

Fisica Generale B

*Campo
elettromagnetico*

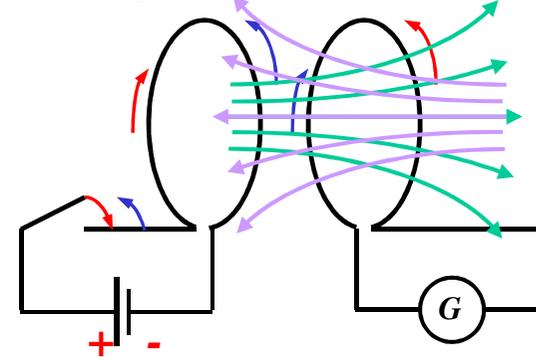
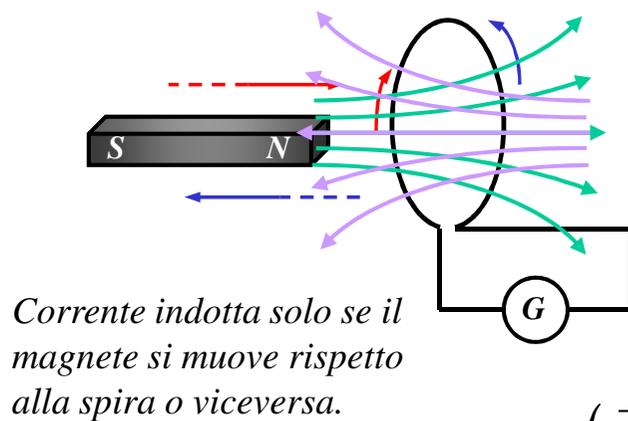
Scuola di Ingegneria e Architettura

UNIBO – Cesena

Anno Accademico 2014 – 2015

Induzione

Michael Faraday (1791 - 1867). Nel 1831 studia l'interazione tra spire e magneti e l'interazione tra spire.



Corrente indotta nella seconda spira solo nelle fasi transitorie di accensione e spegnimento della prima.

$$\phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Nel S.I., 1Wb = 1V. s = 1T.m²

Gli effetti osservati sono dovuti alla variazione nel tempo del flusso del campo magnetico concatenato con la spira, la quale produce una forza elettromotrice.

Il verso della corrente indotta è tale da generare un campo magnetico che si oppone alla variazione che l'ha prodotto ⇒ Legge di Lenz.

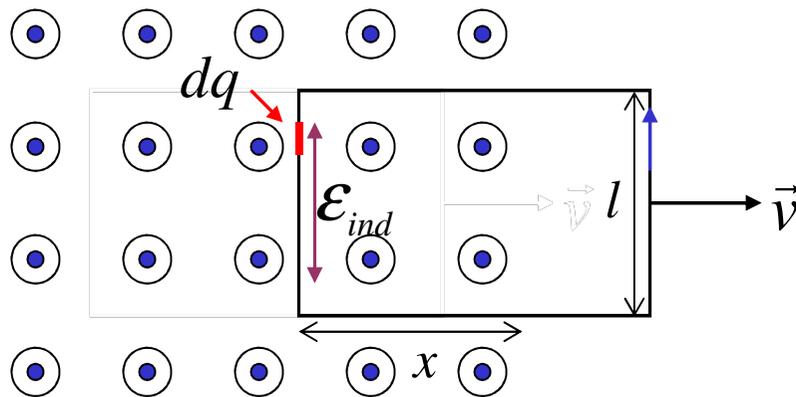
Legge di Faraday:

$$\mathcal{E}_{ind} = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

*Heinrich Lenz
(1804 – 1865)*

Induzione

Induzione dovuta al moto relativo – flusso tagliato



$$d\vec{F} = dq \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Forza elettromotrice “locale”:

$$d\vec{F} = dq \vec{E}_m \quad \vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

1. Forza elettromotrice complessiva: $\mathcal{E}_{ind} = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{r} = \oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{r} = vBl$

2. Flusso concatenato: $\varphi(\vec{B}) = \int_{lx} \vec{B} \cdot d\vec{S} = Blx$

$$\frac{d\varphi(\vec{B})}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = -Blv \quad \longrightarrow \quad \mathcal{E}_{ind} = \oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\varphi(\vec{B})}{dt}$$

Risultato di validità generale (per qualunque spira indeformabile e per ogni campo magnetico stazionario)

Induzione

Induzione dovuta al moto relativo – flusso tagliato

$$d\vec{F} = dq \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Forza elettromotrice “locale”:

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} \qquad \vec{E}_m = \pm \frac{a}{2} \omega B \sin \varphi \hat{k}$$

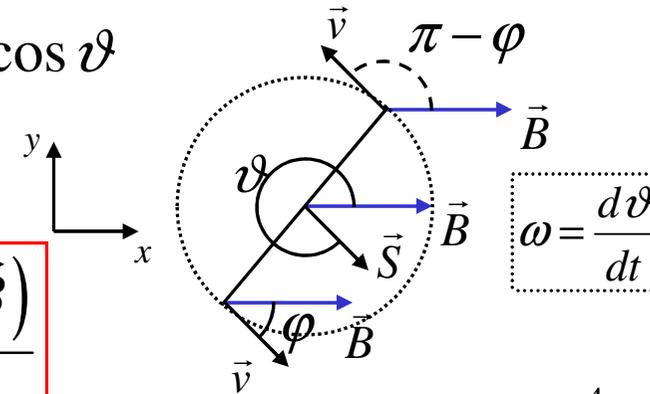
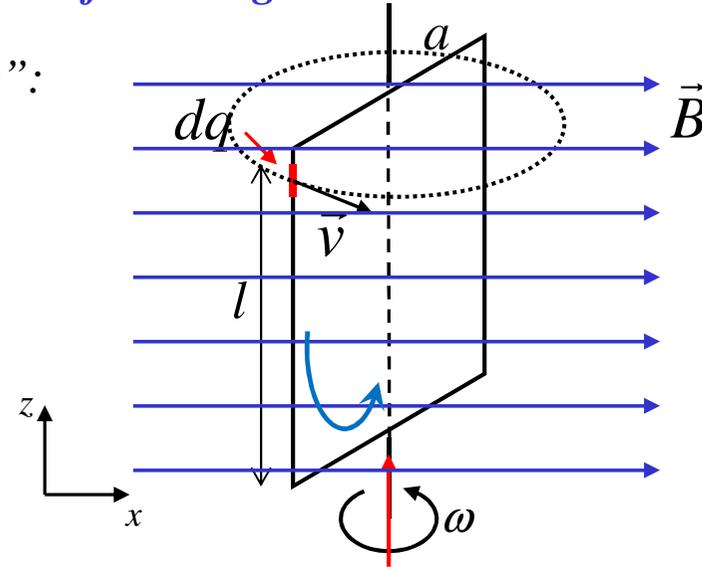
Forza elettromotrice complessiva:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ind} &= \oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{r} = \\ &= \frac{a}{2} \omega B \sin \varphi \hat{k} \cdot (-l\hat{k}) + \frac{a}{2} \omega B \sin \varphi (-\hat{k}) \cdot l\hat{k} \\ \mathcal{E}_{ind} &= -al\omega B \sin \varphi = \omega SB \sin \vartheta \end{aligned}$$

Flusso concatenato: $\varphi(\vec{B}) = \int_{la} \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos \vartheta$

$$\frac{d\varphi(\vec{B})}{dt} = -BS \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = -\omega BS \sin \vartheta$$

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\varphi(\vec{B})}{dt}$$



Induzione

Induzione dovuta al moto relativo – flusso tagliato

$d\vec{F} = dq \vec{v} \wedge \vec{B}$ Forza elettromotrice “locale”:

$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ $\vec{E}_m = \pm \frac{a}{2} \omega B \sin \varphi \hat{k}$

Forza elettromotrice complessiva:

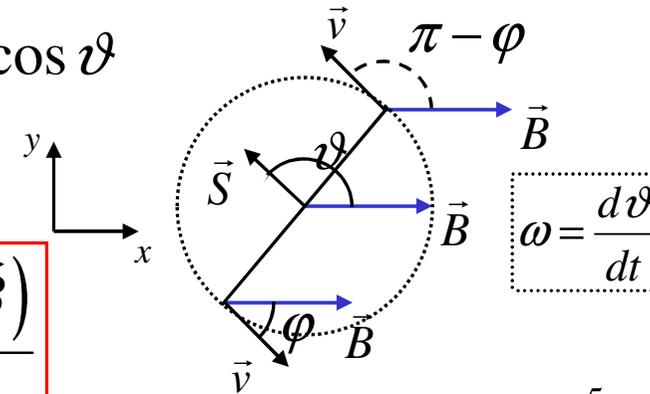
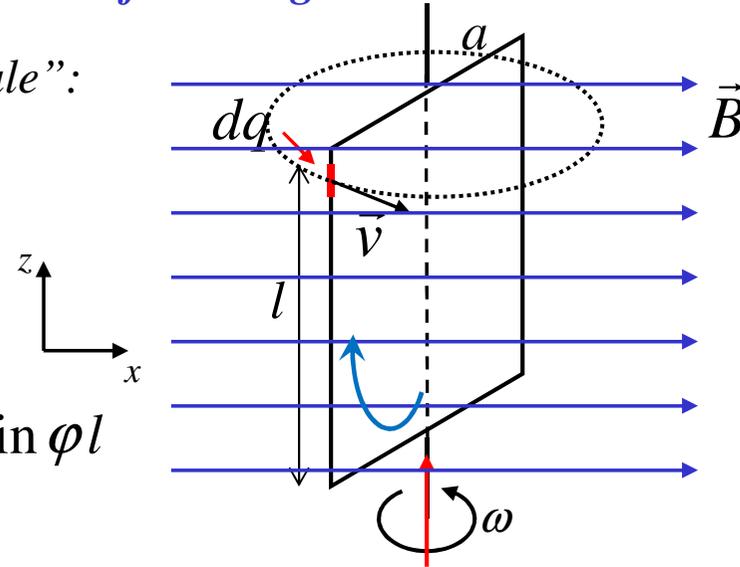
$\mathcal{E}_{ind} = \oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{a}{2} \omega B \sin \varphi l + \frac{a}{2} \omega B \sin \varphi l$

$\mathcal{E}_{ind} = \omega S B \sin \varphi = \omega S B \sin \vartheta$

Flusso concatenato: $\varphi(\vec{B}) = \int_{la} \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos \vartheta$

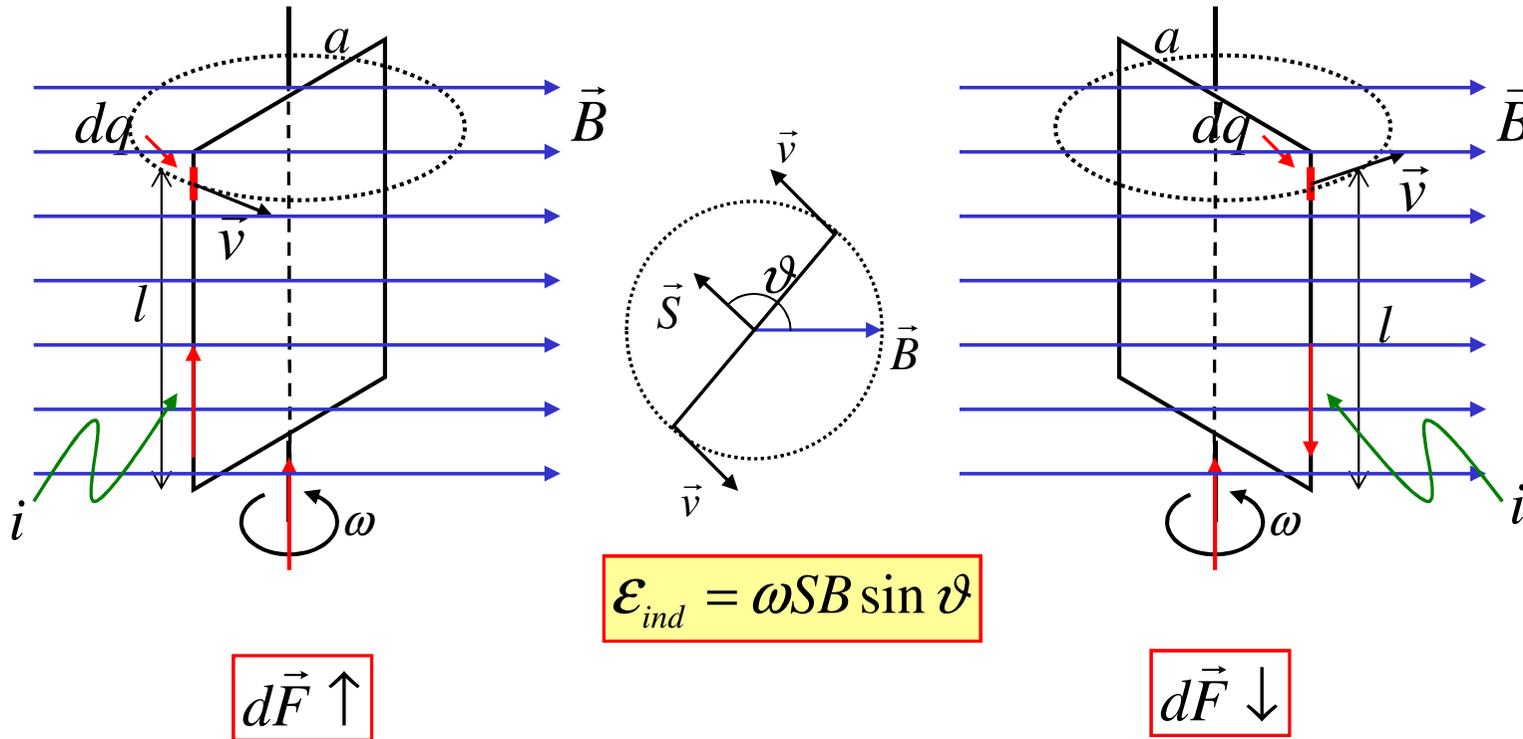
$\frac{d\varphi(\vec{B})}{dt} = -BS \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = -\omega BS \sin \vartheta$

$\mathcal{E}_{ind} = \oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\varphi(\vec{B})}{dt}$



Induzione

Induzione dovuta al moto relativo – flusso tagliato



Corrente alternata

Induzione

Induzione dovuta al moto relativo – flusso tagliato

$$\mathcal{E}_{ind} = \omega SB \sin \vartheta$$

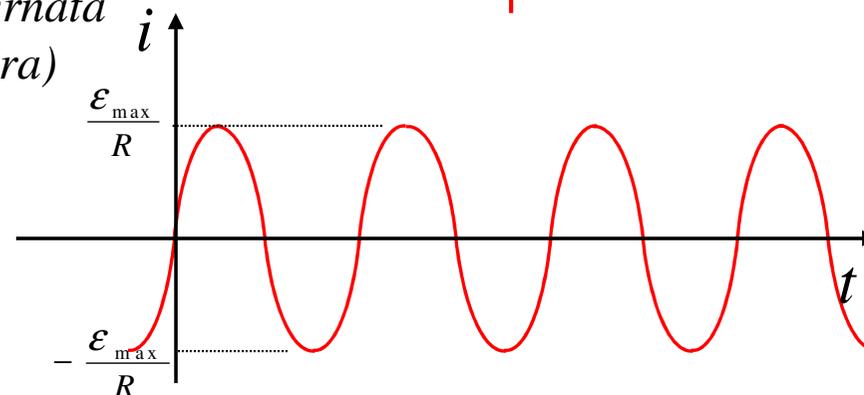
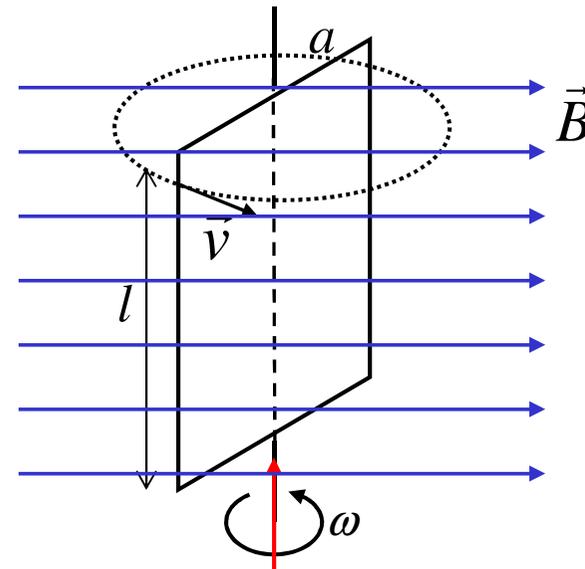
$$\mathcal{E}_{ind} = \omega \varphi_{max} \sin \vartheta = \mathcal{E}_{max} \sin \vartheta$$

Spira interrotta: f.e.m. agli estremi

$$\mathcal{E}_{ind} = \mathcal{E}_{max} \sin \omega t$$

*Spira non interrotta: corrente alternata
(R = resistenza elettrica della spira)*

$$i = \frac{\mathcal{E}_{max}}{R} \sin \omega t$$



Induzione

Induzione dovuta al moto relativo – flusso tagliato

Generatore di f.e.m. ; bilancio energetico

$$\mathcal{E}_{ind} = \mathcal{E}_{max} \sin \omega t$$

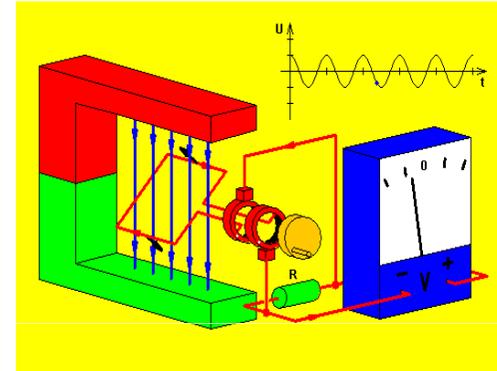
$$i = \frac{\mathcal{E}_{max}}{R} \sin \omega t$$

$$\mathcal{E}_{max} = \omega N S B;$$

$N = n^\circ$ di spire

$$\vec{m} = i S \hat{n}$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$



Per mantenere una velocità angolare costante occorre un momento esterno...

$$\vec{\mathcal{M}}_{ext} = -\vec{m} \wedge \vec{B}$$

... con momento assiale rispetto all'asse di rotazione

$$\mathcal{M}_{ext} = i S B \sin \omega t$$

Induzione

Induzione dovuta al moto relativo – flusso tagliato

Generatore di f.e.m. ; potenza esterna erogata

$$\left. \begin{aligned}
 \mathcal{M}_{ext} &= iSB \sin \omega t \\
 i &= \frac{\mathcal{E}_{max}}{R} \sin \omega t \\
 \mathcal{E}_{max} &= \omega SB
 \end{aligned} \right\} w_{ext} = \omega \mathcal{M}_{ext} = \frac{(SB\omega)^2}{R} \sin^2 \omega t$$

Potenza dissipata per effetto Joule:

$$w_J = Ri^2 = \frac{(SB\omega)^2}{R} \sin^2 \omega t$$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \frac{(SB\omega)^2}{R}$$

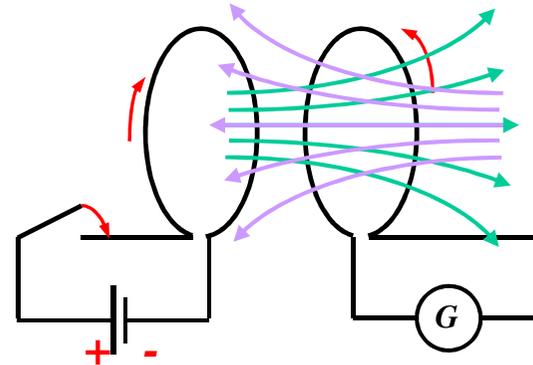
Induzione

Induzione di trasformazione

Spira immobile, campo magnetico variabile.

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\varphi(\vec{B})}{dt}$$

Nei casi esaminati in precedenza, la f. e. al primo membro della legge di Faraday è dovuta alla forza magnetica sulle cariche tenute in movimento grazie al lavoro esterno sul conduttore.



Ora invece il primo membro è conseguenza della variazione di flusso a secondo membro, e non associabile direttamente alla forza magnetica di Lorentz ...

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{r} = -\frac{d\varphi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

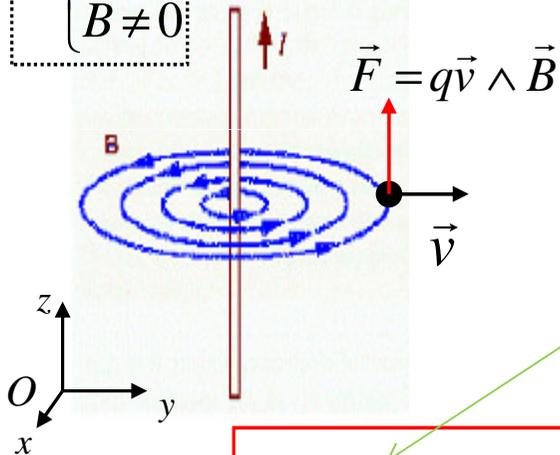
Induzione

Induzione di trasformazione

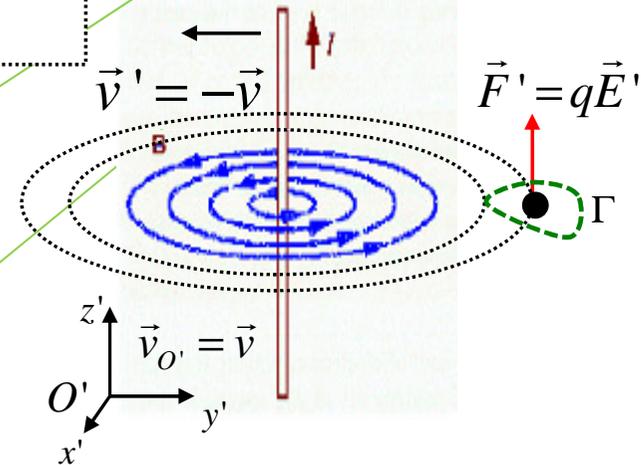
... se non attraverso il principio di relatività.

$$\mathcal{E}_{ind} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

$$O \begin{cases} \vec{E} = \vec{0} \\ \vec{B} \neq \vec{0} \end{cases}$$



$$O' \begin{cases} \vec{E}' = \vec{E}_i = \vec{v} \wedge \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} \end{cases}$$



$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_i \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_i = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

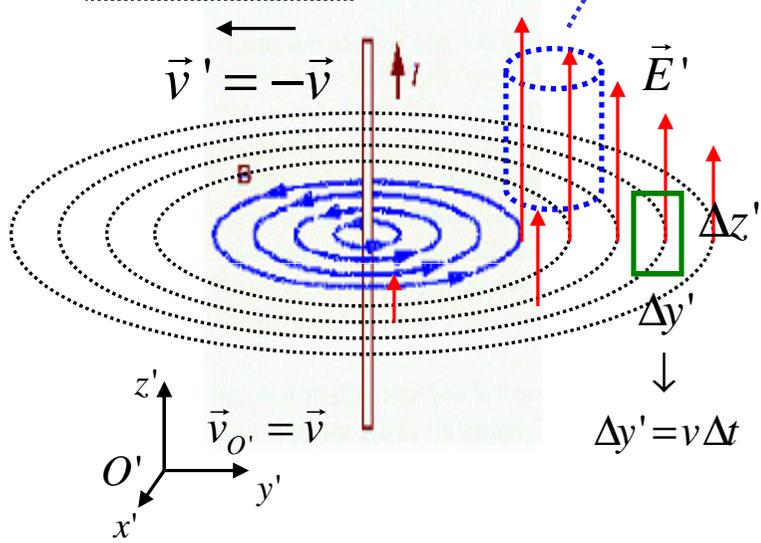
Induzione

$$O' \begin{cases} \vec{E}' = \vec{v} \wedge \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} \end{cases}$$

Induzione di trasformazione

$$\mathcal{E}_{ind} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}' = 0$$



$$\begin{aligned} \oint \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} &\approx \left[E'_z(x', y' + \frac{\Delta y'}{2}, z', t) - E'_z(x', y' - \frac{\Delta y'}{2}, z', t) \right] \Delta z' \\ &= \left[-B'_x(x', y' + \frac{\Delta y'}{2}, z', t) + B'_x(x', y' - \frac{\Delta y'}{2}, z', t) \right] v \Delta z' \\ &= - \left[B'_x(x', y' - \frac{\Delta y'}{2}, z', t + \Delta t) - B'_x(x', y' - \frac{\Delta y'}{2}, z', t) \right] \frac{\Delta y'}{\Delta t} \Delta z' \end{aligned}$$

$\lim_{\Delta y' \Delta z' \rightarrow 0}$

$$\frac{\oint \vec{E}' \cdot d\vec{\ell}}{dy' dz'} = - \left[B'_x(x', y' - \frac{dy'}{2}, z', t + dt) - B'_x(x', y' - \frac{dy'}{2}, z', t) \right] \frac{1}{dt}$$

$$\frac{\oint \vec{E}' \cdot d\vec{\ell}}{dy' dz'} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}')_x = - \frac{\partial B'_x}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E}' = - \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}$$

Rotore del campo elettrico

In generale, definendo il campo elettrico come $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$ si scrive

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Per una spira che trasla con velocità v in un campo magnetico B variabile:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ind} &= \oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{r} + \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \\ &= \oint \left[\vec{E} + (\vec{v} \wedge \vec{B}) \right] \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Induzione di movimento
Induzione di trasformazione

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Forza elettromagnetica

Mutua induzione – autoinduzione

È lecito calcolare campi e flussi variabili nel tempo con le equazioni valide per la magnetostatica (leggi di Laplace e di Ampère)?

La risposta è affermativa se ci si limita a variazioni non troppo rapide nel tempo ed a distanze non troppo grandi rispetto allo spazio interessato dalle sorgenti dei campi.

Per i mezzi lineari $\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \vec{f}_c(\vec{r})i \quad \square \parallel \quad \varphi(\vec{B}) = i \int_S \vec{f}_c(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = Mi$

Interazione fra due circuiti: $\varphi_2(\vec{B}_1) = M_{12}i_1 \quad \varphi_1(\vec{B}_2) = M_{21}i_2$

È dimostrabile che $M_{12} = M_{21} = M = \text{coefficiente di mutua induzione}$

$$\mathcal{E}_{ind} = - \frac{d\varphi(\vec{B})}{dt}$$



$$\mathcal{E}_i = -M \frac{di_k}{dt}$$

$$1\text{H(henry)} = 1\text{Wb/1A}$$

Mutua induzione – autoinduzione

Se in un circuito varia l'intensità di corrente, varia il flusso magnetico concatenato con il circuito stesso. Si definisce un **coefficiente di autoinduzione L (induttanza)**.

$$\varphi(\vec{B}) = Li$$

La variazione di corrente nel circuito genera una f.e.m. nel circuito stesso, che si oppone alla variazione che l'ha generata e che è legata a questa dalla relazione:

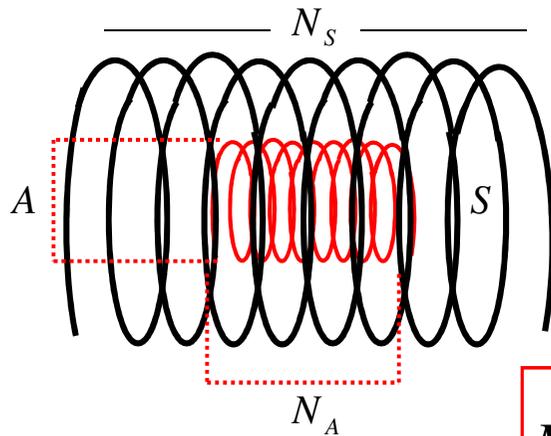
$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$$

In generale, la f.e.m. indotta su un circuito percorso dalla corrente variabile i_1 , in prossimità di un secondo circuito percorso dalla corrente variabile i_2 , è data da:

$$\mathcal{E}_1 = -L \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

Mutua induzione – autoinduzione

Mutua induzione – solenoidi coassiali



$$B_S = \mu_0 i_S \frac{N_S}{l_S}$$

$$N_A A B_S = M i_S$$

$$M = \mu_0 \frac{A N_A N_S}{l_S}$$

$$\varphi_A(\vec{B}_S) = M i_S$$

$$N_A A \mu_0 i_S \frac{N_S}{l_S} = M i_S$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_A(\vec{B}_S) = \mu_0 \frac{A N_A N_S}{l_S} i_S \\ \varphi_S(\vec{B}_A) = \mu_0 \frac{A N_A N_S}{l_S} i_A \end{array} \right.$$

Autoinduzione – solenoide molto lungo

$$B_S = \mu_0 i_S \frac{N_S}{l_S}$$

$$\varphi(\vec{B}_S) = L i_S$$

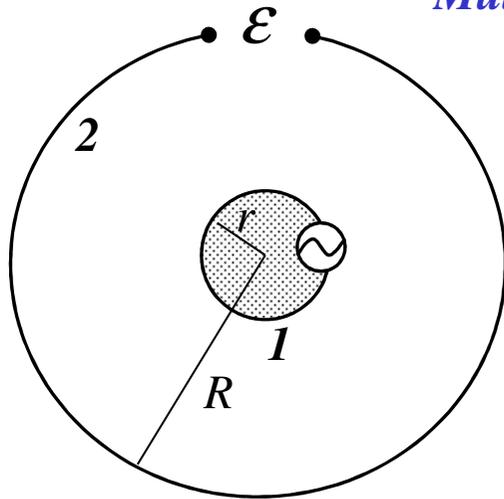
$$N_S S B_S = L i_S$$

$$N_S S \mu_0 i_S \frac{N_S}{l_S} = L i_S$$

$$L = \mu_0 \frac{S N_S^2}{l_S}$$

Mutua induzione – autoinduzione

Mutua induzione – spire concentriche



Data la corrente $i_1 = i_0 \sin(\omega t)$ si vuole calcolare ϵ

$$B_2 \approx \frac{\mu_0 i_2}{2R} \quad \varphi_1(\vec{B}_2) = M i_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2R} \pi r^2$$

$$M = \mu_0 \frac{\pi r^2}{2R}$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= - \frac{d\varphi_2(\vec{B}_1)}{dt} \\ \varphi_2(\vec{B}_1) &= M i_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\epsilon = -M \frac{di_1}{dt}$$

$$\epsilon = -\mu_0 \frac{\pi r^2}{2R} i_0 \omega \cos(\omega t)$$

Mutua induzione – autoinduzione

Alcune induttanze

Induttanza di N spire di un solenoide:

$$L = \mu_0 \frac{SN^2}{l}$$

Induttanza per unità di lunghezza di due conduttori paralleli di raggio R distanti d l'uno dall'altro, con correnti *i* opposte (trascurando il flusso interno ai conduttori).

$$L \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d - R}{R}$$

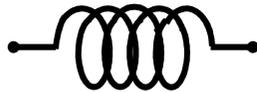
Induttanza di un toro a sezione quadrata di lato a , di raggio interno r_i .

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} N^2 a \ln \frac{r_i + a}{r_i}$$

Induttanza per unità di lunghezza di un cavo coassiale con conduttori di raggio $r_1 < r_2$.

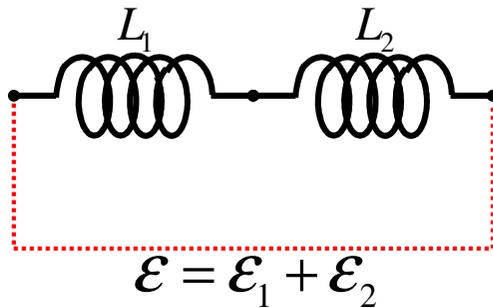
$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Sistemi di induttanze



Rappresentazione simbolica nei circuiti.

Induttanze in serie



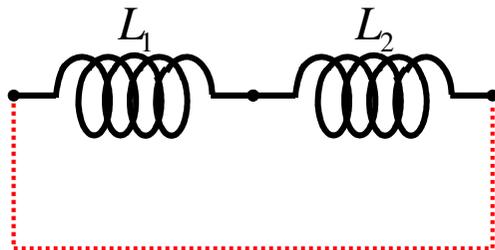
Disaccoppiate ($M = 0$)

$$\mathcal{E} = -L_1 \frac{di}{dt} - L_2 \frac{di}{dt} = -(L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$$

$$L = L_1 + L_2$$

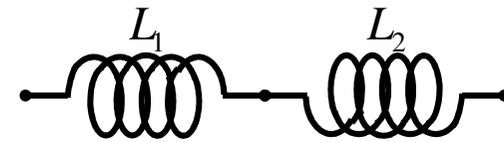
Sistemi di induttanze

Induttanze in serie



$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

Accoppiate ($M \neq 0$)



$$\mathcal{E} = \left(-L_1 \frac{di}{dt} \mp M \frac{di}{dt} \right) + \left(-L_2 \frac{di}{dt} \mp M \frac{di}{dt} \right) = -(L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt}$$

$$+ 2M$$

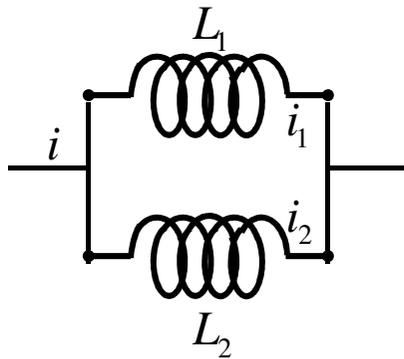
$$L = L_1 + L_2 \pm 2M$$

$$- 2M$$

Sistemi di induttanze

Induttanze in parallelo

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$$



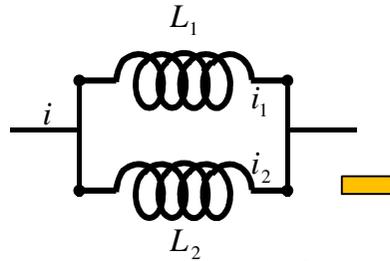
Disaccoppiate ($M = 0$)

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = -\mathcal{E} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = -\frac{\mathcal{E}}{L}$$

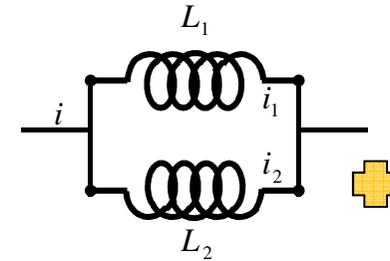
$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Sistemi di induttanze



Induttanze in parallelo
Accoppiate (M ≠ 0)



$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt} = -L \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right)$$



$$L = \frac{L_1 L_2 \mp M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &= -L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} & \frac{di_1}{dt} &= \mathcal{E} \frac{M \pm L_2}{(\mp L_1 L_2 + M^2)} \\ \mathcal{E} &= -L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} & \frac{di_2}{dt} &= \mathcal{E} \frac{M \pm L_1}{(\mp L_1 L_2 + M^2)} \end{aligned} \right\} \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \mathcal{E} \frac{2M \pm (L_1 + L_2)}{(\mp L_1 L_2 + M^2)}$$



Vale la relazione $M^2 = kL_1L_2$ dove k ($0 < k < 1$) misura il grado di accoppiamento

Energia del campo magnetico

Lavoro infinitesimo fatto dalla f.e.m. indotta, “contro” lo spostamento della carica dq nel circuito:

$$\delta \mathcal{L} = \varepsilon dq = -L \frac{di}{dt} i dt$$

Lavoro infinitesimo esterno necessario per mantenere la corrente (variabile):

$$\delta \mathcal{L}_{ext} = -\delta \mathcal{L} = L i di$$

Lavoro complessivo fatto dall'esterno per portare la corrente da 0 ad i , pari all'energia potenziale immagazzinata nel campo:

$$\mathcal{L}_{ext} = L \int_0^i i' di' = \frac{1}{2} L i^2$$

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2$$

Energia del campo magnetico

Densità di energia all'interno di un solenoide ideale

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2$$

$$L = \mu_0 \frac{SN^2}{l}$$

$$u_B = \frac{U_B}{Sl} = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{N}{l} i \right)^2$$

+

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} i$$

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$$

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

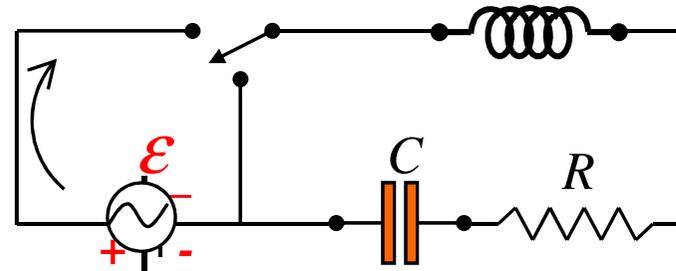
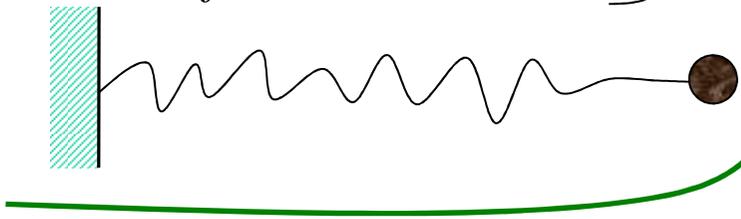
Formule di validità generale

Analogia circuito RLC – Oscillatore armonico

x: posizione
m: massa inerziale
λ: attrito viscoso
k: elasticità
F: forza motrice

Oscillatore meccanico

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

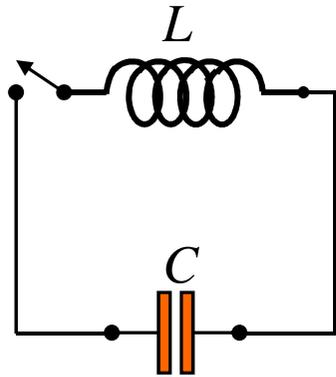


Oscillatore elettrico

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \varepsilon(t)$$

q: carica elettrica
L: induttanza
R: resistenza
C: capacità
ε: forza elettromotrice

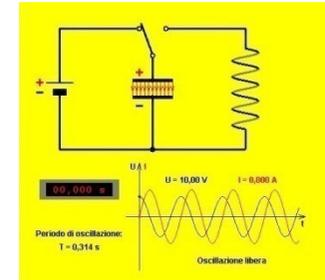
Circuiti RCL



Circuito oscillante

$$U = U_B + U_E = \text{cost}$$

$$\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \text{cost}$$



$$Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = i \left(L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\omega_{LC} = 1/\sqrt{LC}$$

$$q(t) = q_0 \sin(\omega_{LC} t + \pi/2)$$

$$i(t) = q_0 \omega_{LC} \cos(\omega_{LC} t + \pi/2)$$

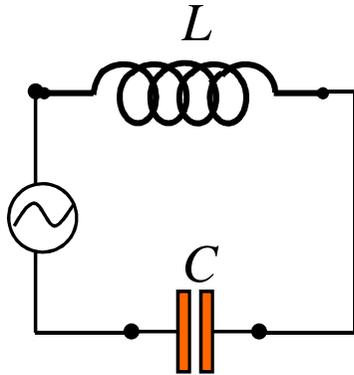
$$U_E = \frac{1}{2C} q_0^2 \sin^2(\omega_{LC} t + \pi/2)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$$

$$U_B = \frac{1}{2C} q_0^2 \cos^2(\omega_{LC} t + \pi/2)$$

Circuiti RCL

Circuito Oscillatore forzato



$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$$

$$\mathcal{E} - L \frac{d^2 q}{dt^2} - \frac{q}{C} = 0$$

$$q = A \sin \omega t \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_0 \sin \omega t + AL\omega^2 \sin \omega t - \frac{A}{C} \sin \omega t = 0 \\ \mathcal{E}_0 + A \left(L\omega^2 - \frac{1}{C} \right) = 0 \Rightarrow A = \frac{\mathcal{E}_0}{L \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)} \end{array} \right.$$

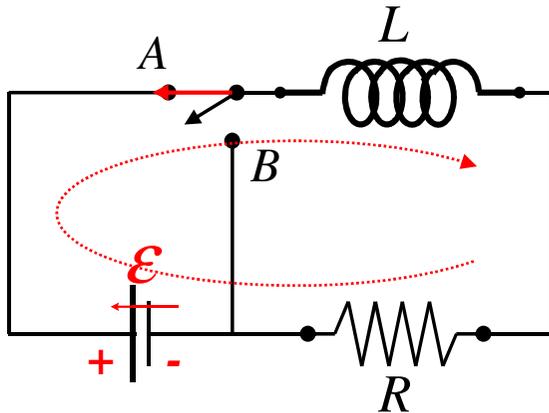
$$\omega_{LC} = 1/\sqrt{LC}$$

$$q(t) = \frac{\mathcal{E}_0/L}{(\omega_{LC}^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0 \omega/L}{(\omega_{LC}^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

Circuiti RCL

Fenomeni transitori – extracorrente di chiusura



$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_{ind} (< 0) - Ri = \mathcal{E} - L \frac{di}{dt} - Ri = 0$$

$$\int_0^{i(t)} \frac{di'}{\mathcal{E} - Ri'} = \int_0^t \frac{dt'}{L} \quad \frac{1}{R} \ln \frac{\mathcal{E} - Ri}{\mathcal{E}} = -\frac{t}{L}$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

$$\frac{di}{dt}(t) = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

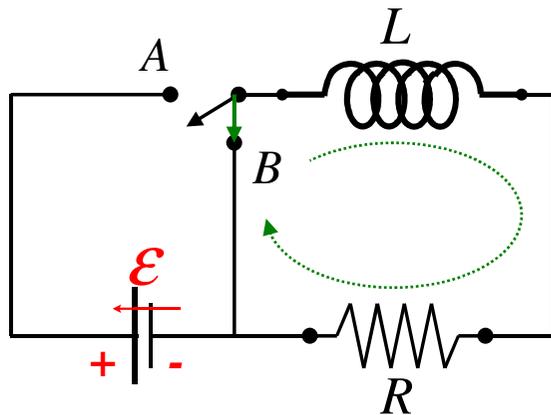
$$\Delta V_R(t) = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

$$\Delta V_L(t) = \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\Delta V_R + \Delta V_L = \mathcal{E}$$

Circuiti RCL

Fenomeni transitori – extracorrente di apertura



$$\mathcal{E}_{ind} (> 0) - Ri = -L \frac{di}{dt} - Ri = 0$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\frac{di}{dt}(t) = -\frac{\mathcal{E}}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\Delta V_R(t) = \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\Delta V_L(t) = -\mathcal{E} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\Delta V_R + \Delta V_L = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

Campo magnetostatico

<p><i>Filo cilindrico infinito percorso da corrente</i></p>	$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r_i$	$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_e}$	$B(\vec{r}) = f_c(\vec{r}) i$
<p><i>Solenoide</i></p>	$B = \mu_0 n i$		
<p><i>Toroide</i></p>	$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$	$B = \mu_0 n(r) i$	
<p><i>Lamina piana</i></p>	$B = \frac{\mu_0 J}{2}$		
<p><i>Doppia lamina piana</i></p>	$B = \mu_0 J$	$B = \mu_0 n i$	

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(\vec{r}) \hat{b} = f_c(\vec{r}) \hat{b} i = \vec{f}_c(\vec{r}) i$$



Mutua induzione – autoinduzione

Induttanza per unità di lunghezza di due conduttori paralleli di raggio R distanti d l'uno dall'altro, con correnti i opposte (trascurando il flusso interno ai conduttori).

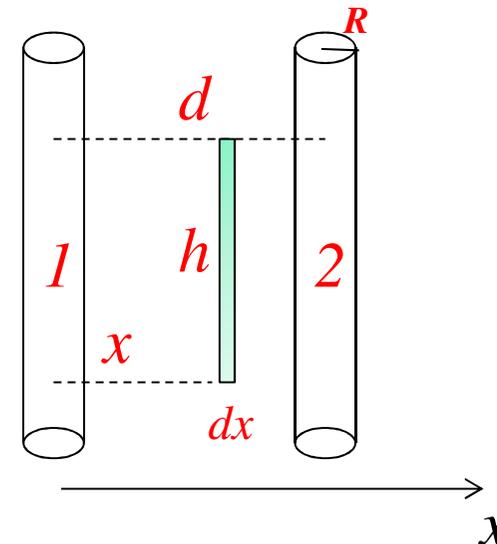
$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(d-x)} \right]$$

$$d\varphi(\vec{B}_1) = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} h dx$$

$$\varphi(\vec{B}) = 2 \times \frac{\mu_0 i}{2\pi} h \int_R^{d-R} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 i}{\pi} h \ln \frac{d-R}{R}$$

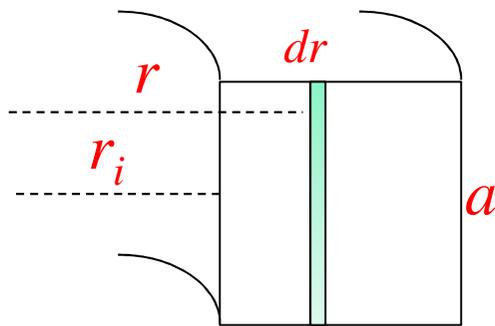
$$\mathcal{E} = - \frac{d\varphi(\vec{B})}{dt} = - \frac{\mu_0}{\pi} h \ln \frac{d-R}{R} \frac{di}{dt} = -L_h \frac{di}{dt}$$

$$L \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-R}{R}$$



Mutua induzione – autoinduzione

Induttanza di un toro a sezione quadrata di lato a , di raggio interno r_i .



$$B = \frac{\mu Ni}{2\pi r} \quad d\varphi(\vec{B}) = \frac{\mu Ni}{2\pi r} a dr N$$

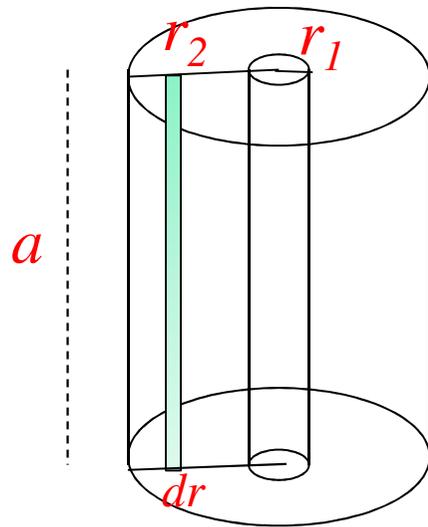
$$\varphi(\vec{B}) = \frac{\mu N^2 i}{2\pi} a \int_{r_i}^{r_i+a} \frac{dr}{r} = i \frac{\mu N^2}{2\pi} a \ln \frac{r_i + a}{r_i}$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\varphi(\vec{B})}{dt} = - \frac{\mu N^2}{2\pi} a \ln \frac{r_i + a}{r_i} \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} N^2 a \ln \frac{r_i + a}{r_i}$$

Mutua induzione – autoinduzione

*Induttanza per unità di lunghezza di un cavo coassiale
con conduttori di raggio $r_1 < r_2$.*



$$B = \frac{\mu i}{2\pi r} \quad d\varphi(\vec{B}) = \frac{\mu i}{2\pi r} a dr$$

$$\varphi(\vec{B}) = \frac{\mu i}{2\pi} a \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \quad \frac{1}{a} \varphi(\vec{B}) = i \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$