Fisica Generale B

Potenziale Vettore

Scuola di Ingegneria e Architettura

UNIBO – Cesena

Anno Accademico 2014 – 2015

Potenziale vettore

È possibile, in analogia con il campo elettrostatico, definire un potenziale che consenta una descrizione alternativa del campo magnetico?

Elettrostatica

$$\boxed{\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}=-\vec{\nabla}V} + \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Magnetostatica

$$se\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0} \Rightarrow \boxed{\vec{B}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}} + \boxed{\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_0\vec{J}} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{A}=\mu_0\vec{J}$$

Potenziale vettore

Com'è fatto il potenziale vettore?

$$\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$V(\vec{r},q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + k$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathrm{V}} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d\mathrm{V} + K$$

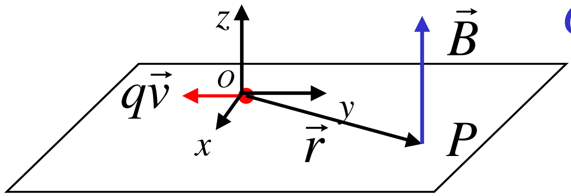
$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{A}(\vec{r},q) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{r} + \vec{C}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathrm{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d\mathrm{V} + \vec{C}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} \longrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla}\wedge\vec{C} = \vec{0} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \end{cases}$$

Potenziale vettore



Com'è fatto il potenziale vettore?

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \wedge \hat{r}}{r^2}}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{v}}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \wedge \frac{v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \wedge \frac{v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\boxed{\left(\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{v}}{r}\right)_x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_z}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_y}{r}\right) = \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial y}}\frac{1}{r} + v_z\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} - \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial z}}\frac{1}{r} - v_y\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} =$$

$$= \cancel{\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)}\frac{1}{r} + v_z\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} - v_y\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} = \cancel{\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}\right)_x}\frac{1}{r} \boxed{- \left(\vec{v} \wedge \vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)_x}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\frac{1}{r^n} = -\frac{n}{r^{n+1}}\hat{r}}$$

$$\boxed{\left(\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{v}}{r}\right) = \left(\vec{v} \wedge \frac{\hat{r}}{r^2}\right)}$$

Potenziale vettore

Com'è fatto il potenziale vettore?

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{B}(\vec{r},q) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \wedge \hat{r}}{r^2}$$

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{v}}{r}\right) = \left(\vec{v} \wedge \frac{\hat{r}}{r^2}\right)$$

$$\vec{B}(\vec{r},q) = \vec{\nabla} \wedge \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{A}(\vec{r},q) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{r} + \vec{C}; \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{C} = \vec{0}$$

$$V(\vec{r},q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + k$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A}$$

$$= \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} = \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{r} + \vec{C}\right)\right] - \vec{\nabla}^2\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{r} + \vec{C}\right)$$

*Si può scegliere **C** in modo che:*

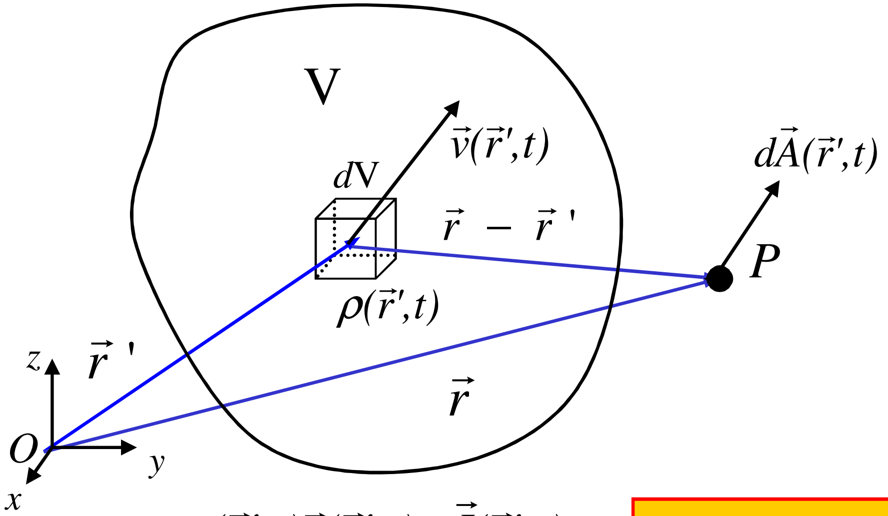
$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{r} + \vec{C}\right) = 0$$

e allora

$$\vec{\nabla}^2\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{r} + \vec{C}\right) = -\mu_0\vec{J}$$

Potenziale vettore

Com'è fatto il potenziale vettore dovuto a una distribuzione di cariche in movimento?



$$\rho(\vec{r}',t)\vec{v}(\vec{r}',t)=\vec{J}(\vec{r}',t)$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d\mathrm{V} + K}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d\mathrm{V} + \vec{C} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla}\wedge\vec{C} = \vec{0} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \end{cases}}$$