Fisica Generale B

Conduttori e condensatori

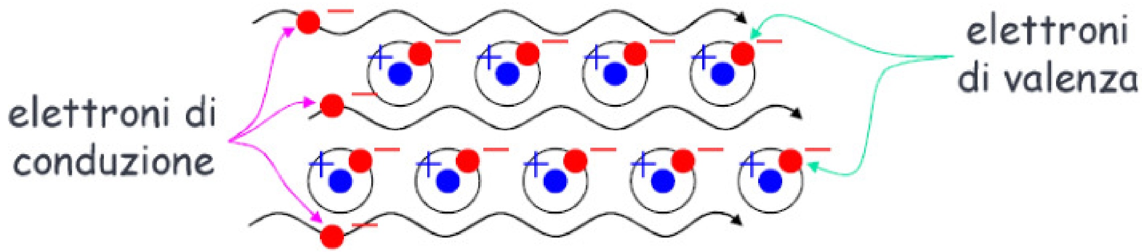
Scuola di Ingegneria e Architettura

UNIBO – Cesena

Anno Accademico 2014 – 2015

Campo elettrostatico nei conduttori

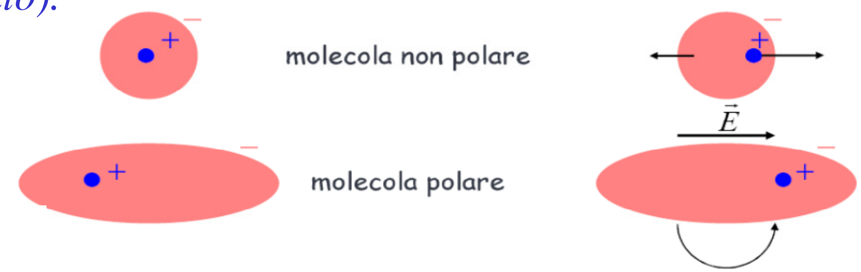
Conduttore



In un conduttore, una parte delle particelle cariche (gli elettroni di conduzione nel caso dei metalli) sono libere di muoversi per tutto il corpo come un gas.

In condizioni statiche (assenza di movimento) la forza elettrica, e con essa il campo elettrico debbono essere nulli in tutto il conduttore (altrimenti gli elettroni di conduzione, non vincolati, soggetti a una forza si metterebbero in movimento).

Isolante (dielettrico)

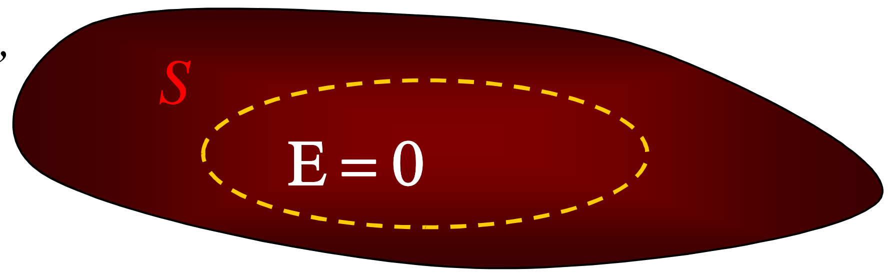


In un isolante (detto anche dielettrico), le cariche elettriche in dotazione a una molecola sono vincolate a muoversi soltanto all'interno della molecola.

Un campo elettrico esterno non produce un movimento di cariche, se non su piccola scala (polarizzazione) dovuto a una deformazione delle molecole o a un orientamento delle molecole.

Campo elettrostatico nei conduttori

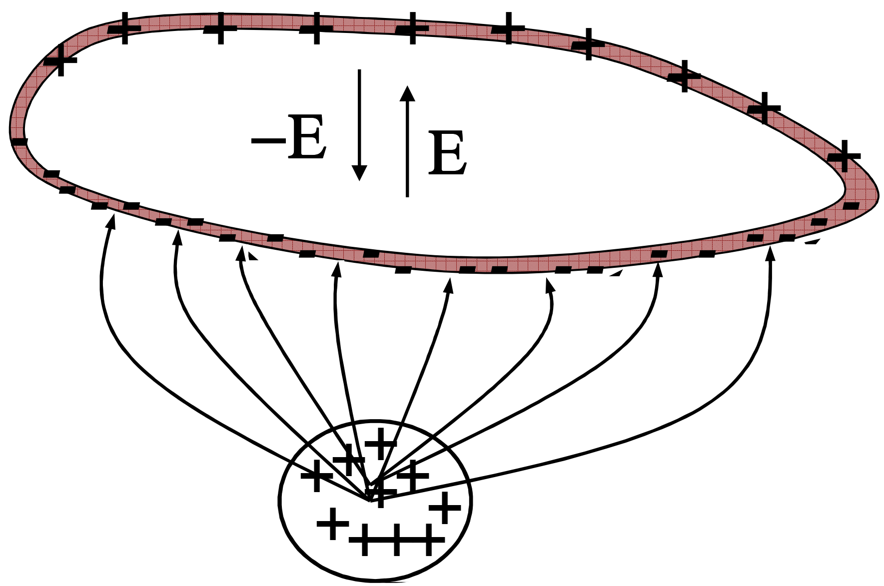
Presa una superficie chiusa arbitraria S, interna al conduttore, il campo elettrico deve essere nullo su tutta la superficie.



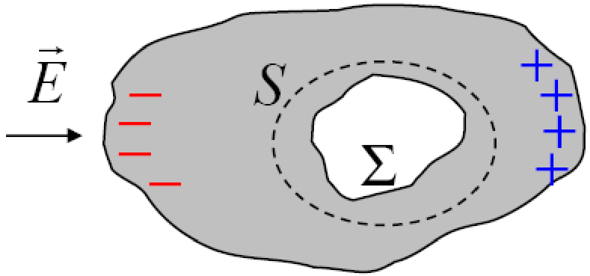
Segue che il flusso del campo elettrico attraverso la superficie S è nullo e quindi, per la legge di Gauss, la carica elettrica totale Q all'interno della superficie S arbitraria, interna al corpo, è nulla:

All'interno di un conduttore non vi possono essere cariche in eccesso (la densità di cariche positive è uguale alla densità di cariche negative).

Se il conduttore viene caricato, all'equilibrio la carica aggiuntiva immessa si dispone sulla superficie del conduttore.

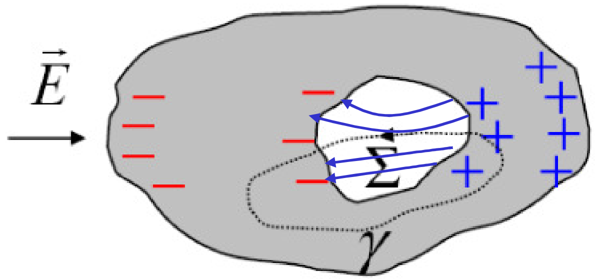


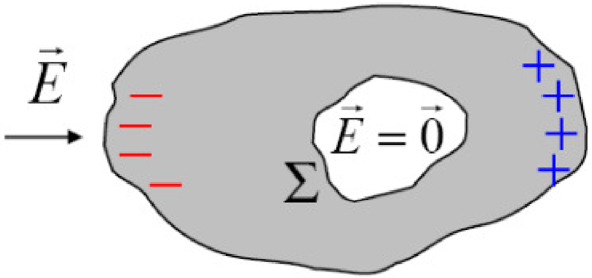
Conduttore cavo – schermo elettrostatico



In presenza di una cavità interna al conduttore, l'eventuale carica superficiale totale interna deve essere nulla …

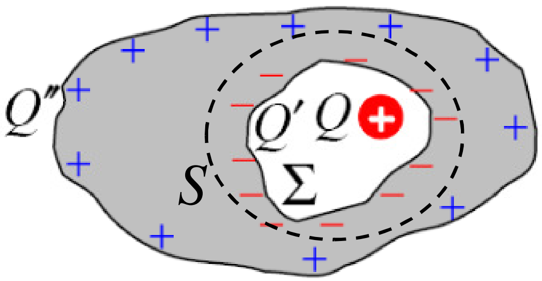
… ma il campo nella cavità sarebbe diverso da zero, e quindi la circuitazione lungo una linea chiusa come quella disegnata sarebbe diversa da zero…





… ma ciò contraddice il fatto che il campo elettrostatico è conservativo. Quindi non vi sono cariche sulla superficie interna e il campo è nullo anche nella cavità.

Conduttore cavo – schermo elettrostatico



In presenza di una carica Q interna alla cavità, viene indotta una carica totale sulla superficie interna Q' = -Q. Viene altresì indotta una carica superficiale esterna Q" = Q.

QuickTime Movie

Il campo elettrico all'interno del conduttore è sempre E = 0.

Eventuali cambiamenti di posizione della carica Q interna al conduttore, cambiano la distribuzione della carica Q' ma non alterano il campo all'interno del conduttore.

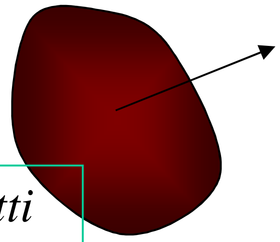
La distribuzione superficiale di Q" dipende quindi soltanto dalla geometria del conduttore e non dalla distribuzione delle cariche interne.

Un involucro metallico chiuso scherma sia l'interno dall'esterno sia l'esterno dall'interno.

Schermo elettrostatico
Gabbia di Faraday

Conduttori – altre proprietà

*Campo in un punto esterno molto vicino a un conduttore (**Teorema di Coulomb**)*



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

La superficie del conduttore è equipotenziale, infatti il campo elettrico sulla superficie deve essere perpendicolare alla stessa: se non lo fosse le sue componenti tangenti muoverebbero le cariche.

$$\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -dV = 0$$

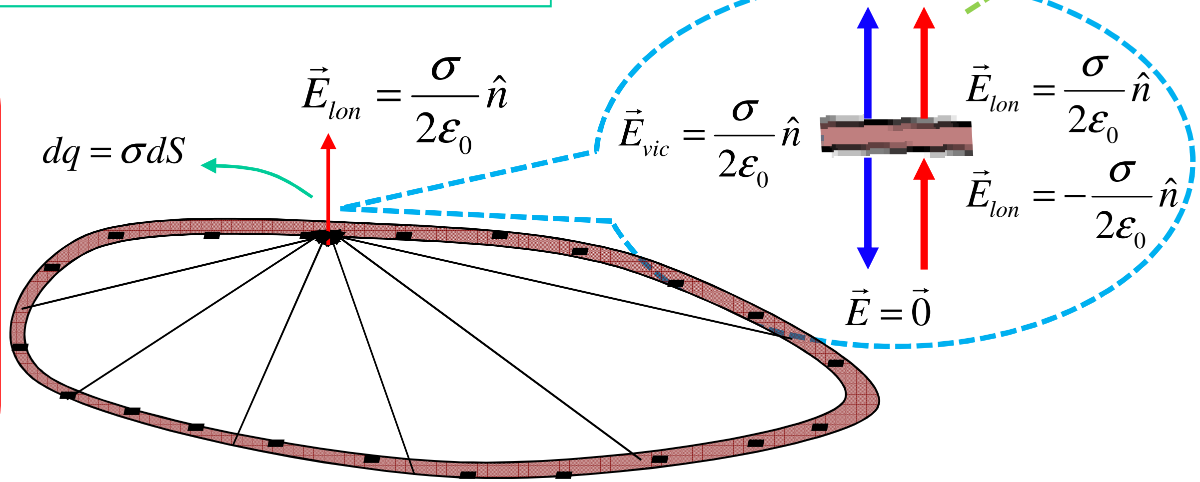
Per la stessa ragione, siccome dentro il volume E = 0 tutto il volume del conduttore è equipotenziale, con:

$$V_{vol} = V_{sup}$$

Pressione elettrostatica:

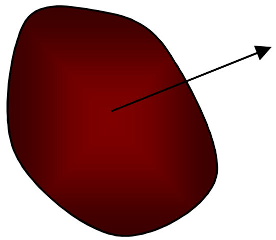
$$d\vec{F} = dq\vec{E}_{lon} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}dS\hat{n}$$

$$p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

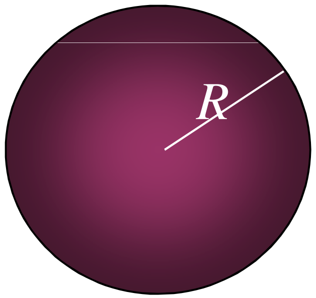


Conduttori – altre proprietà

*Campo in un punto esterno molto vicino a un conduttore (**Teorema di Coulomb**)*



$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}$$



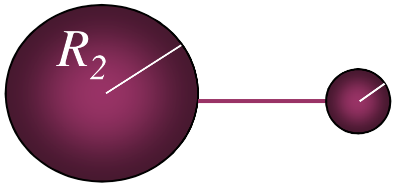
Campo nelle vicinanze di una sfera metallica di raggio R:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\hat{n}}$$

Conduttori – altre proprietà

Effetto punte

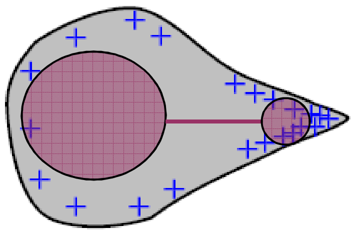
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$



$$V_1 = V_2$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2}$$

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \Rightarrow \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{R_2}{R_1}\sigma_2 > \sigma_2$$



Il campo elettrico ha maggiore intensità in corrispondenza del raggio di curvatura più piccolo. Per un conduttore generico, il campo ha intensità maggiore vicino alle zone più appuntite.

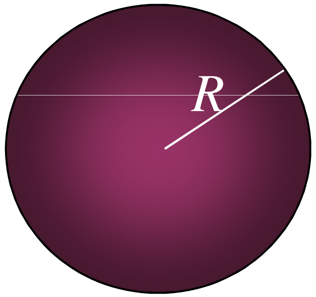
Proprietà dei conduttori – Riepilogo

1. ***Il campo elettrico all'interno di un conduttore è nullo.***
2. ***All'interno di un conduttore non vi possono essere cariche in eccesso . Se sul conduttore viene immessa una carica, essa si dispone sulla superficie.***
3. ***Non vi sono cariche sulla superficie interna di un conduttore cavo e il campo è nullo anche nella cavità.***
4. ***Sulla superficie di un conduttore il campo elettrico è diretto perpendicolarmente alla superficie stessa. Tutti i punti del conduttore, superficiali e interni, sono allo stesso potenziale elettrostatico.***
5. ***Un involucro metallico chiuso scherma sia l'interno dall'esterno che l'esterno dall'interno (gabbia di Faraday).***
6. ***Il campo in un punto esterno molto vicino a un conduttore vale*** $\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}$ ***(Teorema di Coulomb)***
7. ***La carica in eccesso in un conduttore ha densità maggiore nelle regioni che hanno minore raggio di curvatura. Sulle punte la densità è molto elevata (effetto punte).***
8. ***Le cariche superficiali subiscono una pressione elettrostatica*** $\boxed{p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$

Conduttori – potenziale e capacità

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} \begin{cases} \text{Dentro il conduttore } \vec{E} = \vec{0} \\ \\ \text{Fuori dal conduttore } \vec{E} \neq \vec{0} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *Due punti qualsiasi di un conduttore si trovano allo stesso potenziale*



Potenziale rispetto all'infinito di una sfera conduttrice con carica totale Q, scegliendo V(∞) = 0:

$$V(R) = V(\infty) + \int_R^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = \frac{Q}{C}$$

Il rapporto $\boxed{C = \frac{Q}{V}}$ *si chiama capacità, è definibile per ogni conduttore e dipende solo dalla geometria del conduttore.*

Nel caso della sfera suddetta $C = 4\pi\varepsilon_0 R$

NB.: V(R) rappresenta il lavoro necessario per portare una carica unitaria q = 1, dall'infinito alla superficie della sfera di raggio R.

Conduttori – potenziale e capacità

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

La proporzionalità tra la carica totale Q di un conduttore ed il suo potenziale elettrostatico risulta dall'osservazione sperimentale.

Lavoro necessario per caricare un conduttore sferico:

$$\left.\begin{array}{l} \delta L = dU = dqV(q) \\ V(q) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R} = \dfrac{q}{C} \end{array}\right\} \quad L = \int \delta L = \int_0^Q V(q)\,dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^Q q\,dq$$

$$\boxed{L = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}} \Rightarrow$$

Variazione dell'energia potenziale del sistema.

Vai a energia

L'unità di misura della capacità elettrica è il farad (F). 1F = 1C/1V.

Valori comuni di C sono espressi in μF (10^{-6}F) *o* pF (10^{-12}F).

Esempio: capacità elettrica della terra: C = 712 μF.

Conduttori – potenziale e capacità

Sistema di due o più conduttori

Dati n conduttori di forme e dimensioni arbitrarie e fisse, le rispettive cariche e potenziali sono legati da relazioni lineari.

$$Q_1 = \alpha_{11}V_1 + \alpha_{12}V_2 + \ldots + \alpha_{1n}V_n \qquad V_1 = \beta_{11}Q_1 + \beta_{12}Q_2 + \ldots + \beta_{1n}Q_n$$

$$Q_2 = \alpha_{21}V_1 + \alpha_{22}V_2 + \ldots + \alpha_{2n}V_n \qquad V_2 = \beta_{21}Q_1 + \beta_{22}Q_2 + \ldots + \beta_{2n}Q_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q_n = \alpha_{n1}V_1 + \alpha_{n2}V_2 + \ldots + \alpha_{nn}V_n \qquad V_n = \beta_{n1}Q_1 + \beta_{n2}Q_2 + \ldots + \beta_{nn}Q_n$$

I coefficienti α e β dipendono solo dalle forme e posizioni reciproche dei conduttori.

Conduttori – potenziale e capacità

Il condensatore

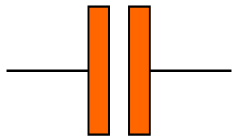
Un sistema di due conduttori con carica uguale e segno contrario prende il nome di Condensatore

$$V_1 = \beta_{11}Q - \beta_{12}Q \qquad \Delta V \equiv V_1 - V_2 = Q\left(\beta_{11} - \beta_{12} - \beta_{21} + \beta_{22}\right) = Q / C$$

$$V_2 = \beta_{21}Q - \beta_{22}Q \qquad C = \left(\beta_{11} - \beta_{12} - \beta_{21} + \beta_{22}\right)^{-1}$$

$$\boxed{C = \left|\frac{Q}{\Delta V}\right|} \Rightarrow$$

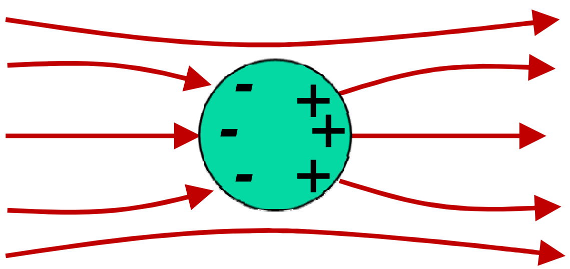
Capacità elettrica del condensatore

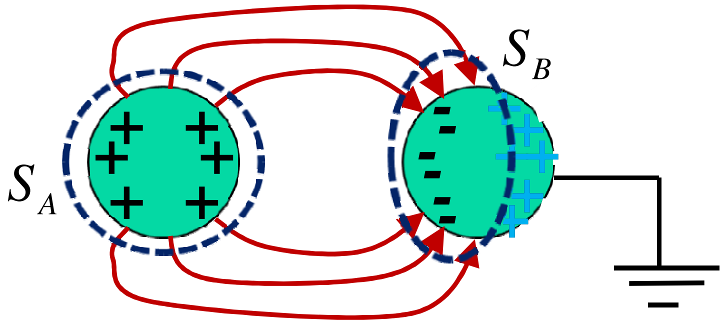


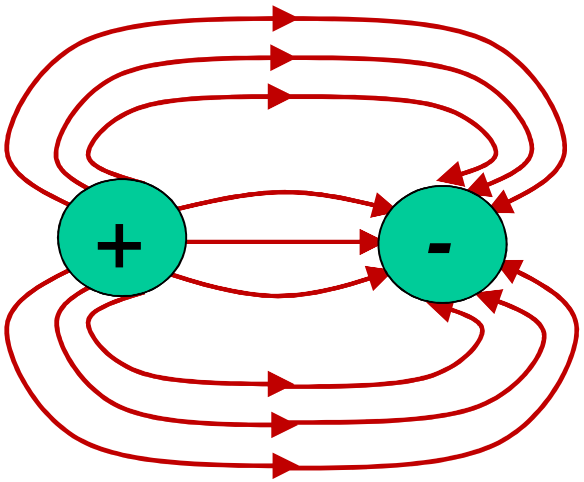
Tale situazione viene detta di "induzione completa".

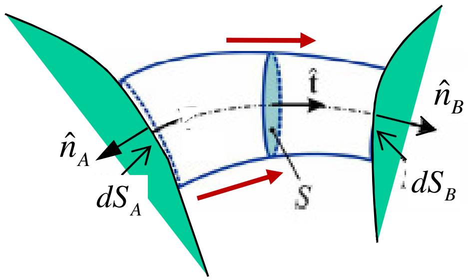
I due conduttori vengono chiamati "armature" del condensatore

Conduttori – Induzione elettrostatica









Legge di Gauss:

$$\vec{E}_A \cdot \hat{n}_A dS_A + \vec{E}_B \cdot \hat{n}_B dS_B = 0$$

$$\Rightarrow E_A dS_A = E_B dS_B$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}} \quad \Rightarrow \sigma_A dS_A = \sigma_B dS_B$$

$$\int_{S_A} \sigma_A dS_A = \int_{S_B} \sigma_B dS_B$$

$$\boxed{Q = -Q_{ind}}$$

Induzione completa

Condensatori

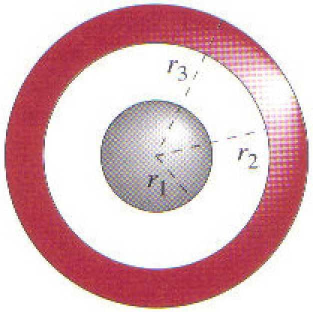


FIGURA 3-16
Condensatore sferico.

Condensatore sferico

$$V(r_1)-V(r_2)=\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\Delta V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right]$$

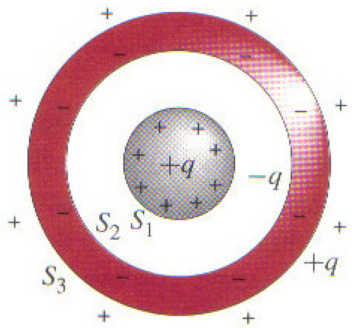


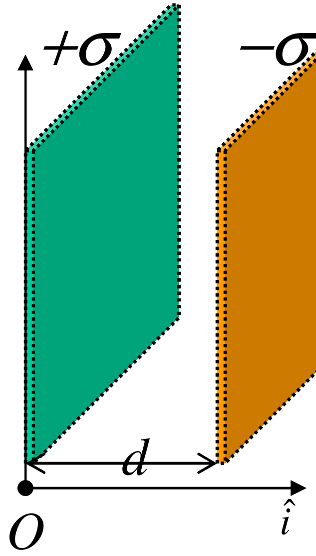
FIGURA 3-17
La carica q su S_1 induce la carica $-q$ su S_2 e q su S_3.

$$\Longrightarrow \boxed{C=\frac{q}{\Delta V}=4\pi\varepsilon_0\frac{r_1r_2}{r_2-r_1}}$$

$$\boxed{C\underset{r_1\to r_2}{\overset{\approx}{\lim}}\varepsilon_0\frac{S}{d}}$$

$$\boxed{C\underset{r_2\to\infty}{\overset{\approx}{\lim}}4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

Condensatori

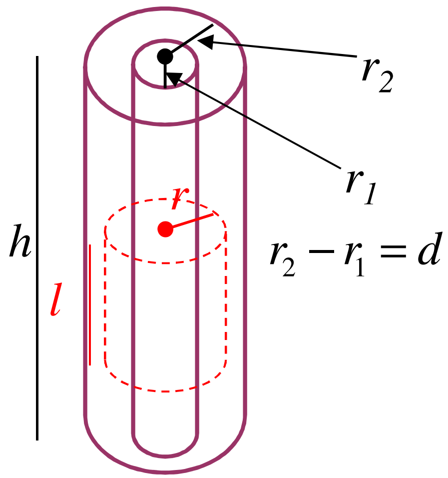


Condensatore piano

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \qquad \left.\begin{array}{l} C = \dfrac{q}{\Delta V} = \dfrac{q\varepsilon_0}{\sigma d} \\ q = \sigma S \end{array}\right\} \qquad \boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$$

Condensatore cilindrico

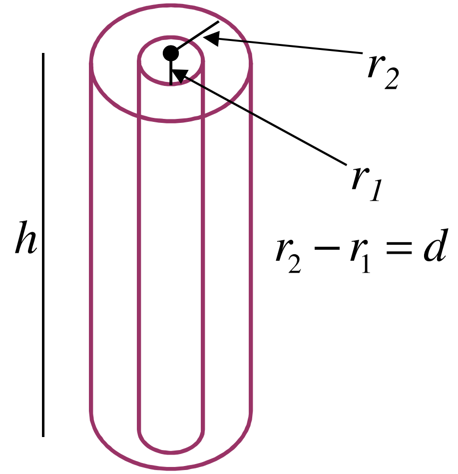
$$\left.\begin{array}{l} 2\pi r l E = 2\pi r_1 l \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ \sigma = \dfrac{q}{2\pi r_1 h} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\dfrac{1}{r} \\ E = \dfrac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{2\pi r_1}{r} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} \end{array}\right.$$



Condensatori

Condensatore cilindrico

$$V(r_1)-V(r_2)=\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\cdot d\vec{r} \qquad \vec{E}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{\hat{r}}{r}$$



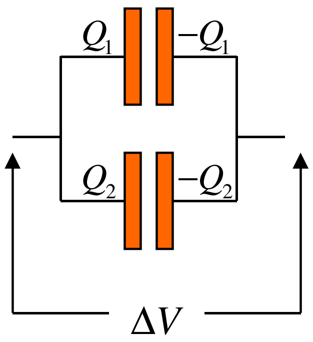
$$\Delta V=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{h}\ln\frac{r_2}{r_1} \qquad \boxed{C=\frac{q}{\Delta V}=\varepsilon_0\frac{2\pi h}{\ln\left(1+d/r_1\right)}}$$

$$\ln\left(1+\frac{d}{r_1}\right)=\frac{d}{r_1}+O\left(\frac{d}{r_1}\right)^2+\ldots \Longrightarrow \boxed{C\underset{\lim_{r_1\to r_2}}{\approx}\varepsilon_0\frac{2\pi r_1 h}{d}=\varepsilon_0\frac{S}{d}}$$

Sistemi di condensatori

$$C = \left| \frac{Q}{\Delta V} \right|$$

Collegamento in parallelo

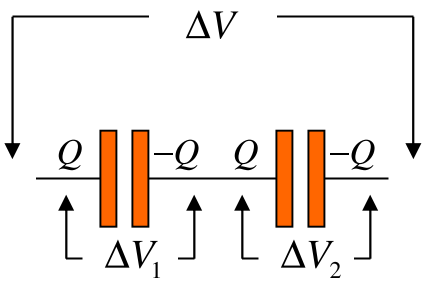


$$Q = Q_1 + Q_2 = \Delta V C_1 + \Delta V C_2 = \\ = \Delta V \left(C_1 + C_2\right) = \Delta V C$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{C = C_1 + C_2}$$

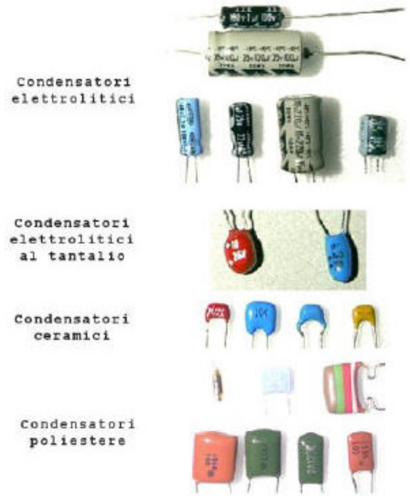
Collegamento in serie



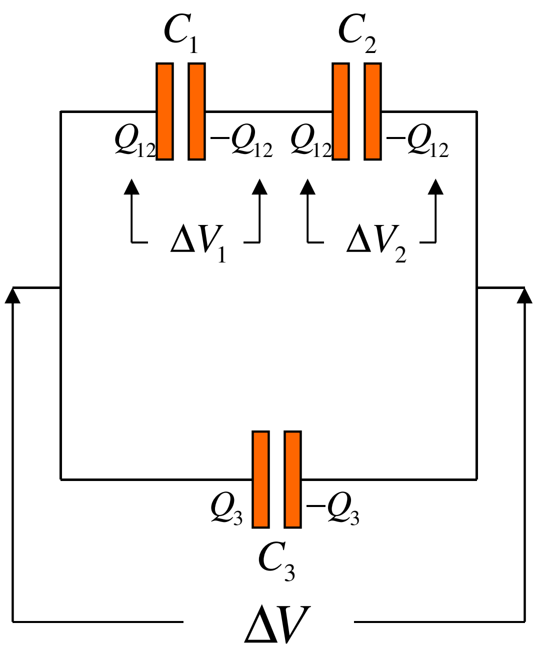
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = Q/C_1 + Q/C_2 = \\ = Q\left(1/C_1 + 1/C_2\right) = Q/C$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$$



Sistemi di condensatori



- Noti ΔV, C_1, C_2 e C_3, quanto valgono le restanti grandezze?

$$Q_1 = Q_2 = Q_{12}$$

$$Q = Q_{12} + Q_3$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3$$

$$Q = \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3 \right) \Delta V$$

$$\Delta V_{1(2)} = \frac{Q_{12}}{C_{1(2)}}$$

$$Q_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \Delta V$$

$$\Delta V_{1(2)} = \frac{C_{2(1)}}{C_1 + C_2} \Delta V$$

$$Q_3 = C_3 \Delta V$$

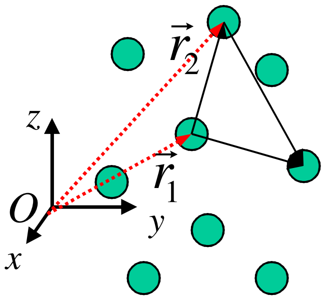
Energia elettrostatica

Energia potenziale di un sistema di cariche = lavoro fatto per costruirlo, portando ogni carica dall'infinito con una forza "esterna" rispetto a quella dovuta al campo elettrostatico prodotto dalle altre cariche.

$$\boxed{L_{\infty B}^{est} = q\left[V\left(\vec{r}_B\right) - V\left(\infty\right)\right]}$$

Vai a Cond. Sf.

$$L_1^{est} = 0$$



$$L_2^{est} = q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|} \qquad L_3^{est} = q_3 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\right|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right|} \right)$$

$$L_2^{est} + L_3^{est} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|} + \frac{q_1 q_3}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\right|} + \frac{q_2 q_3}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right|} \right)$$

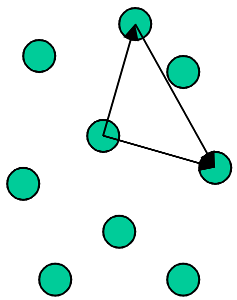
$$\boxed{L^{est} = U_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j \neq i = 1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}}$$

Energia elettrostatica

Distribuzione discreta di cariche puntiformi.

Perché delle cariche si possano considerare reciprocamente puntiformi occorre che la distanza relativa tra esse sia molto più grande delle dimensioni delle regioni in cui sono localizzate.

$$\boxed{L^{est} = U_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j\neq i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i=1}^{n} q_i V_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i=1}^{n} U_{ij}$$



$$\Longrightarrow \quad U_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j\neq i=1}^{n} V_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i\left(\vec{r}_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} U_i$$

$$\boxed{V_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}} \qquad \boxed{U_{ij} = q_i V_{ij}} \qquad \boxed{U_i = \sum_{j\neq i=1}^{n} U_{ij}} \qquad \boxed{U_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} U_i}$$

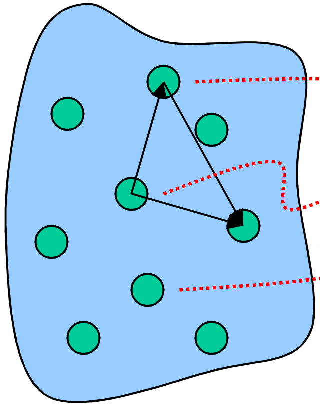
Energia elettrostatica

Distribuzione continua di cariche.

$$\boxed{L^{est} = U_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j\neq i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}}$$

$$U_E = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\left(\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}\,')\,dV'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}\right)dV$$

NB. !



$$dq = \rho(\vec{r})\,dV$$

$$\boxed{U_E = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})V(\vec{r})\,dV}$$

Se le cariche sono localizzate sulle superfici di un insieme di n conduttori:

$$U_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int \sigma_i(\vec{r})V_i(\vec{r})\,dS_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i\int \sigma_i(\vec{r})\,dS_i$$

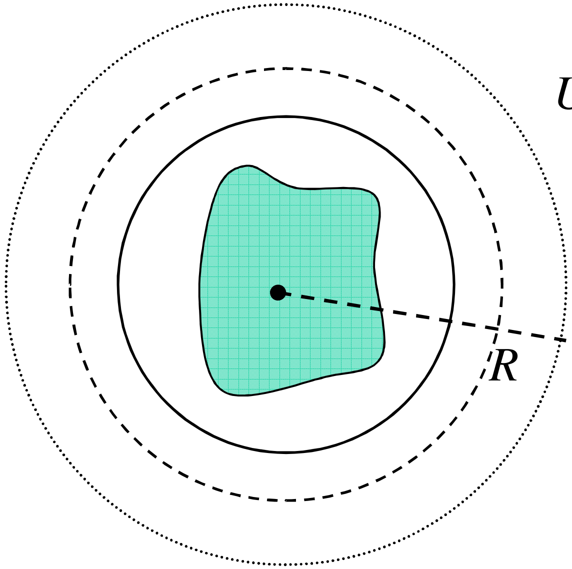
$$\boxed{U_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i Q_i}$$

Energia elettrostatica

$$\boxed{U_E = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})V(\vec{r})\,dV} \Longrightarrow U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r})V(\vec{r})\,dV$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}V\right] = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}V + \vec{E}\cdot\vec{\nabla}V = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}V - \vec{E}^2 \Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E}V = \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}V\right] + \vec{E}^2$$

$$U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}V\right]dV + \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V \vec{E}^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_S V\vec{E}\cdot d\vec{S} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V \vec{E}^2 dV$$



$$U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\int_{S\ sfera} V\vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{V\ sfera} \vec{E}^2 dV\right)$$

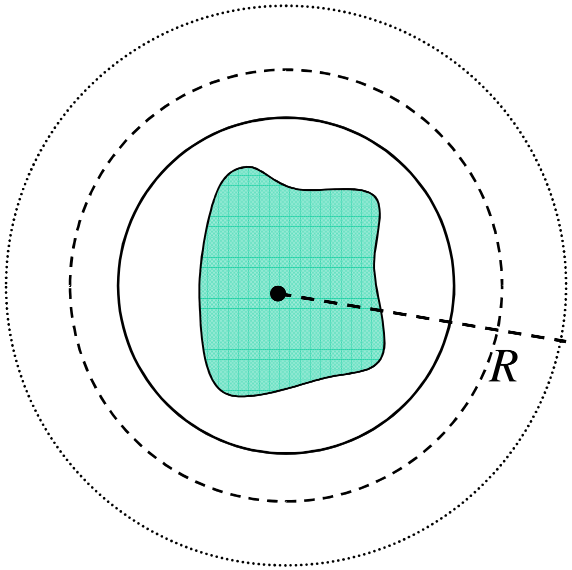
$$\left.\begin{aligned} S &= 4\pi R^2 \\ V &\propto R^{-1} \\ E &\propto R^{-2} \end{aligned}\right\} \quad \lim_{R\to\infty}\int_{S\ sfera} V\vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\boxed{U_E = \int_{Spazio} \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 dV}$$

Energia elettrostatica

$$U_E = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})V(\vec{r})\,dV$$

$$U_E = \int_{Spazio} \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 dV$$



$$\frac{dU_E}{dV} = u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$$

Densità di energia del campo elettrostatico

- *u_E sempre > 0 ?*
- *dove si trova fisicamente l'energia elettrostatica?*

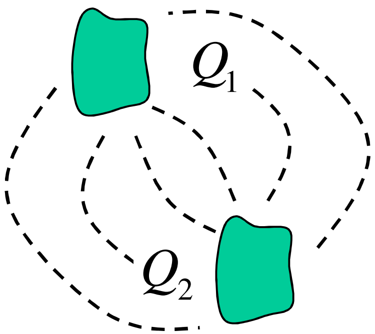
Energia elettrostatica

Distribuzione discreta v/s continua.

$$U_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j\neq i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}$$

Il concetto di carica puntiforme è fisicamente un paradosso:

Implica che una carica finita sia "contenuta" in uno spazio privo di dimensioni, cioè il punto.



Nel caso delle due cariche "puntiformi" rappresentate in figura:

$$U_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|} = Q_1 V_{Q_2}$$

U_E rappresenta l'energia di interazione o di "accoppiamento" tra la carica Q_1 e il campo generato dalla carica Q_2.

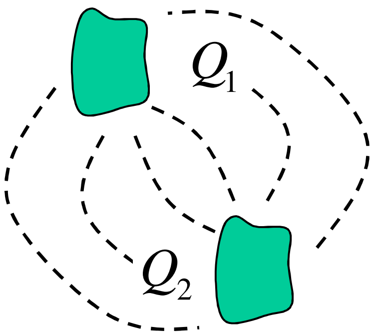
Energia elettrostatica

Distribuzione discreta v/s continua.

$$U_E = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\left(\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}\,')\,d\mathrm{V}'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)d\mathrm{V}$$

$$U_E = \int_{Spazio} \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 d\mathrm{V}$$

*Con questo formalismo non vi è paradosso: se d*V *tende a zero (punto) anche la carica in esso contenuta tende a zero.*



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad \Rightarrow \quad E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2$$

$$U_E = \int_{Spazio} \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}_1^2 d\mathrm{V} + \int_{Spazio} \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}_2^2 d\mathrm{V} + \int_{Spazio} \varepsilon_0\left(\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2\right)d\mathrm{V}$$

Autoenergia $\boxed{= U_{E1} + U_{E2} + U_{12}}$ *Energia di interazione (o di accoppiamento)* $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$

Energia elettrostatica

$$C = \left| \frac{Q}{\Delta V} \right|$$

Condensatore

Sia U_E = energia elettrostatica di un condensatore con carica Q.

$$U_E = \int \delta L = \int \Delta V(q)\, dq \qquad \Delta V(q) = \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad U_E = \int_0^Q \frac{q}{C} dq$$

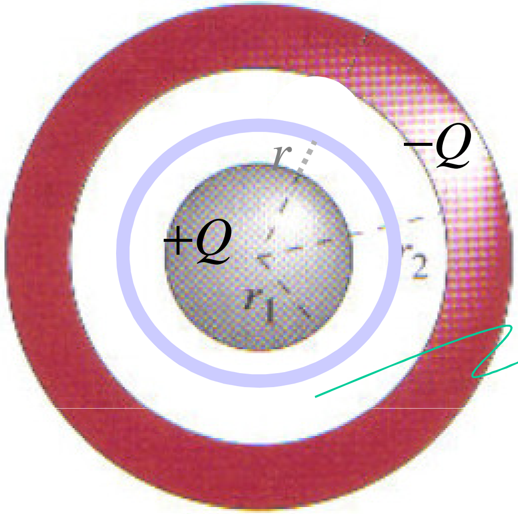
$$U_E = \frac{Q^2}{2C} \qquad U_E = \frac{C(\Delta V)^2}{2} \qquad U_E = \frac{1}{2} Q \Delta V \qquad U_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} V_i Q_i$$

Condensatore a facce piane parallele: $C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$

$$U_E = \varepsilon_0 \frac{S(\Delta V)^2}{2d} = \varepsilon_0 \frac{SE^2 d^2}{2d} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} Sd \quad \Longrightarrow \quad u_E = \frac{U_E}{Sd} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

Energia elettrostatica

Condensatore sferico



$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad u_E = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^4}$$

$$u_E dV = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^4}4\pi r^2 dr = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}dr$$

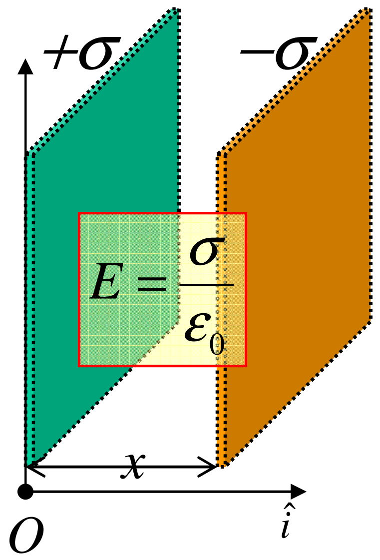
$$U_E = \int_V u_E dV = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr$$

$$U_E = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$U_E \xrightarrow[r_1 = R;\, r_2 \to \infty]{} \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Energia elettrostatica

Forza tra le armature di un condensatore



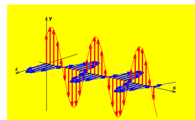
$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 x}{2\varepsilon_0 S} \qquad \vec{F}(x) = -\vec{\nabla} U_E = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2 x}{2\varepsilon_0 S}\right)\hat{i}$$

$$\boxed{\vec{F}(x) = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\hat{i}} \qquad \boxed{F = \frac{\varepsilon_0 S}{2x^2}(\Delta V)^2}$$

$$p = \frac{F}{S} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{p = \frac{|\sigma|}{2}E} \Leftarrow$$

Ha validità generale!

Pressione elettrostatica



Elettrostatica nei dielettrici

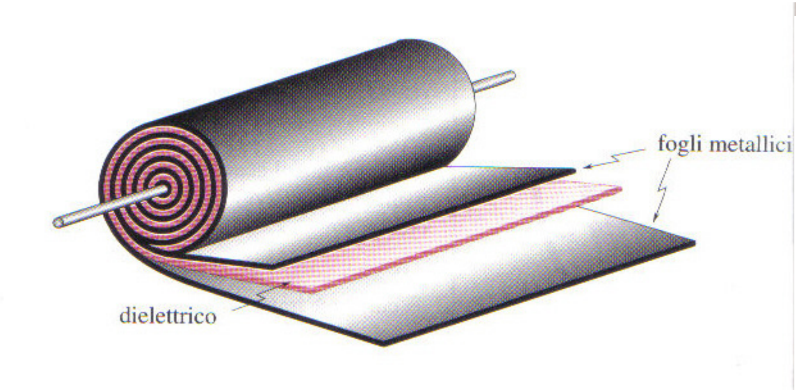
Sperimentalmente, quando si introduce un dielettrico fra le armature di un condensatore caricato con carica Q, aumenta la sua capacità e diminuisce la differenza di potenziale fra le sue armature.

$$C = \varepsilon_r C_0 \; ; \quad \Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\varepsilon_r C_0} = \frac{\Delta V_0}{\varepsilon_r}$$

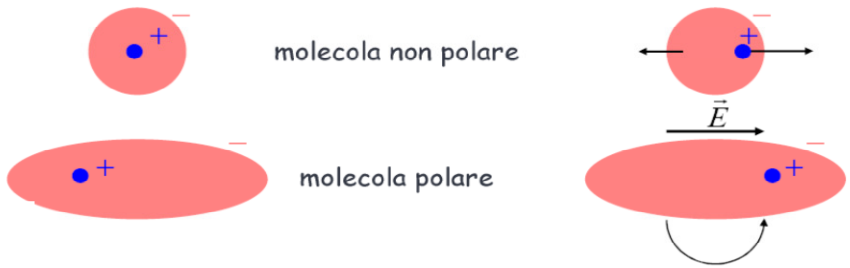
$\varepsilon_r > 1$ *è la costante dielettrica relativa (al vuoto) del materiale inserito.*

Per un condensatore a facce piane e parallele con dielettrico:

$$\boxed{C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$$



Elettrostatica nei dielettrici



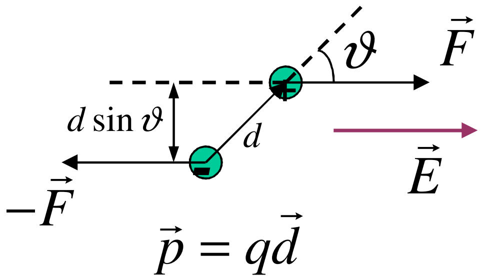
Polarizzazione del dielettrico:

- *per deformazione*
- *per orientamento*

Deformazione: coefficiente di polarizzabilità α. Alcune strutture anisotrope richiedono una descrizione mediante un tensore di polarizzabilità.

$$\boxed{\vec{P} = \alpha \vec{E}}$$

*Orientamento: possibile solo se le molecole possiedono un momento di dipolo intrinseco **p**.*



$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{d} \wedge q\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = \vec{p} \wedge \vec{E}}$$

Energia Potenziale del dipolo elettrico immerso in un campo elettrico omogeneo

$$U_E = qV_+ - qV_- = q\left(V_+ - V_-\right) = q\int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -qEd\cos\vartheta \qquad \boxed{U_E = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$

Elettrostatica nei dielettrici

*Dielettrico **normale**: lineare, omogeneo ed isotropo.*

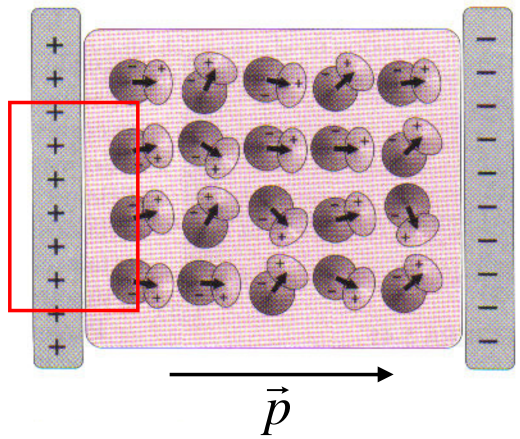
$$E = \frac{|\sigma| - |\sigma'|}{\varepsilon_0} = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \qquad |\sigma'| = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)|\sigma|$$

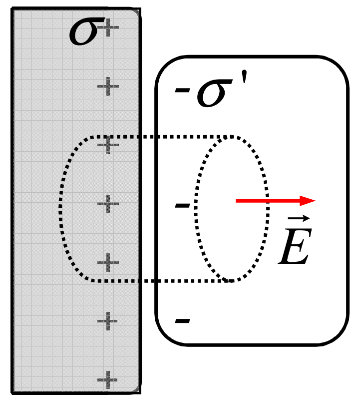
$$Suscettività: \quad \chi = \varepsilon_r - 1 \qquad |\sigma'| = \frac{\chi}{\varepsilon_r}|\sigma|$$

$$\vec{p} = |\sigma'|\, A d\, \hat{p} \qquad |\sigma'| = \chi \varepsilon_0 E$$

*Intensità di polarizzazione **P**:*

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} = |\sigma'|\,\hat{p} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}}$$



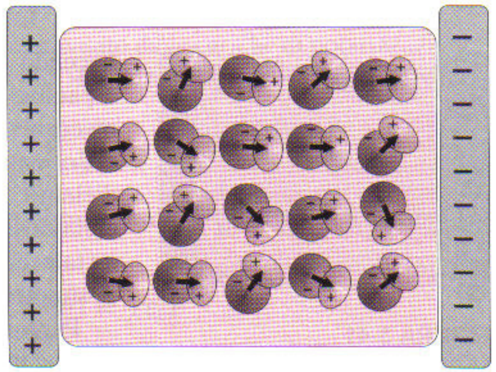


Elettrostatica nei dielettrici

Campo di induzione elettrica **D**:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

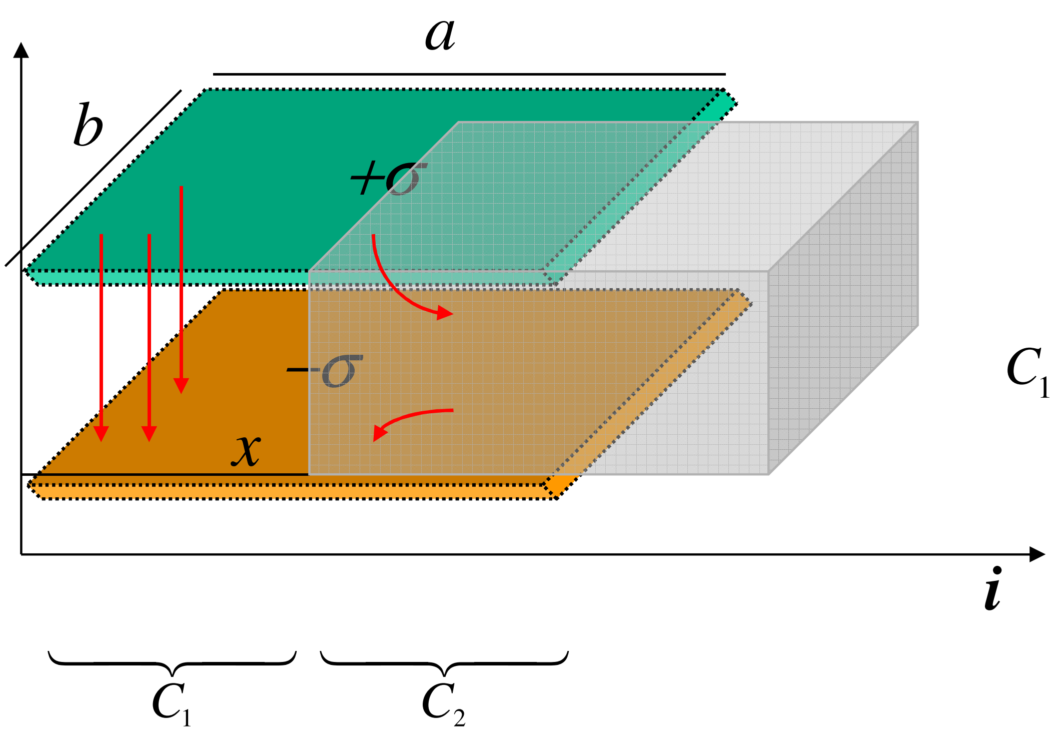
$$\left.\begin{array}{l} \vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} \\ \chi = \varepsilon_r - 1 \end{array}\right\} \begin{cases} D = \varepsilon_0 E (1+\chi) \\ D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = |\sigma| \end{cases}$$



-Il campo di induzione elettrica **D** *è collegato alle sole cariche libere, anche nei casi più generali di dielettrici non normali.*

- La definizione di **D** *qui sopra riportata rimane valida in generale, ma la relazione tra* **P** *ed* **E** *va ricavata sperimentalmente in quanto può dipendere dalla posizione* **r** *nel dielettrico, dal modulo di E e dalla temperatura. Se ci si limita ai materiali isotropi si può scrivere* $\boxed{\vec{P} = \chi(\vec{r}, E)\varepsilon_0 \vec{E}}$ *dove* χ *è la suscettività elettrica.*

Elettrostatica nei dielettrici



$$\boxed{C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$$

$$C = C_1 + C_2$$

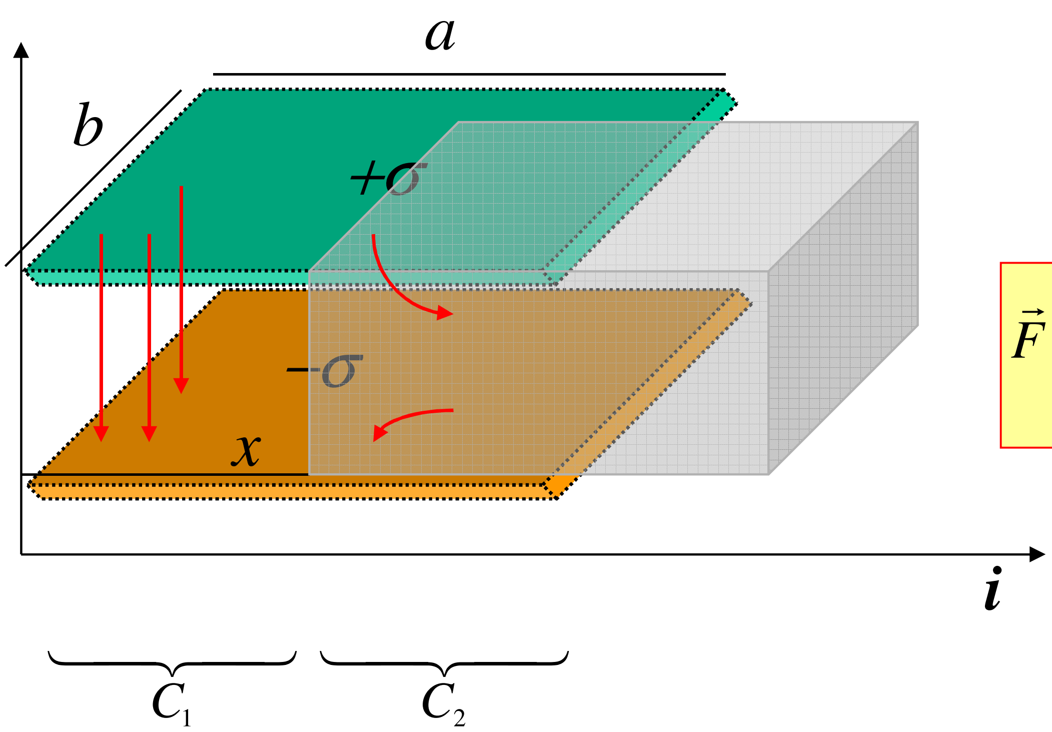
$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{xb}{d} \qquad C_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{(a-x)b}{d}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 b}{d}\left[x + \varepsilon_r (a-x)\right]$$

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b} \frac{1}{\left[x + \varepsilon_r (a-x)\right]}$$

$$\boxed{\vec{F}(x) = -\vec{\nabla} U_E = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b} \frac{1-\varepsilon_r}{\left[x + \varepsilon_r (a-x)\right]^2} \hat{i}}$$

Elettrostatica nei dielettrici



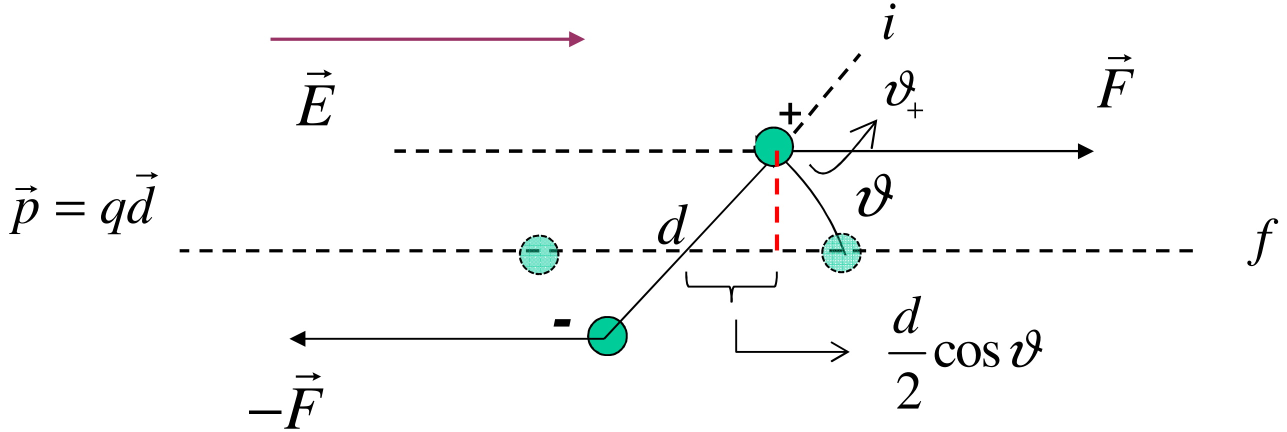
$$\vec{F}(x)=\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b}\frac{1-\varepsilon_r}{\left[x+\varepsilon_r(a-x)\right]^2}\hat{i}$$

$$\vec{F}(a)=\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b}\frac{1-\varepsilon_r}{a^2}\hat{i}$$

$$\vec{F}(0)=\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b}\frac{1-\varepsilon_r}{(\varepsilon_r a)^2}\hat{i}$$

Elettrostatica nei dielettrici

Dipolo in un campo elettrico stazionario e omogeneo: Energia riferita a $E_{min} = 0$



$$\Delta U_E^m = q\Delta V_+ - q\Delta V_- = q\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{\ell}_+ - q\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{\ell}_- = qE\left(\int_i^f \cos\vartheta_+ d\ell_+ - \int_i^f \cos\vartheta_- d\ell_-\right)$$

$$\Delta U_E^m = qE\left(\int_i^f dx_+ - \int_i^f dx_-\right) = qE\frac{d}{2}(1-\cos\vartheta) + qE\frac{d}{2}(1-\cos\vartheta) = qEd(1-\cos\vartheta)$$

$$\boxed{\Delta U_E^m = pE - \vec{p}\cdot\vec{E}} \qquad \boxed{U_E(\vartheta_1) - U_E(\vartheta_2) = pE(\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1)}$$