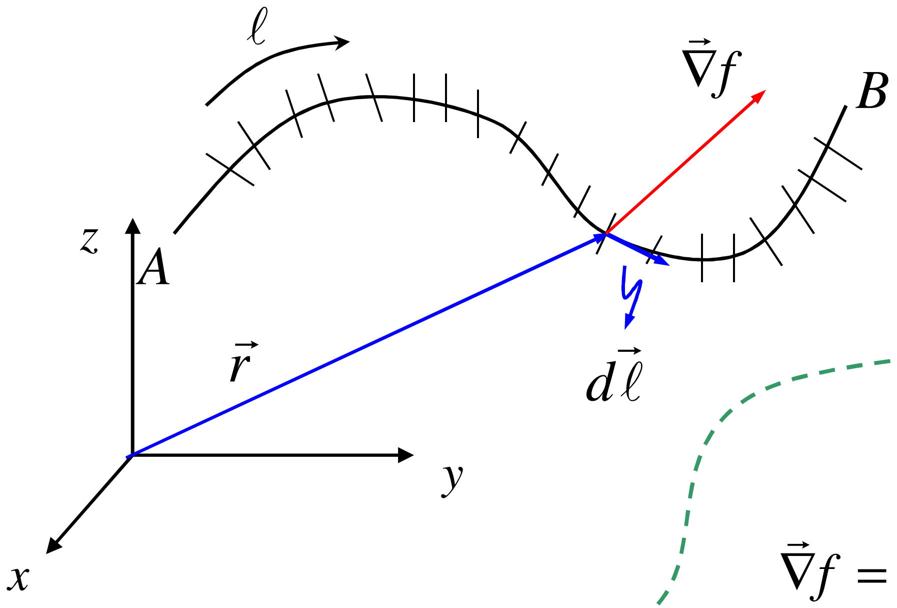
Analisi dimensionale:

$$[V] = [E][L] = \frac{[F]}{[Q]}[L] = \left[ML^2T^{-3}I^{-1}\right]$$

Nel mondo delle particelle elementari

$$1\ \mathrm{eV} \simeq 1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \times 1\mathrm{V} = 1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}\ ; \quad 1\mathrm{MeV/c^2} \simeq \frac{1.60 \times 10^{-13}}{9 \times 10^{16}} \simeq 1.78 \times 10^{-30}\ \mathrm{Kg}$$

Gradiente - campi radiali



$$\boxed{\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} f \cdot d\vec{\ell} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df}$$

Se f = f(r)

$$\vec{\nabla} f = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{i} + \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{j} + \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\hat{k} = \frac{df}{dr}\vec{\nabla} r$$

$$\vec{\nabla} r = \frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j} + \frac{z}{r}\hat{k} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} f(r) = \frac{df}{dr}\hat{r}}$$

Nel caso $f = 1/r^n$: $\boxed{\vec{\nabla}\frac{1}{r^n} = -\frac{n}{r^{n+1}}\hat{r}}$ *Se $f = 1/r$:* $\boxed{\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\hat{r}}$

Potenziale elettrostatico

Potenziale elettrostatico di una carica puntiforme

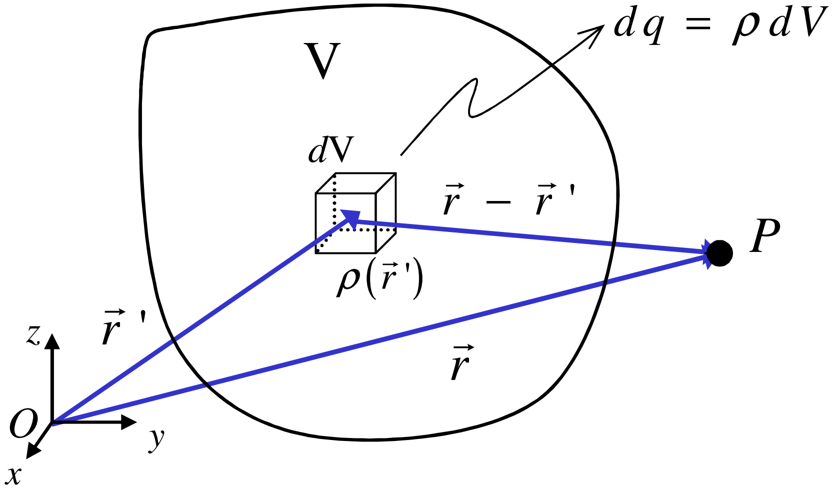
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\frac{1}{r}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + k$$

Potenziale elettrostatico generato da una distribuzione (discreta o continua) di carica



$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}\,')\,d\mathrm{V}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + k$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathrm{V}}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\mathrm{V} + K$$

Potenziale elettrostatico

Lavoro delle forze elettrostatiche

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$$

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -q\int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{\ell} = -q\int_A^B dV = q\left[V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B)\right]$$

$$\boxed{L_{AB} = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B)}$$

$$\boxed{L_{AB} = T_B - T_A}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(\vec{r}_A) + T_A = U(\vec{r}_B) + T_B = costante}$$

*Energia potenziale elettrostatica della carica q (o ρ d*V*) immersa nel campo elettrostatico descritto dal potenziale V(**r**).*

$$\Rightarrow \boxed{U(\vec{r}) = qV(\vec{r})}$$

$$\boxed{dU(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) V(\vec{r})\, d\mathrm{V}}$$

***N.B.:** Il potenziale elettrostatico non è univocamente definito in un punto dello spazio in quanto definito a meno di una costante arbitraria. Lo è invece la differenza di potenziale (d.d.p.) tra due punti.*

Tra due punti A e B dello spazio c'è la d.d.p. di 1 V quando il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche per spostare la carica di 1 C dal punto A al punto B vale 1 J.

Potenziale elettrostatico

Formulazione dell'elettrostatica mediante V

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}V\right)=-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)V=-\vec{\nabla}^2V$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}^2V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Equazione di Poisson

- *L'equazione di Poisson implica una formulazione dell'elettrostatica basata sulla funzione potenziale (V), del tutto equivalente a quella fondata sul campo elettrico.*
- *La carica elettrica genera nello spazio un campo scalare, il potenziale elettrostatico,determinato punto per punto dall'equazione di Poisson.*
- *Il potenziale V può essere rappresentato graficamente da superfici di livello caratterizzate da V=cost, dette equipotenziali.*

Potenziale elettrostatico

Formulazione dell'elettrostatica mediante V

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V} \Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\vec{\nabla} V \cdot d\vec{\ell} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)\cdot(dx, dy, dz)$$

$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) \Rightarrow \boxed{\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -dV}$$

$$Se\ dV = 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{\ell} \perp \vec{E}$$

$$Se\ d\vec{\ell} \parallel \vec{E}\ concordi \Rightarrow -dV = \left|\vec{E}\right|\left|d\vec{\ell}\right|$$

$$\left|\vec{E}\right| = \left|\frac{dV}{d\ell_{\parallel}}\right|$$

Il campo elettrostatico in un punto P è caratterizzato da:

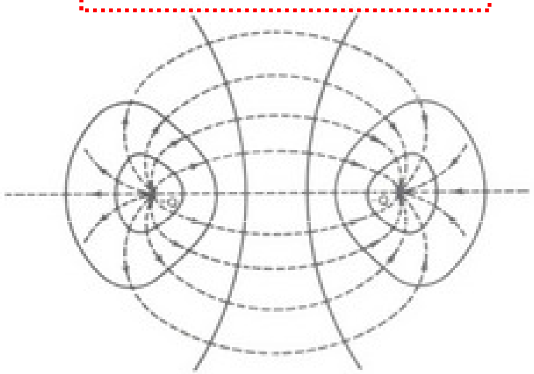
1. *direzione normale alla superficie equipotenziale passante per P;*
2. *verso corrispondente ai valori decrescenti del potenziale al passare da una superficie equipotenziale ad un'altra;*
3. *modulo uguale al valore assoluto della derivata del potenziale in P lungo tale direzione.*

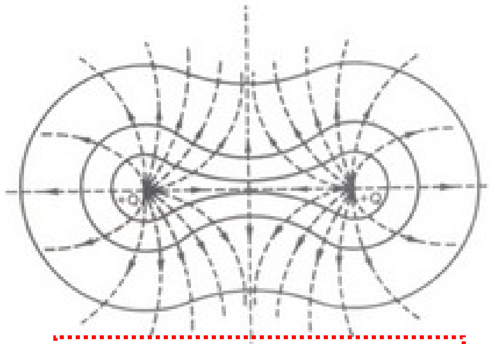
Potenziale elettrostatico

Esempi di Superfici Equipotenziali

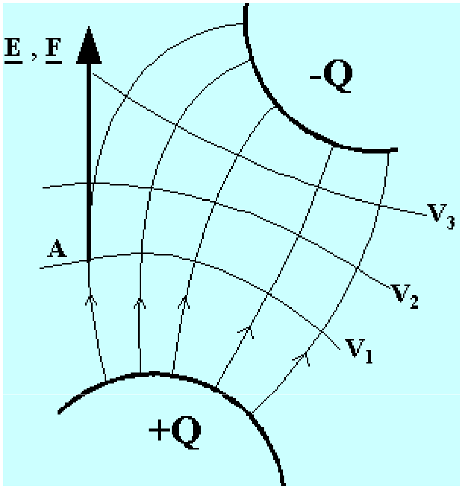
•Carica singola

•Due cariche opposte





•Due cariche uguali



•Se una carica unitaria si trova nel punto A, dove il campo elettrico vale **E**, *risente di una forza* **F** *tangente alla linea di campo.*

•Per le superfici equipotenziali tracciate vale la disuguaglianza

$$V_1 > V_2 > V_3$$

Potenziale elettrostatico

Definizione operativa del potenziale

$$L_{AB}^{el} = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = q\left[V(\vec{r}_A)-V(\vec{r}_B)\right] \Rightarrow V(\vec{r}_A)-V(\vec{r}_B)=\frac{L_{AB}^{el}}{q}$$

Se, mediante forze altre (non dovute al campo elettrostatico), spostiamo una carica "esploratrice" q inizialmente ferma in A, fino a portarla a riposo in un altro punto B

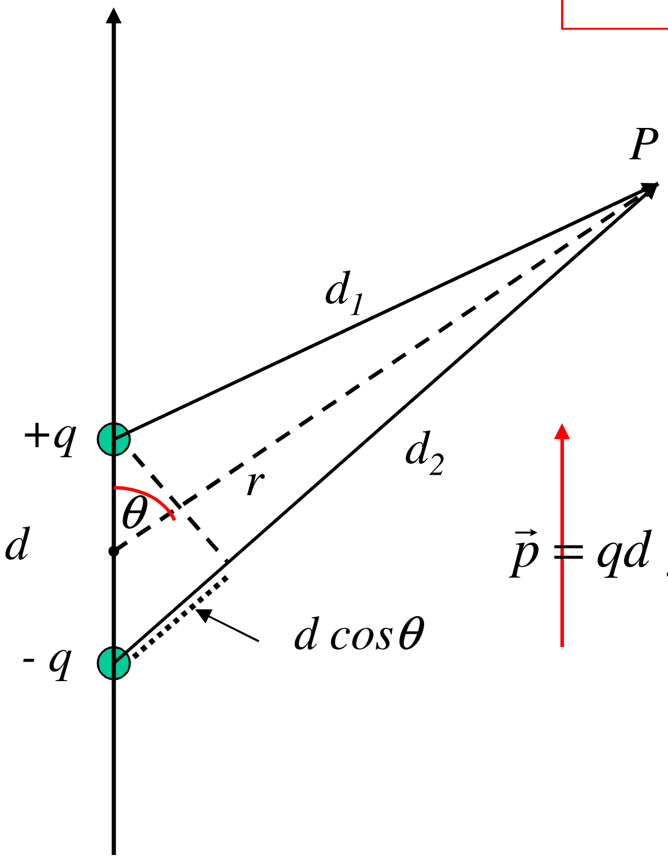
$$L_{AB} = L_{AB}^{el} + L_{AB}^{al} = 0 \Leftarrow \text{Teorema delle forze vive}$$

$$\Rightarrow L_{AB}^{al} = -q\left[V(\vec{r}_A)-V(\vec{r}_B)\right]; \quad \boxed{V(B)-V(A)=\frac{L_{AB}^{al}}{q}}$$

P.E. – casi notevoli

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + k$$

Dipolo elettrico



$$\vec{p} = qd\,\hat{j}$$

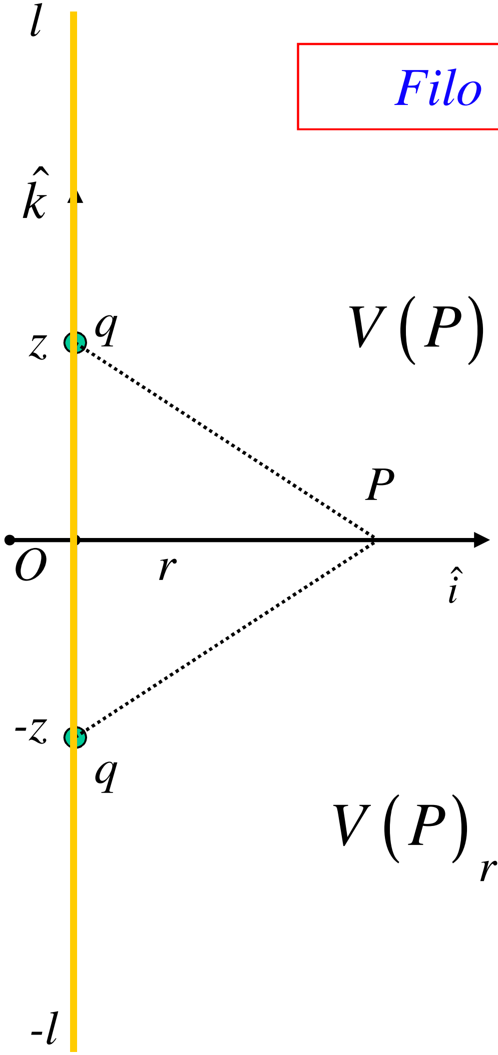
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{d_1} - \frac{q}{d_2}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(d_2 - d_1)}{d_1 d_2}$$

NB.: si assume $V(\infty) = 0$, quindi $k = 0$. Ciò è possibile solo per distribuzioni di carica confinate in uno spazio finito.

$$V(P) \underset{r \gg d}{\approx} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2}$$

$$\boxed{V(P) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}}$$

P.E. – casi notevoli



Filo uniformemente carico di lunghezza l

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Proviamo ancora ad assumere *k* = 0.

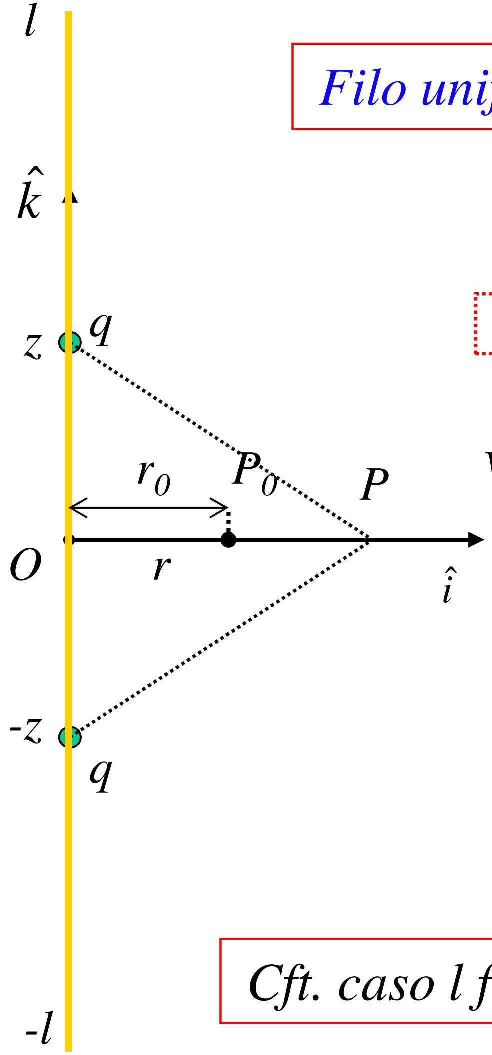
$$V(P) = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(z+\sqrt{r^2+z^2}\right)\Big|_0^l$$

$$\boxed{V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{l+\sqrt{r^2+l^2}}{r}} \xrightarrow[l\to\infty]{} \infty\,!$$

$$V(P) \underset{r\ll l}{\approx} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2l}{r}$$

$$\boxed{V(P_1)-V(P_2) \simeq \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

P.E. – casi notevoli



Filo uniformemente carico di lunghezza infinita

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\hat{i}$$

$$V(P) - V(P_0) = \int_P^{P_0} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Assumiamo $V(P_0) = 0$.

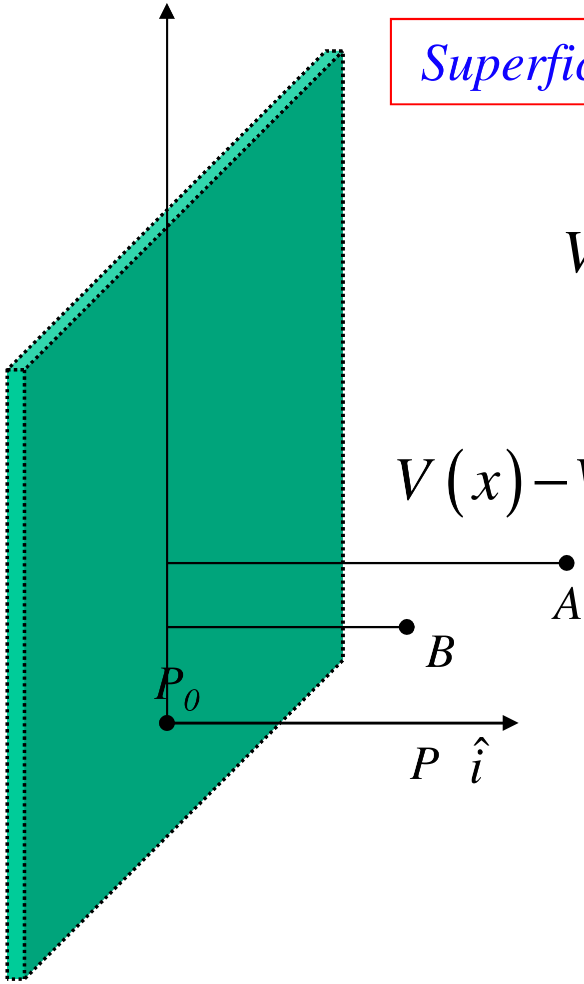
$$V(P) = 0 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^{r_0}\frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

$$\boxed{V(P_1) - V(P_2) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

Cft. caso l finito, r << l ⇨ $V(P_1) - V(P_2) \simeq \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$

P.E. – casi notevoli

Superficie piana infinitamente estesa



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}\hat{i}$$

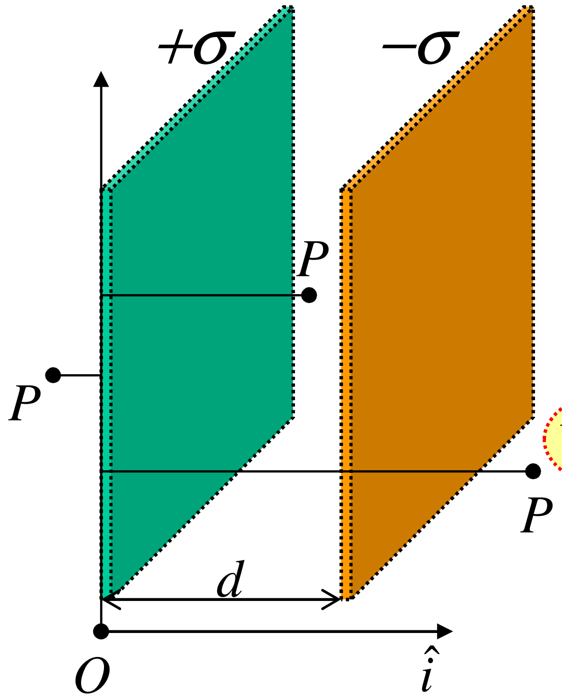
$$V(P) - V(P_0) = \int_P^{P_0} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$V(x) - V(P_0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}\int_x^0 dx' = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}x = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x|$$

$$V(P) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}d$$

$$V(A) - V(B) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(d_A - d_B)$$

P.E. – casi notevoli



Doppio strato piano

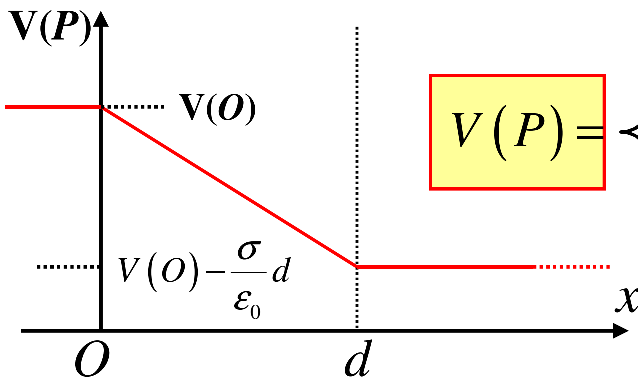
$$\boxed{V(P)-V(O)=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(d_P-d_O\right)}$$

$$V_{+\sigma}(P)-V_{+\sigma}(O)=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(|x|-0\right)$$

$$V_{-\sigma}(P)-V_{-\sigma}(O)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(|x-d|-d\right)$$

$$V(P)-V(O)=\left[V_{+\sigma}(P)-V_{+\sigma}(O)\right]+\left[V_{-\sigma}(P)-V_{-\sigma}(O)\right]=$$

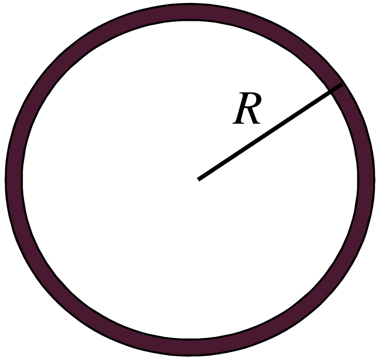
$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(|x-d|-d-|x|\right)$$



$$\boxed{V(P)=}\begin{cases} x>d & V(O)+\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\cancel{x}-d-d-\cancel{x}\right)= \boxed{V(O)-\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}d} \\ 0\le x\le d & V(O)+\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\cancel{d}-x-\cancel{d}-x\right)= \boxed{V(O)-\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}x} \\ x<0 & V(O)+\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\cancel{d}-\cancel{x}-\cancel{d}+\cancel{x}\right)= \boxed{V(O)} \end{cases}$$

P.E. – casi notevoli

Sfera



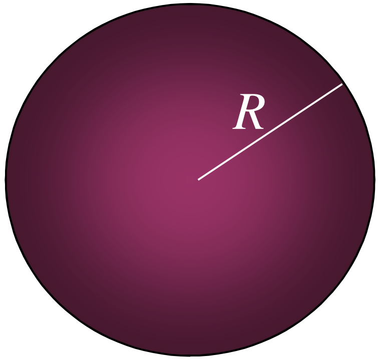
Superficie sferica carica con carica totale Q

$$\boxed{r > R; \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}} \quad \left(V(\infty) = 0\right)$$

$$r < R; \quad V(r) - V(R) = \int_r^R \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}; \quad r \le R}$$

Sfera uniformemente carica con carica totale Q

$$\boxed{\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}; \quad r > R \\ V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right); \quad r \le R \end{aligned}}$$



Energia

Energia potenziale della carica q in ***P****:*

$$U_q(P) = qV(P)$$

Energia totale di una carica q in un campo elettrostatico:

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv^2 + qV(P)$$

Particelle cariche inizialmente ferme in un punto A si muovono verso posizioni in cui il potenziale è minore (e l'energia potenziale è minore), se la loro carica è positiva, oppure verso posizioni in cui il potenziale è maggiore (ma l'energia potenziale è comunque minore!) se sono cariche negativamente.

$$\mathrm{E} = \cancel{\frac{1}{2}mv_A^2} + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B$$

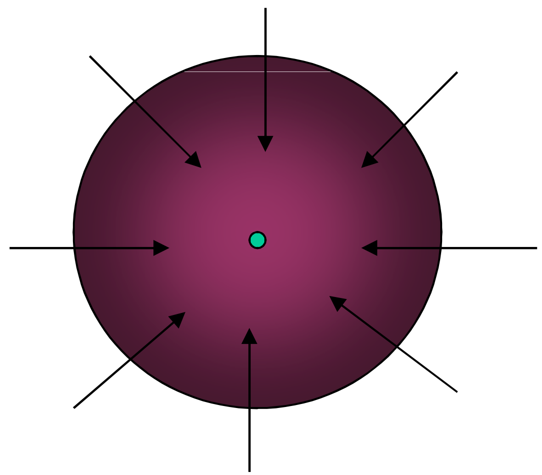
$$U_A - U_B = q(V_A - V_B) = \frac{1}{2}mv_B^2 \geq 0$$

eV*: elettronvolt. Energia cinetica acquistata da una particella avente carica pari a quella di un elettrone, accelerata dalla differenza di potenziale di 1V.*

$$1\,\mathrm{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

Equilibrio

In un campo elettrostatico, per una particella carica, non esistono posizioni di equilibrio stabile in zone non occupate dalle sorgenti del campo.



$$\phi_S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Equazioni di Poisson e di Laplace

Equazione di Poisson

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

⇓

Soluzione per una distribuzione finita di cariche :

⇓

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV}$$

$$\rho = 0 \quad \Rightarrow$$

Equazione di Laplace

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 V = 0}$$

⇓

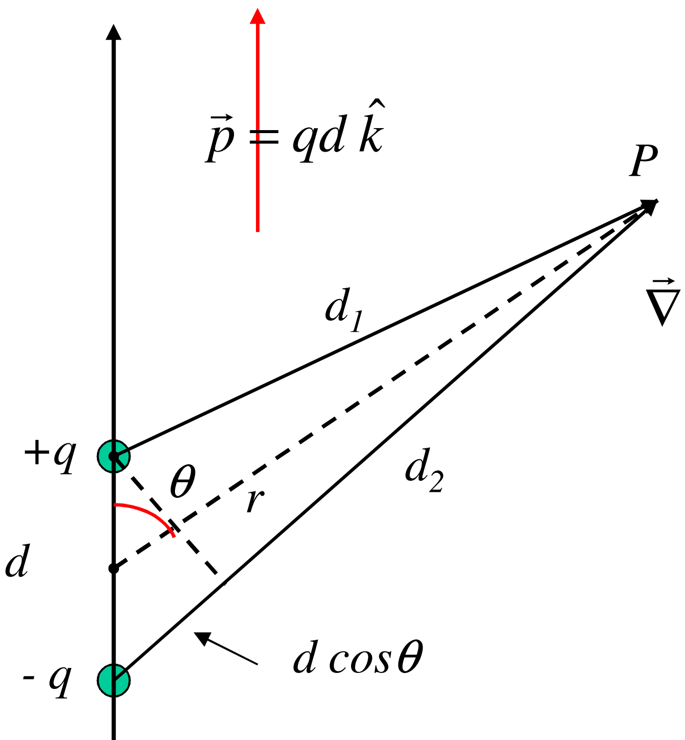
Si applica quando non si conosce ρ ma sono note le posizioni di alcuni conduttori e i potenziali sulle loro superfici, o le posizioni di alcuni conduttori e il campo nelle loro vicinanze.

Problema di Dirichlet

Problema di Neumann

Ancora il dipolo elettrico

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r^n} = -\frac{n}{r^{n+1}}\hat{r}$$



$$\boxed{V(P) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}}$$

$$\vec{\nabla}V(P) \approx \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left[z\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r^3}\vec{\nabla}z\right]$$

$$\vec{E}(P) = -\vec{\nabla}V(P) \approx \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left[z\frac{3}{r^4}\hat{r} - \frac{1}{r^3}\hat{k}\right]$$

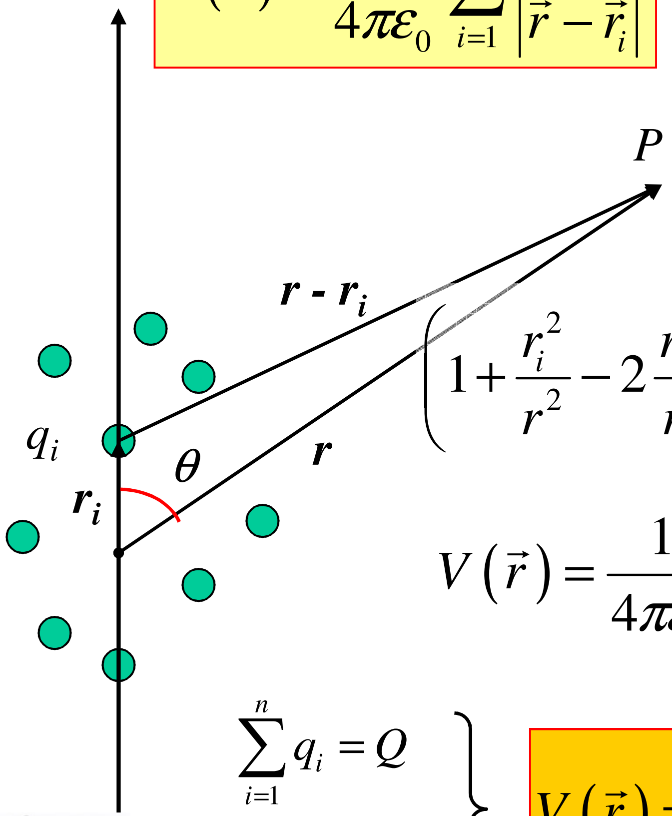
$$\boxed{\vec{E}(P) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^3}\hat{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right]}$$

$$\boxed{\vec{E}(x,y,0) \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}}{r^3}\right]}$$

$$\boxed{\vec{E}(0,0,z) \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}}{r^3}\right]}$$

Sviluppo in serie di multipoli

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}}$$



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\sqrt{r^2 + r_i^2 - 2 r r_i \cos\theta_i}}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r}\left[1+\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 - 2\frac{r_i}{r}\cos\theta_i\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(1+\frac{r_i^2}{r^2} - 2\frac{r_i}{r}\cos\theta_i\right)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{r_i^2}{2r^2} + \frac{r_i}{r}\cos\theta_i + \frac{3}{8}4\frac{r_i^2}{r^2}\cos^2\theta_i$$

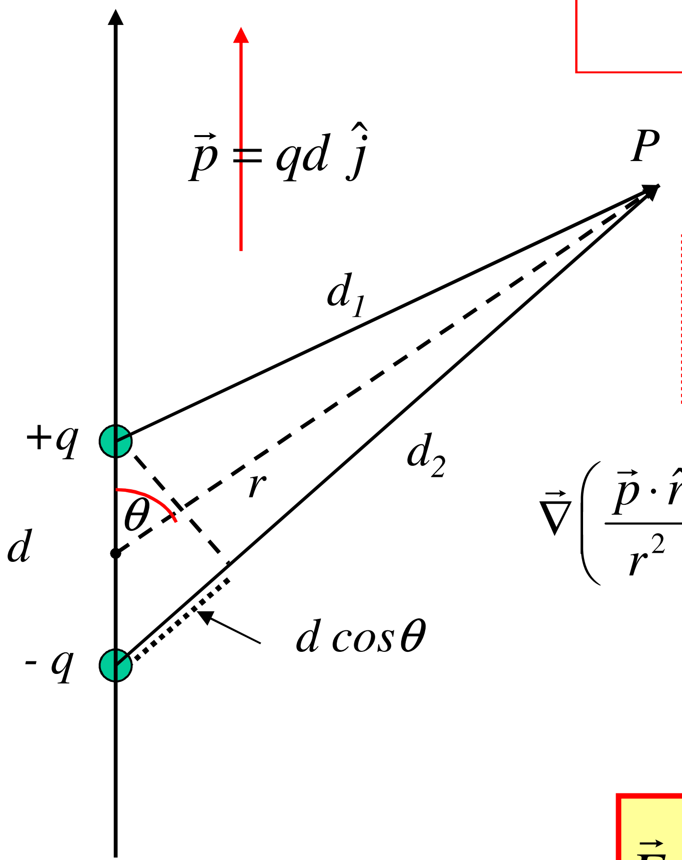
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r}\left(1+\frac{r_i}{r}\cos\theta_i + \frac{r_i^2}{r^2}\frac{3\cos^2\theta_i - 1}{2} + \ldots\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} q_i &= Q \\ \sum_{i=1}^{n} q_i \vec{r}_i &= \vec{p}\end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} + \frac{1}{r^3}\sum_{i=1}^{n} q_i r_i^2 \frac{3\cos^2\theta_i - 1}{2} + \ldots\right)}$$

P.E. – casi notevoli

Dipolo elettrico



$$V(P) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{py}{r^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{py}{r^3}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{py}{r^3}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{py}{r^3}\right)\hat{k}$$

$$= \left(-\frac{py3rx}{r^6}\right)\hat{i} + \left(\frac{pr^3}{r^6} - \frac{py3ry}{r^6}\right)\hat{j} + \left(-\frac{py3rz}{r^6}\right)\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(3\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^3}\hat{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)}$$