

Fisica Generale B

*Campo magnetico
stazionario*

Scuola di Ingegneria e Architettura

UNIBO – Cesena

Anno Accademico 2014 – 2015

Il magnetismo

Fenomeni magnetici noti da lungo tempo (Socrate, V secolo a. C.). Proprietà di alcuni ossidi di ferro (magnetite) di attrarre altri metalli. Uso della bussola dall'XI secolo.

Solo dal 1800 si capisce che fenomeni elettrici e magnetici sono collegati fra di loro.

I magneti sono dipoli ed è impossibile isolare i singoli poli: il monopolo magnetico (l'analogo della carica elettrica) a tutt'oggi sembra non esistere in natura.

*Per la descrizione della forza magnetica ci si avvale, ancora una volta, del concetto di campo (magnetico), identificato con la lettera **B**.*

*Il campo magnetico **B** è un campo vettoriale solenoidale. Esso infatti ha flusso nullo attraverso qualsiasi superficie chiusa, ed ha linee di campo chiuse. È quindi caratterizzato dall'equazione:*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Il magnetismo

*John Michell (25 dicembre 1724 – 29 aprile 1793):
 misure su aghi magnetici lunghi e sottili, con pendolo di torsione*



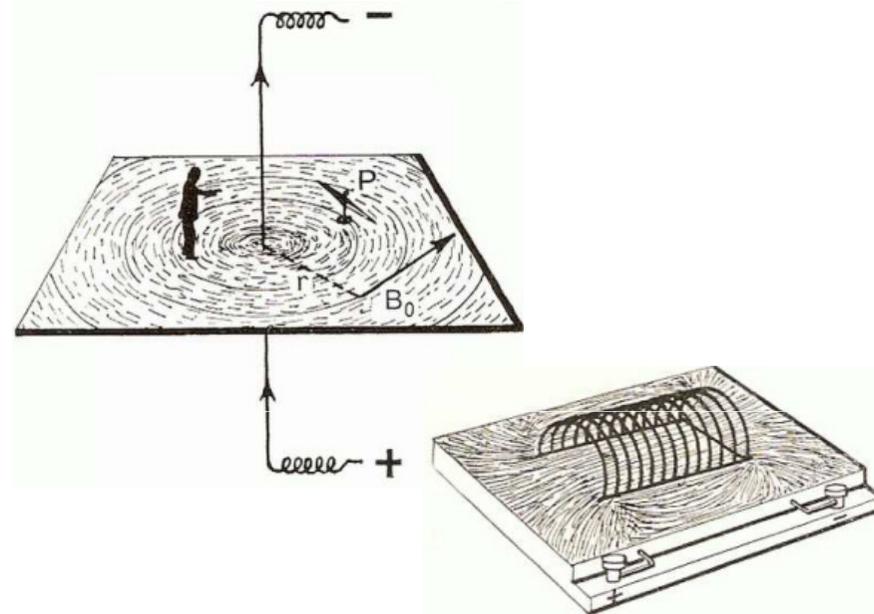
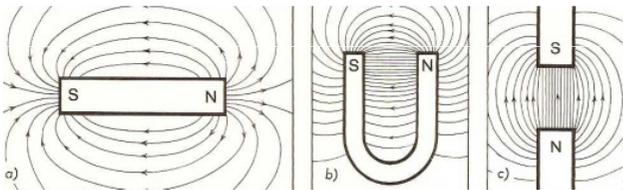
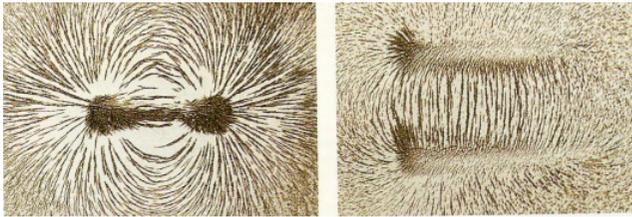
$$\vec{F}_{12} \propto \frac{p_1 p_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

*Forza tra poli (cariche) magnetici di forma
 simile a quella tra cariche elettriche, ma ...*

... non esistono le cariche magnetiche!



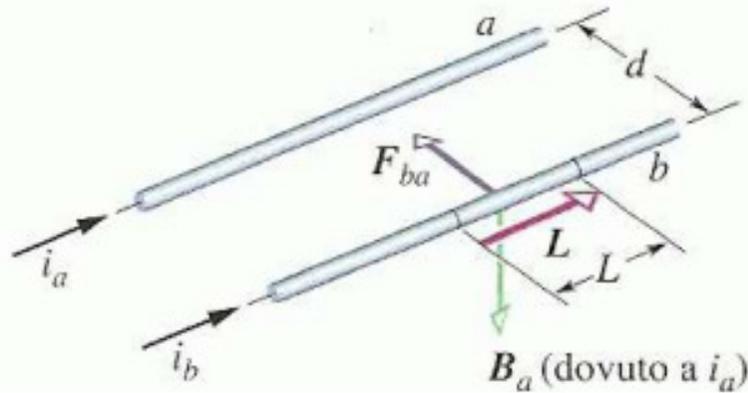
Campo magnetico e correnti elettriche



Il concetto di campo sembra particolarmente adatto a descrivere i fenomeni magnetici

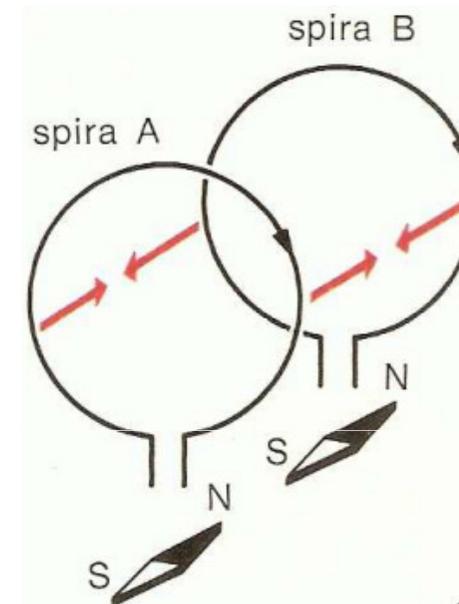
Anche le correnti elettriche producono campi magnetici?

Campo magnetico e correnti elettriche



Fili rettilinei paralleli (neutri!) percorsi da correnti, si attraggono se le correnti sono concordi, si respingono se discordi.

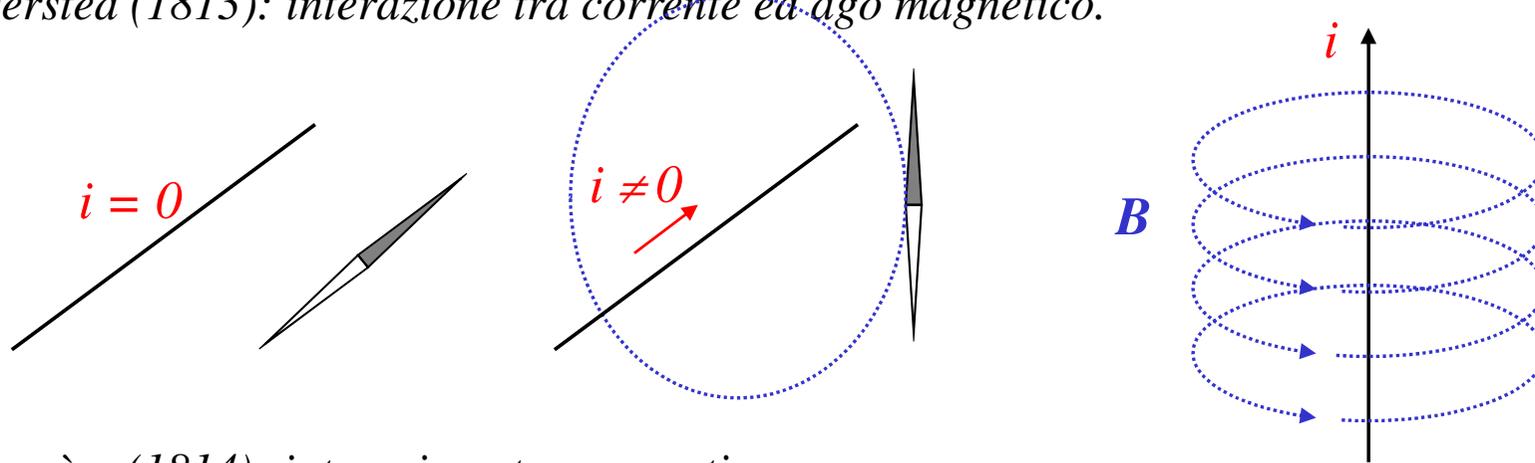
Anche le correnti generano campi magnetici



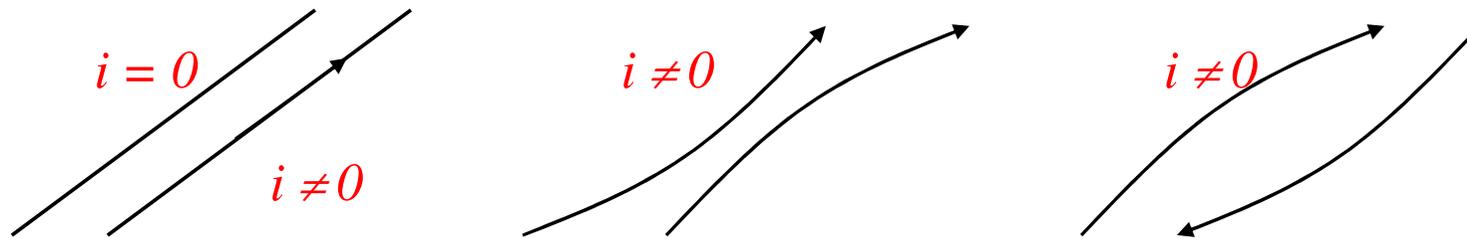
Spire percorse da corrente interagiscono fra di loro, e si comportano in modo simile agli aghi magnetici

Campo magnetico e correnti elettriche

Oersted (1813): interazione tra corrente ed ago magnetico.



Ampère (1814): interazione tra correnti.



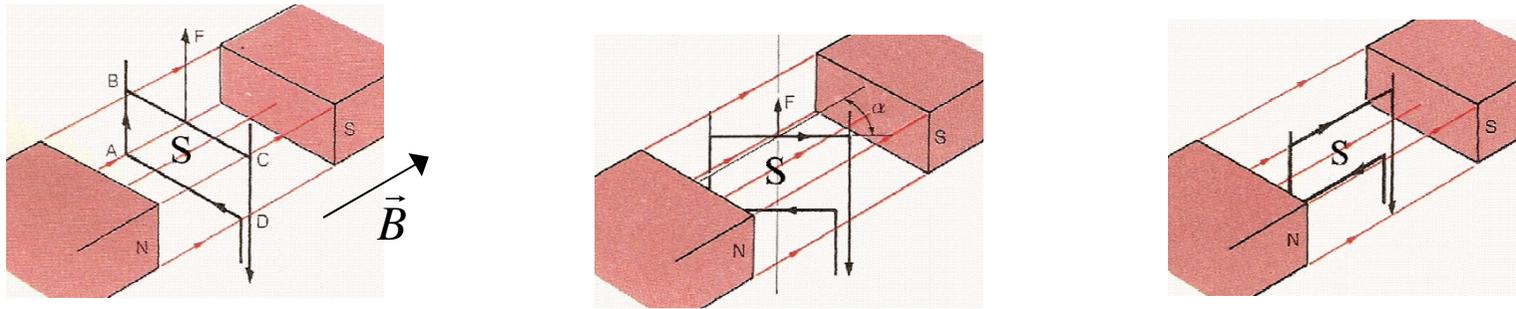
Biot e Savart (1820):

$$B \propto \frac{i}{r}$$

Campo magnetico e correnti elettriche

Gli esperimenti di Oersted e di Ampère permettono di determinare direzione e verso di \mathbf{B} .

Quanto vale il modulo di \mathbf{B} ?



Un filo rettilineo di lunghezza l percorso dalla corrente i in un campo magnetico \mathbf{B} è soggetto a una forza :

- *proporzionale a i ;*
- *proporzionale alla lunghezza l del filo;*
- *che dipende dall'orientamento del filo rispetto a \mathbf{B} : è nulla se $l \parallel \mathbf{B}$; è massima se $l \perp \mathbf{B}$.*
- *perpendicolare al piano individuato da \mathbf{B} e l .*



Definizione operativa

$$B = \frac{F_{\max}}{li}; \quad \vec{F} = i \vec{l} \wedge \vec{B}$$

$1 \text{ T (tesla)} = 1\text{N}/(\text{A}\cdot\text{m});$

$1 \text{ G (gauss)} = 10^{-4} \text{ T}$

Nikola Tesla (Smiljan 1856 – New York 1943)

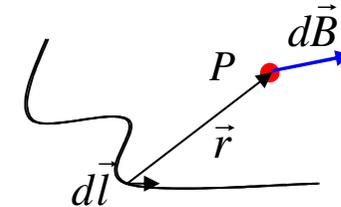
Leggi elementari di Laplace

Gli esperimenti di Biot e Savart e di Oersted sollecitano la seguente domanda:

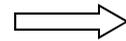
È possibile determinare \mathbf{B} a partire dalle grandezze caratteristiche di una corrente in un conduttore?

$$\left. \begin{aligned} B &= k \frac{i}{r} \\ B &= \frac{F_{\max}}{f(i)} \end{aligned} \right\} k = \frac{r F_{\max}}{i f(i)} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}} \quad \mu_0 \text{ (permeabilità magnetica del vuoto)} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2.$$

La precedente espressione, e le osservazioni su direzione e verso di \mathbf{B} , si possono ritrovare assumendo la seguente espressione per il campo $d\mathbf{B}$ in un punto \mathbf{P} dello spazio, dovuto ad un elemento infinitesimo $d\mathbf{l}$ di conduttore percorso da una corrente \mathbf{i} :



$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2}}$$



Per un circuito filiforme chiuso

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2}}$$

*Prima legge elementare di Laplace
(non verificabile sperimentalmente)*

*Legge di Ampère - Laplace
(verificabile sperimentalmente)*

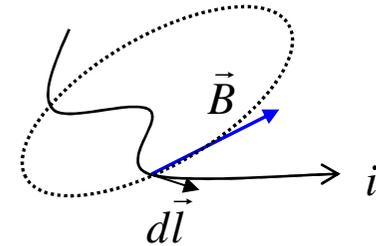
Leggi elementari di Laplace

Possiamo ora ragionare all'incontrario e, noto il campo \mathbf{B} in un punto P , chiederci:

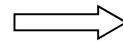
*È possibile determinare la forza dovuta a \mathbf{B}
agente su un conduttore percorso da corrente?*

(Sorgente \Rightarrow campo \Rightarrow accoppiamento)

Dalla definizione operativa applicata ad un tratto
di conduttore di lunghezza infinitesima $d\mathbf{l}$



$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$



Per un conduttore finito

$$\vec{F} = i \int_{\Gamma} d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Seconda legge elementare di Laplace

(non verificabile sperimentalmente)

(verificabile sperimentalmente)

Elettrostatica v/s Magnetostatica: Confronto basi sperimentali

Elettrostatica

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \hat{r}$$

$$d\vec{F}(\vec{r}) = \rho dV \vec{E}(\vec{r})$$

Legge di Coulomb

Magnetostatica

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2}$$

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Leggi di Laplace

Verso la forza di Lorentz

Forza complessiva che un circuito percorso dalla corrente i_1 esercita su un secondo circuito percorso dalla corrente i_2 :

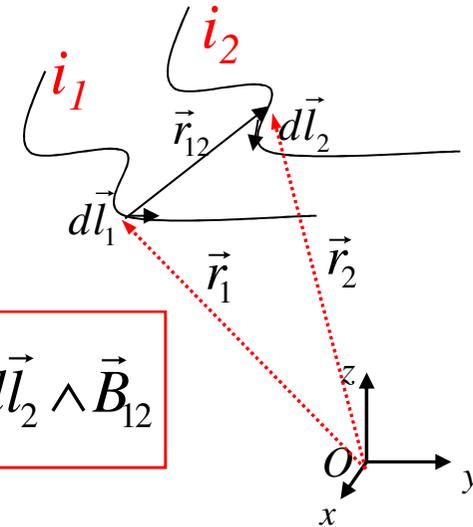
Leggi elementari di Laplace

$$\vec{B}_{12}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{l}_1 \wedge \hat{r}_{12}}{r_{12}^2}$$

$$\vec{F}_{12} = i_2 \oint_{\Gamma_2} d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_{12}$$

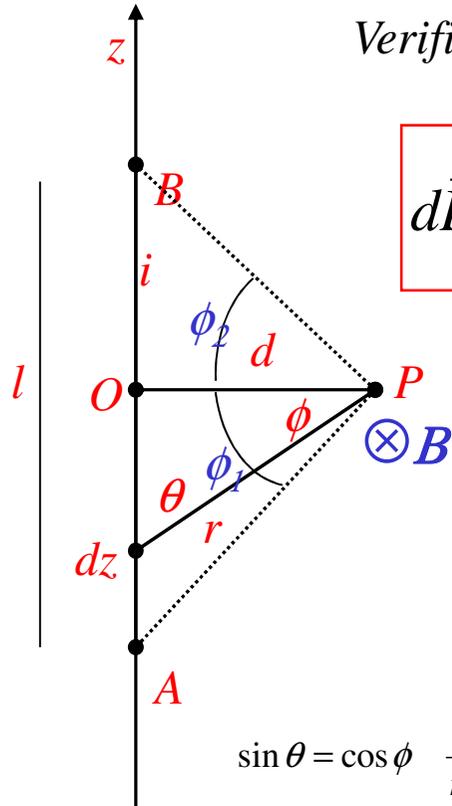
$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = i_2 \oint_{\Gamma_2} d\vec{l}_2 \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{l}_1 \wedge \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \right)$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{\Gamma_2} d\vec{l}_2 \wedge \left(\oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{l}_1 \wedge \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \right)$$



Verso la forza di Lorentz

Verifica prima legge elementare – legge di Biot e Savart



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dz \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos \phi}{d} d\phi$$

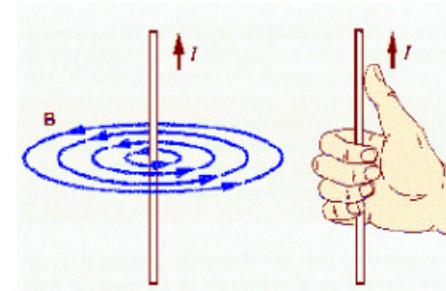
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \cos \phi d\phi \quad B = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} (\sin \phi_2 - \sin \phi_1)$$

Conduttore molto lungo, $|\phi_1| = |\phi_2| = |\phi| \rightarrow \pi/2$

$$\sin \theta = \cos \phi \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \phi}{d^2}$$

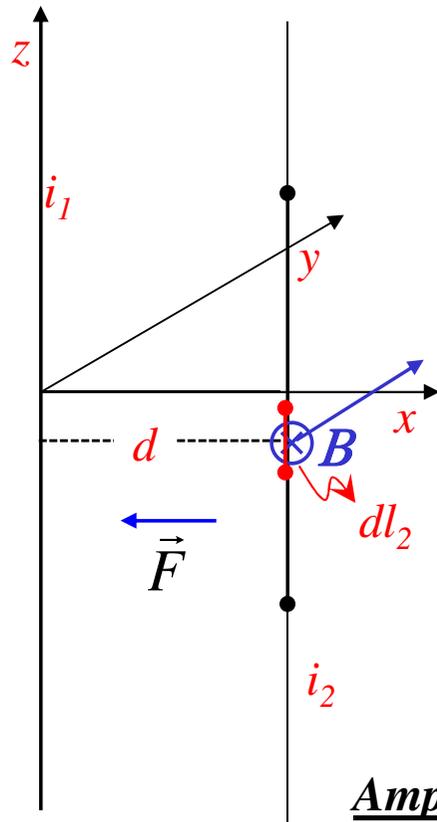
$$z = d \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \Rightarrow dz = \frac{d}{\cos^2 \phi} d\phi$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$$



Verso la forza di Lorentz

Interazione tra due fili paralleli percorsi dalle correnti i_1 e i_2 .



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \hat{j} \quad \vec{F}_{12} = i_2 \oint_{\Gamma_2} d\vec{l}_2 \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{l}_1 \wedge \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \right)$$

$$l \quad \vec{F}_{12} = i_2 \int_{-l/2}^{l/2} d\vec{l}_2 \wedge \left(\frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \hat{j} \right) = i_1 i_2 \frac{\mu_0}{2\pi d} \int_{-l/2}^{l/2} d\vec{l}_2 \wedge \hat{j}$$

$$\vec{F}_{12} = -i_1 i_2 \frac{\mu_0}{2\pi d} \int_{-l/2}^{l/2} \hat{i} dl_2$$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{l}{d} i_1 i_2 \hat{i}$$

Ampère: intensità della corrente che, circolando in due lunghi fili paralleli distanti 1 m l'uno dall'altro, produce su ciascuno di essi una forza per unità di lunghezza pari a 2×10^{-7} N/m (ciò affinché sia $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A²).

Verso la forza di Lorentz

Il campo \mathbf{B} è solenoidale

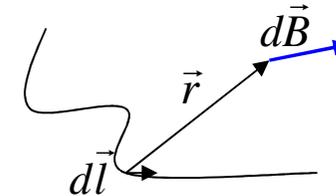
Aghi magnetici: Non essendo possibile separare i “monopoli” magnetici, lo spazio delimitato da una superficie chiusa immersa in un campo magnetico, se non è vuoto conterrà sempre almeno un dipolo magnetico.

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

Campi da correnti: il campo $d\mathbf{B}$ della prima legge di Laplace è solenoidale, quindi, per il principio di sovrapposizione, lo è ogni campo \mathbf{B} prodotto da correnti elettriche.

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2}}$$



$$\vec{\nabla} \cdot d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \left(\cancel{\vec{\nabla} \cdot d\vec{l}} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} - d\vec{l} \cdot \cancel{\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

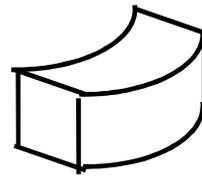
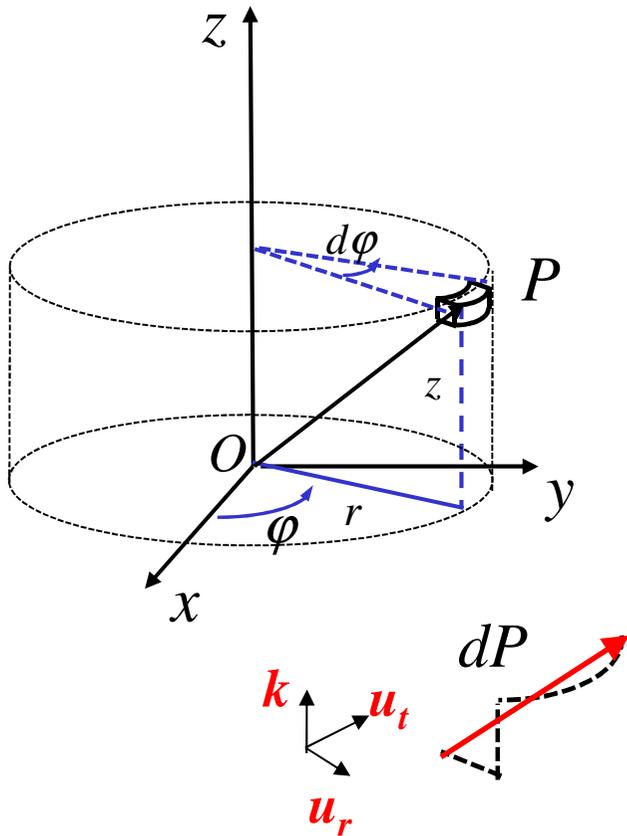
NB: la legge $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ discende dalla *prima legge elementare di Laplace* come la legge $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ deriva dalla *legge di Coulomb*.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{b} \quad \square$$

Differenziali in Coordinate Cilindriche

Volume infinitesimo $dV = dr ds_\varphi dz$

$$ds_\varphi = r d\varphi \quad dz = dz \quad dr = dr$$



$$dV = r dr d\varphi dz$$

Spostamento infinitesimo

$$dP = dr \hat{u}_r + dz \hat{k} + ds_\varphi \hat{u}_t$$

$$dP = dr \hat{u}_r + r d\varphi \hat{u}_t + dz \hat{k}$$

Verso la forza di Lorentz

Il campo \mathbf{B} è conservativo?

$$C_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{u}_t \quad d\vec{l} = dr \hat{u}_r + r d\varphi \hat{u}_t + dz \hat{k}$$

$$C_B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint \frac{1}{r} \hat{u}_t \cdot (dr \hat{u}_r + r d\varphi \hat{u}_t + dz \hat{k})$$

$$C_B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$C_B^{\Gamma_C} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} [(\varphi_1 + 2\pi) - \varphi_1]; \quad C_B^{\Gamma_C} = \mu_0 i$$

$$C_B^{\Gamma_{NC}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} [\varphi_1 - \varphi_1]; \quad C_B^{\Gamma_{NC}} = 0$$

$$C_B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{u}_t \quad d\vec{l} = dr \hat{u}_r + r d\varphi \hat{u}_t + dz \hat{k}$$

$$C_B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$C_B^{\Gamma_C} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} [(\varphi_1 + 2\pi) - \varphi_1]; \quad C_B^{\Gamma_C} = \mu_0 i$$

$$C_B^{\Gamma_{NC}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} [\varphi_1 - \varphi_1]; \quad C_B^{\Gamma_{NC}} = 0$$

Legge di Ampère

André-Marie Ampère (1775 – 1836)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^{con} i_k$$

\mathbf{B} non è conservativo

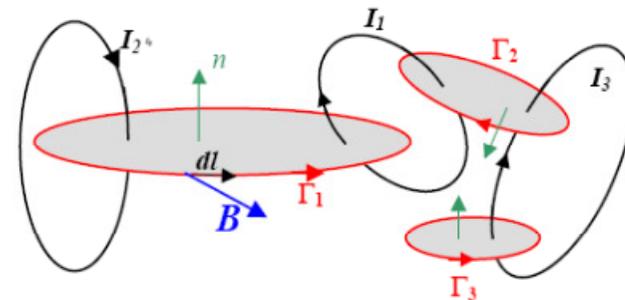
Verso la forza di Lorentz

La legge della circuitazione di Ampère ha validità generale?

Legge di Ampère: scelta una qualsiasi linea chiusa, alla circuitazione di B calcolata sulla stessa contribuiscono solo le correnti concatenate con la linea, anche se i conduttori nei quali circolano le correnti non sono rettilinei.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^{\text{con}} i_k$$

La generalizzazione è basata sul principio di sovrapposizione ed è verificata dall'esperienza.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Equazioni del campo magnetostatico

Riepilogo

Legge di Gauss

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Legge della circuitazione

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Forma integrale

Forma differenziale

Equazioni del campo elettrostatico

Riepilogo

Legge di Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_s}{\epsilon_0}$$

Forma integrale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Forma differenziale

Legge della circuitazione

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

Potenziale vettore

È possibile, in analogia con il campo elettrostatico, definire un potenziale che consenta una descrizione alternativa del campo magnetico?

Elettrostatica

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V} \quad + \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Magnetostatica

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}} \quad + \quad \boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

Potenziale vettore

Elettrostatica

$$\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Magnetostatica

$$\vec{\nabla}^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

$$\vec{\nabla}^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

$$\vec{\nabla}^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

Nella prima equazione sostituiamo V e ρ con due nuovi campi scalari, A₀ e J₀, moltiplicandola per √(μ₀ε₀) = 1/c (NB.: c è una costante universale e ha le dimensioni di una velocità):

$$\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} V = A_0; \quad \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \rho = \mu_0 \epsilon_0 c \rho = \mu_0 \epsilon_0 J_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2 A_0 = -\mu_0 J_0$$

$$\vec{\nabla}^2 \underline{A} = -\mu_0 \underline{J}$$

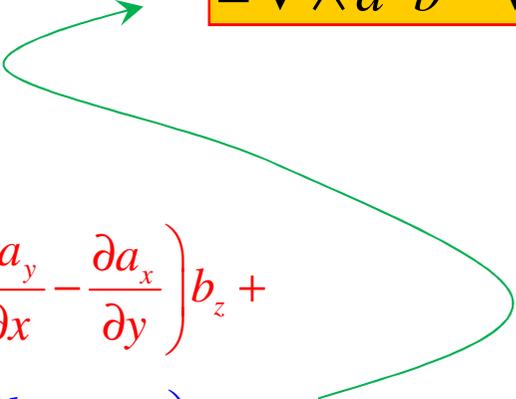
$\underline{A} \equiv (A_0, A_x, A_y, A_z)$ quadripotenziale
 $\underline{J} \equiv (J_0, J_x, J_y, J_z)$ quadricorrente

$$\vec{\nabla}^2 A_i = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2}$$



Vettori

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \wedge \vec{b} &= \frac{\partial}{\partial x} (a_y b_z - a_z b_y) + \frac{\partial}{\partial y} (a_z b_x - a_x b_z) + \frac{\partial}{\partial z} (a_x b_y - a_y b_x) \\
 &= \frac{\partial a_y}{\partial x} b_z + \frac{\partial b_z}{\partial x} a_y - \frac{\partial a_z}{\partial x} b_y - \frac{\partial b_y}{\partial x} a_z + \\
 &\quad + \frac{\partial a_z}{\partial y} b_x + \frac{\partial b_x}{\partial y} a_z - \frac{\partial a_x}{\partial y} b_z - \frac{\partial b_z}{\partial y} a_x + \\
 &\quad + \frac{\partial a_x}{\partial z} b_y + \frac{\partial b_y}{\partial z} a_x - \frac{\partial a_y}{\partial z} b_x - \frac{\partial b_x}{\partial z} a_y \\
 &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) b_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) b_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) b_z + \\
 &\quad - \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) a_x - \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) a_y - \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) a_z
 \end{aligned}$$

$$= \vec{\nabla} \wedge \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{\nabla} \wedge \vec{b} \cdot \vec{a}$$


Vettori

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\hat{r}}{r^2} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \cancel{\vec{\nabla} \wedge \vec{r}} \frac{1}{r^3} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^2} \right) \wedge \hat{r} = -2 \frac{1}{r^3} \hat{r} \wedge \hat{r} = 0$$

c.v.d.

