Fisica Generale B

Equazioni di Maxwell

Scuola di Ingegneria e Architettura

UNIBO – Cesena

Anno Accademico 2014 – 2015

Equazioni dell'elettromagnetismo

Riepilogo

Statica

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\vec{0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

Dinamica pre – Maxwell

Faraday – Lenz

Gauss

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

Ampére

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)=0\neq-\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad !$$

Equazioni dell'elettromagnetismo

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J}+\underbrace{\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}\right)=0$$

Viene spontaneo definire una nuova corrente, pari alla somma

corrente di conduzione +
corrente di spostamento

$$\vec{J}_{tot}=\vec{J}+\vec{J}_s=\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_0\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

Formulazione integrale:

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_S\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\cdot d\vec{S}=\mu_0\int_S\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\int_S\vec{J}\cdot d\vec{S}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int_S\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Equazioni dell'elettromagnetismo

Equazioni di Maxwell

Leggi fondamentali dell'elettromagnetismo

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

Gauss

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

Faraday – Lenz

Ampére - Maxwell

James Clerk Maxwell (1831 – 1879)

Equazioni dell'elettromagnetismo

Equazioni di Maxwell

Leggi fondamentali dell'elettromagnetismo

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{\int_V \rho \, dV}{\varepsilon_0} \\[2ex] \oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

Gauss

Faraday – Lenz

$$\begin{cases} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\[2ex] \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \end{cases}$$

Ampére - Maxwell

James Clerk Maxwell (1831 – 1879)

Equazioni dell'elettromagnetismo

Equazioni di Maxwell

Leggi fondamentali dell'elettromagnetismo

Gauss

$$\begin{cases} \varphi_S\left(\vec{E}\right) = \dfrac{Q_S}{\varepsilon_0} \\ \varepsilon = -\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi\left(\vec{B}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_S\left(\vec{B}\right) = 0 \\ \oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left[i + \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\varphi\left(\vec{E}\right)\right] \end{cases}$$

Faraday – Lenz *Ampére - Maxwell*

James Clerk Maxwell (1831 – 1879)

Potenziale vettore

È possibile, in analogia con il campo elettrostatico, definire un potenziale che consenta una descrizione alternativa del campo magnetico?

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Elettrostatica

$$\cancel{\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}}} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V} + \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Magnetostatica

$$\vec{J}_{tot} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{0}} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}} + \cancel{\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cancel{\frac{\partial A_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial A_y}{\partial z}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\cancel{\frac{\partial A_x}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial A_z}{\partial x}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\cancel{\frac{\partial A_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial A_x}{\partial y}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = $$
$$= \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Potenziale vettore

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\vec{0}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{B}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = -\vec{\nabla}\wedge\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \Longrightarrow \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\vec{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\varphi \qquad \boxed{\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

Trasformazioni di gauge:

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi' &= \varphi-\frac{\partial\chi}{\partial t}\\ \vec{A}' &= \vec{A}+\vec{\nabla}\chi\end{aligned}} \quad \Longleftarrow$$

*Scelta una funzione $\chi(\mathbf{r},t)$ arbitraria, qualunque coppia **A'** φ' legata ad **A** e φ da queste equazioni dà origine agli stessi campi **E** e **B**.*

$$\vec{B}'=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}'=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}+\cancel{\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\chi}=\vec{B}$$

$$\vec{E}'=-\vec{\nabla}\varphi'-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}=-\vec{\nabla}\varphi+\cancel{\vec{\nabla}\frac{\partial\chi}{\partial t}}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\cancel{\vec{\nabla}\frac{\partial\chi}{\partial t}}=\vec{E}$$

Potenziale vettore

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad \Longrightarrow \quad -\vec{\nabla}^2\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\vec{B}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_0\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\varphi+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\mu_0\vec{J}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\varphi+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\mu_0\vec{J}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\mu_0\vec{J}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}$$

Potenziale vettore

$$-\vec{\nabla}^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}_{} - \vec{\nabla}^2\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0\vec{J}$$

Con una opportuna scelta di ***gauge***

è possibile far si che ***questa quantità*** *sia = 0*

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}^2\varphi - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi' &= \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\\ \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\chi\end{aligned}}$$

Potenziale vettore

$$\vec{\nabla}^2\varphi-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$$

$i=\sqrt{-1}$

$$Poniamo:\quad \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,\varphi\, i=A_0;\quad \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,\rho\, i=\mu_0\varepsilon_0 c\rho\, i=\mu_0\varepsilon_0 J_0;\quad i\,t\big/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=x_0$$

$$\vec{\nabla}^2 A_0+\frac{\partial^2 A_0}{\partial x_0^2}=-\mu_0 J_0$$

$$\square^2\underline{A}=-\mu_0\underline{J}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x_0^2}=-\mu_0\vec{J}$$

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_0}{\partial x_0^2}=-\mu_0 J_0$$

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_0^2}=-\mu_0 J_i \qquad i=x,y,z$$

$$\square^2\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)=\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Operatore D'Alembertiano

$\underline{A}\equiv\left(A_0,A_x,A_y,A_z\right)$ *quadripotenziale*

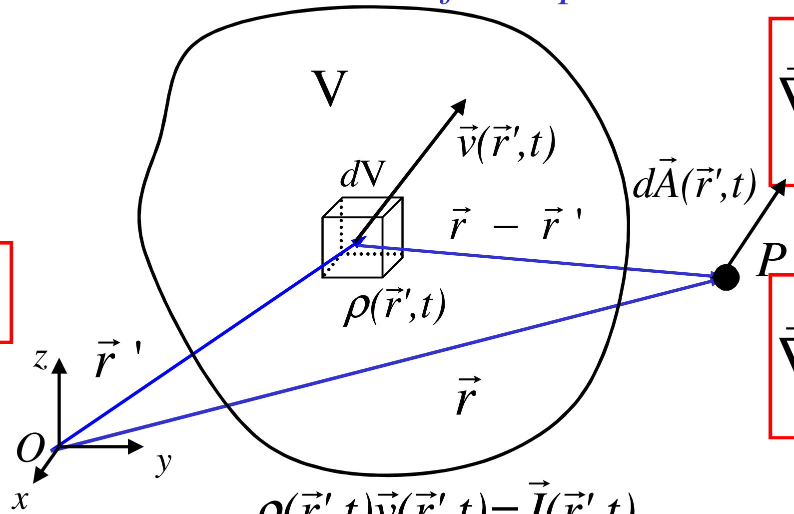
$\underline{J}\equiv\left(J_0,J_x,J_y,J_z\right)$ *quadricorrente*

Potenziale vettore

Come sono fatti i potenziali?

$$\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$



$$\rho(\vec{r}',t)\vec{v}(\vec{r}',t)=\vec{J}(\vec{r}',t)$$

$$\vec{\nabla}^2 \varphi - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} dV$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}\,',t-\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|/c\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} dV$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} dV$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\left(\vec{r}\,',t-\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|/c\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} dV$$

Potenziale vettore

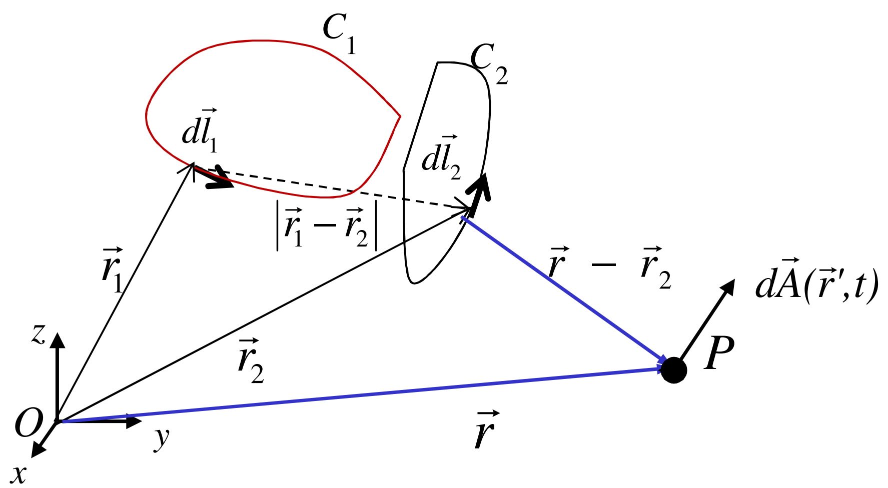
Coefficienti di auto e mutua induzione

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV$$

Per correnti i_k che circolano in n circuiti filiformi C_k :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k=1}^{n} i_k \oint_{C_k} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_k|} d\vec{l}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{A}_k(\vec{r}) \quad con \quad \vec{A}_k(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i_k \oint_{C_k} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_k|} d\vec{l}_k$$

Espressione valida anche nella approssimazione quasi stazionaria.



Potenziale vettore

Coefficienti di auto e mutua induzione

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV}$$

Per correnti i_k che circolano in n circuiti filiformi C_k :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k=1}^{n} i_k \oint_{C_k} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_k|}d\vec{l}_k = \sum_{k=1}^{n}\vec{A}_k(\vec{r}) \quad con \quad \vec{A}_k(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i_k \oint_{C_k}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_k|}d\vec{l}_k$$

Espressione valida anche nella approssimazione quasi stazionaria.

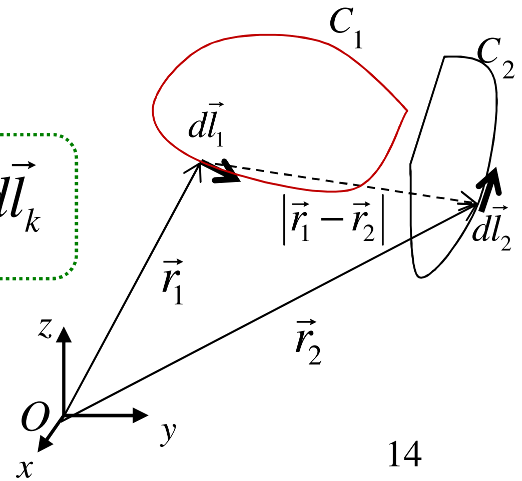
Flusso di B concatenato con il circuito C_j :

$$\boxed{\Phi_j} = \int_{S_j}\vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_{S_j}\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\cdot d\vec{S} \boxed{= \oint_{C_j}\vec{A}\cdot d\vec{l}_j} = \oint_{C_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{A}_k(\vec{r}_j)\right)\cdot d\vec{l}_j$$

$$\Phi_j = \oint_{C_j}\vec{A}_j\cdot d\vec{l}_j + \sum_{k\neq j;k=1}^{n}\oint_{C_j}\vec{A}_k\cdot d\vec{l}_j$$

$$\Phi_j = \oint_{C_j}\vec{A}_j\cdot d\vec{l}_j + \sum_{k\neq j;k=1}^{n} i_k \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_j}\oint_{C_k}\frac{1}{|\vec{r}_j-\vec{r}_k|}d\vec{l}_j\cdot d\vec{l}_k\right)$$

$$\boxed{\Phi_j = Li_j + \sum_{k\neq j;k=1}^{n} i_k\cdot M_{jk}}$$



Energia del campo magnetico

Partiamo da una singola induttanza

$$\boxed{U_B = \frac{1}{2} L i^2}$$

$$\boxed{\Phi\left(\vec{B}\right) = L i}$$

$$i = JS \Rightarrow i d\vec{l} = JS d\vec{l} = \vec{J} d\mathrm{V}$$

$$\boxed{U_B = \frac{1}{2} i \Phi\left(\vec{B}\right)} = \frac{1}{2} i \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{V}} \vec{A} \cdot \vec{J} d\mathrm{V}$$

V = *volume dei conduttori, ma possiamo generalizzare questa definizione di energia per una qualunque distribuzione di cariche in movimento in un qualsivoglia volume* V.

$$\boxed{U_B = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{V}} \vec{A} \cdot \vec{J} d\mathrm{V}} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathrm{V}} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B}\, d\mathrm{V} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathrm{V}} \vec{B}^2 d\mathrm{V} - \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathrm{V}} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) d\mathrm{V}$$

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathrm{V}} \vec{B}^2 d\mathrm{V} - \frac{1}{2\mu_0} \oint_S \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) \cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\lim_{R \to \infty} U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_{Spazio} \vec{B}^2 d\mathrm{V}}$$

$$\boxed{u_B = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right)$$

Onde elettromagnetiche

Equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right)=-\frac{\partial\vec{\nabla}\wedge\vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}^2\vec{E}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{\nabla}\wedge\vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}^2\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right)=\vec{\nabla}\cancel{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)}-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}$$

Onde elettromagnetiche

Equazione di D'Alembert

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\varphi-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\vec{0}}$$

*In assenza di cariche e di correnti ogni componente di **E** e **B** (così come φ e le componenti di **A**) soddisfano l'equazione di D'Alembert, detta anche "equazione d'onda":*

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 f-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0} \qquad dove \quad v=c=\left(\mu_0\varepsilon_0\right)^{-1/2}$$

Fra le sue soluzioni vi sono le funzioni d'onda, caratterizzate da una particolare dipendenza dalle coordinate spazio-tempo.

Onde elettromagnetiche

Onde piane

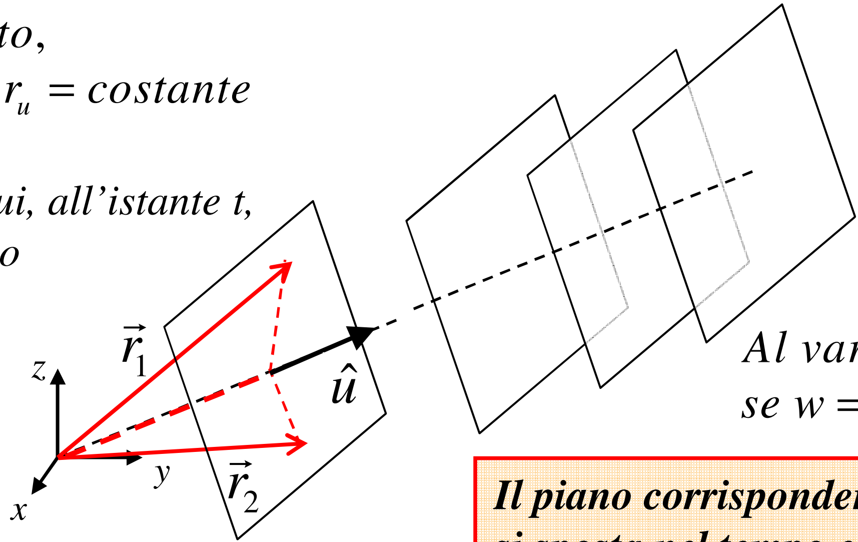
$$\boxed{\vec{\nabla}^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{f(\vec{r},t) = f(w) = f(\vec{r}\cdot\hat{u} \pm vt)}$$

$$w = \vec{r}\cdot\hat{u} \pm vt \qquad r_u = \vec{r}\cdot\hat{u} = w \mp vt$$

per un istante t dato,
se $w = costante \Rightarrow r_u = costante$

Il luogo dei punti in cui, all'istante t, f è costante, è un piano perpendicolare a $\hat{u}$



Al variare del tempo,
se $w = costante \; dr_u/dt = \mp v$

Il piano corrispondente a w = costante si sposta nel tempo con velocità v.

Onde elettromagnetiche

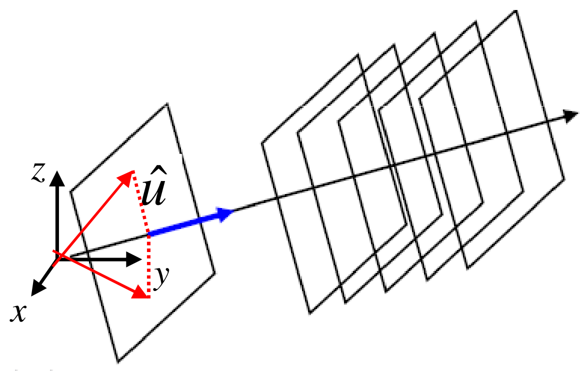
Onde piane

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$$

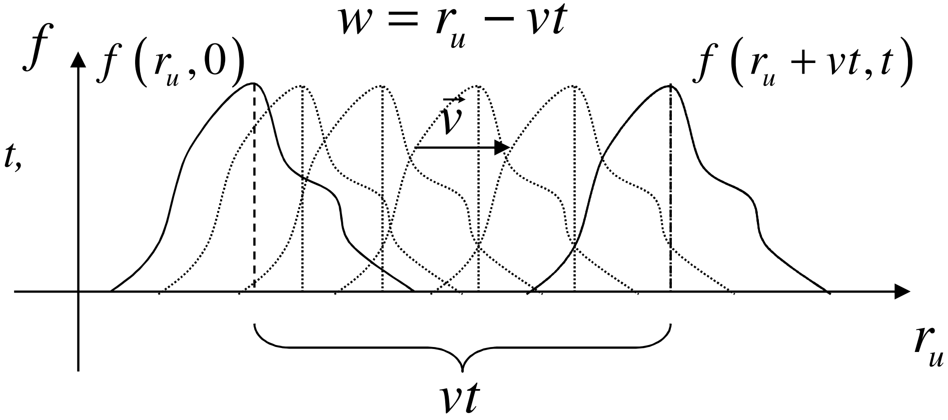
$$\boxed{f(\vec{r},t) = f(w) = f(\vec{r}\cdot\hat{u} \pm vt)}$$

$$w = \vec{r}\cdot\hat{u} \pm vt \qquad r_u = \vec{r}\cdot\hat{u} = w \mp vt$$

$$se\ w = \text{costante} \qquad \frac{dr_u}{dt} = \mp v$$



$$w = r_u - vt$$



Il luogo dei punti in cui, all'istante t, f è costante, è un piano perpendicolare a $\hat{u}$

Tale piano si sposta nel tempo con velocità v.

Onde elettromagnetiche

Onde piane

f è soluzione dell'equazione di D'Alembert

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0} \qquad \boxed{f(\vec{r},t) = f(\vec{r}\cdot\hat{u} \pm vt)} \qquad w = \vec{r}\cdot\hat{u} \pm vt$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = u_x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}, \ \ldots \Rightarrow \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}$$

OK !

Soluzioni in onde piane per i campi ***E*** *e* ***B***

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_p f_E(\vec{r}\cdot\hat{u} - vt) + \vec{E}_r g_E(\vec{r}\cdot\hat{u} + vt)}$$

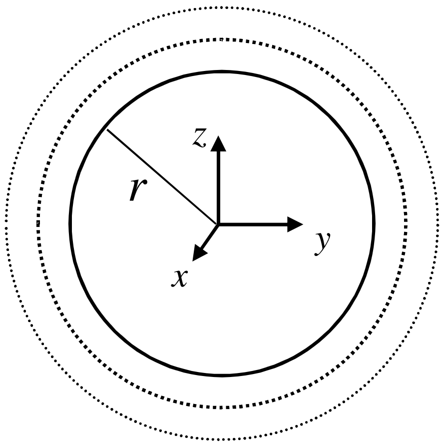
$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_p f_B(\vec{r}\cdot\hat{u} - vt) + \vec{B}_r g_B(\vec{r}\cdot\hat{u} + vt)}$$

Onde elettromagnetiche

Onde sferiche

$$\vec{\nabla}^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$F(\vec{r},t) = \frac{f(w)}{r}; \quad w = r \pm vt$$



Il luogo dei punti in cui, all'istante t, F è costante, è una superficie sferica centrata nell'origine del s.d.r..

Tale superficie si espande (o si contrae) nel tempo con velocità v.

L'intensità del campo F, soluzione dell'equazione di D'Alembert, in un punto di tale superfice, varia come 1/r.

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r^n} = -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{n}{r^{n+1}}\hat{r}\right) = \frac{n(n+1)}{r^{n+2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{r^n} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n}{r^{n+1}}\right)v = \frac{n(n+1)}{r^{n+2}}v^2$$

Onde elettromagnetiche

Onde piane monocromatiche (o armoniche)

$$\boxed{f\left(\vec{r},t\right)=A\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta\right)=A\cos\left[k\left(\hat{u}\cdot\vec{r}-\frac{\omega}{k}t\right)+\delta\right];\quad v=\frac{\omega}{k}}$$

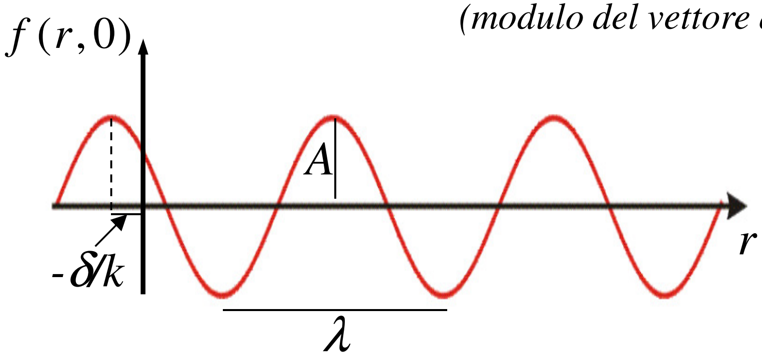
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{\nu};\qquad \lambda=\frac{2\pi}{k}=v\,\frac{2\pi}{\omega}=vT=\frac{v}{\nu}$$

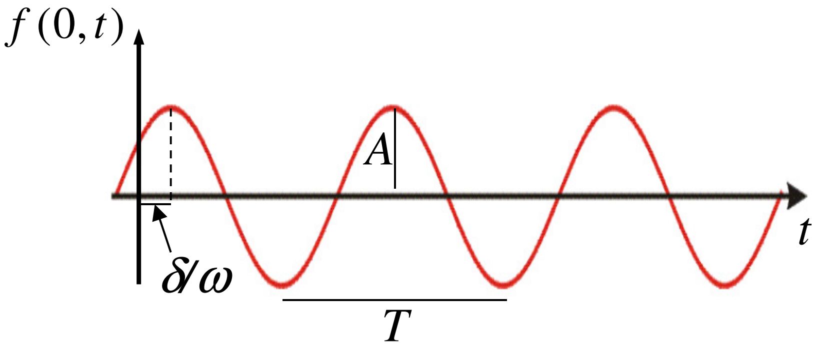
periodo (T), *pulsazione o frequenza angolare* (ω), *lunghezza d'onda* (λ), *numero d'onda (modulo del vettore d'onda)* (k), *frequenza* (ν)

velocità di fase

Nel vuoto $\omega\left(k\right)=kc=\dfrac{k}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

Relazione di dispersione





Teorema di Fourier

Ogni perturbazione elettromagnetica fisicamente realizzabile può essere rappresentata come sovrapposizione di onde armoniche.

Onde elettromagnetiche

Onde piane – campi elettrici e magnetici

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 f_E\left(\vec{r}\cdot\hat{u} - vt\right)} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \ldots = u_x\frac{\partial E_x}{\partial w} + \ldots = \hat{u}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial w} = \frac{\partial\left(\hat{u}\cdot\vec{E}\right)}{\partial w} = 0$$

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_0 f_B\left(\vec{r}\cdot\hat{u} - vt\right)} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial\left(\hat{u}\cdot\vec{B}\right)}{\partial w} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{u}\cdot\vec{E}(w) = \hat{u}\cdot\vec{B}(w) = 0}$$

***E*(*w*) *e* *B*(*w*)** *sono perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda.*

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x\frac{\partial}{\partial w} & u_y\frac{\partial}{\partial w} & u_z\frac{\partial}{\partial w} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial w}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial\left(\hat{u}\wedge\vec{E}\right)}{\partial w} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = v\frac{\partial\vec{B}}{\partial w}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\hat{u}\wedge\vec{E} - v\vec{B}\right) = 0 \Rightarrow \vec{B}(w) = \frac{\hat{u}\wedge\vec{E}(w)}{v} \qquad \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{v}\wedge\vec{E}}{v^2}} \qquad \boxed{\vec{E} = \vec{B}\wedge\vec{v}} \qquad \boxed{E = cB}$$

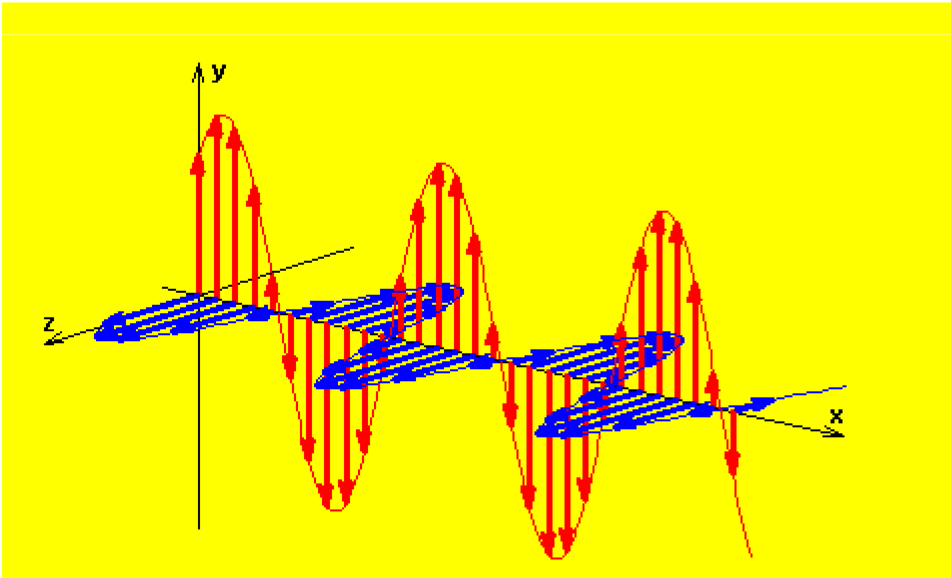
***E*(*w*)** *e* **B(*w*)** *sono perpendicolari fra di loro, con rapporto dei moduli = c (nel vuoto)*

Onde elettromagnetiche

Onde piane – campi polarizzati

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta\right)\hat{u}_p$$

Onda piana monocromatica polarizzata linearmentre



Energia e impulso nei campi elettromagnetici

Data una distribuzione spaziale qualunque di cariche elettriche in movimento, qual è l'espressione generale della legge di conservazione dell'energia?

Il sistema, contenuto in un volume V *racchiuso da una superficie* Σ*, è caratterizzato dalla densità di carica* $\rho(\mathbf{r},t)$*, dal campo delle velocità* $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ *e dai campi* $\mathbf{E}$ *e* $\mathbf{B}$.

*La carica dq contenuta nel volume d*V *subisce la forza, dovuta alle altre cariche:*

$$\boxed{d\vec{F} = dq\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) = \left(\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \wedge \vec{B}\right)d\mathrm{V} = \left(\rho\vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B}\right)d\mathrm{V}}$$

I campi $\mathbf{E}$ *e* $\mathbf{B}$ *quindi compiono su dq, in un tempo dt (ricordando che la forza magnetica non compie lavoro), il lavoro elementare:*

$$\boxed{\delta\mathcal{L} = d\vec{F} \cdot \vec{v}dt = \left(\rho\vec{E} \cdot \vec{v}\right)d\mathrm{V}dt = \left(\vec{E} \cdot \vec{J}\right)d\mathrm{V}dt}$$

Energia e impulso nei campi elettromagnetici

$$\boxed{\delta w = \frac{\delta L}{dt} = \left(\vec{E} \cdot \vec{J}\right) d\mathrm{V}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}$$

Potenza infinitesima δw (lavoro infinitesimo per unità di tempo) sviluppata dalle forze in gioco.

$$\delta w = \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\mathrm{V}$$

$$\delta w = \left(\frac{1}{\mu_0} \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) \cdot \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\mathrm{V} \quad + \quad \boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\delta w = \left(-\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\mathrm{V} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(\vec{E} \cdot \vec{J}\right) d\mathrm{V} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right) d\mathrm{V} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) d\mathrm{V} = 0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) = \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right)$$

Energia e impulso nei campi elettromagnetici

$$\left(\vec{E}\cdot\vec{J}\right)d\mathrm{V}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2+\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2\right)d\mathrm{V}+\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right)d\mathrm{V}=0$$

Il lavoro per unità di tempo (potenza) svolto dalla forza elettrica sulla carica contenuta in V è compensato da altri termini secondo l'espressione:

$$\int_{\mathrm{V}}\left(\vec{E}\cdot\vec{J}\right)d\mathrm{V}+\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{V}}\left(\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2+\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2\right)d\mathrm{V}+\oint_{\Sigma}\frac{\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right)}{\mu_0}\cdot d\vec{\Sigma}=0$$

Legge di conservazione dell'energia in elettromagnetismo:
Teorema di Poynting

Lavoro per unità di tempo svolto dalla forza elettrica sulla carica contenuta in V

Variazione dell'energia nel volume V sotto forma di campi elettrici e magnetici

*Energia che attraversa Σ nell'unità di tempo, per mezzo dei campi **E** e **B** su Σ.*

Energia e impulso nei campi elettromagnetici

$$\int_V \left(\vec{E}\cdot\vec{J}\right) dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2\right) dV + \oint_\Sigma \frac{\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right)}{\mu_0}\cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

$$\left(\vec{E}\cdot\vec{J}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U_{mat} + U_{em}\right) = -\oint_\Sigma \vec{S}\cdot d\vec{\Sigma}$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$$

Vettore di Poynting

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{mat} + u_{em}\right) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{S}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{J}$$

Il vettore di Poynting rappresenta sicuramente un flusso di energia quando è diverso da zero attraverso una superficie chiusa.

Energia e impulso nei campi elettromagnetici

$$dU_{\Sigma} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{\Sigma} dt = \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} dt$$

Energia che fluisce, nel tempo dt, attraverso l'elemento di superficie dΣ nei punti del quale siano presenti campi elettrici e magnetici.

*Con analogo percorso logico, riguardante le forze elettriche agenti su un generico volume elementare all'interno di una arbitraria distribuzione di cariche, si ottiene la quantità di moto d**P** associata ad un volume dV al cui interno vi siano campi elettrici e magnetici.*

$$d\vec{P} = \frac{1}{c^2} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} dV = \frac{\vec{S}}{c^2} dV$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)=}\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)_x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)_y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)_z$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

$$=\left(\cancel{\frac{\partial^2 B_z}{\partial x\partial y}}-\cancel{\frac{\partial^2 B_y}{\partial x\partial z}}\right)+\left(\cancel{\frac{\partial^2 B_x}{\partial y\partial z}}-\cancel{\frac{\partial^2 B_z}{\partial y\partial x}}\right)+\left(\cancel{\frac{\partial^2 B_y}{\partial z\partial x}}-\cancel{\frac{\partial^2 B_x}{\partial z\partial y}}\right)$$

$$\boxed{=0}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)=}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)_z-\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)_y\right]\hat{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)_x-\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)_z\right]\hat{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)_y-\frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)_x\right]\hat{k}=$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]\hat{i}+[\ldots]\hat{j}+[\ldots]\hat{k}=$$

$$=\left[\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial x}\right)\right]\hat{i}+[\ldots]\hat{j}+[\ldots]\hat{k}=$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\right]\hat{i}+[\ldots]\hat{j}+[\ldots]\hat{k}=$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2 A_x\right]\hat{i}+[\ldots]\hat{j}+[\ldots]\hat{k}=$$

$$\boxed{=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}}$$

Onde elettromagnetiche – Campi polarizzati

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 f_E(w)}$$
$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_0 f_B(w)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\left(\hat{u}\cdot\vec{E}\right)}{\partial w} = 0 \\ \frac{\partial\left(\hat{u}\cdot\vec{B}\right)}{\partial w} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{gathered}\hat{u}\cdot\vec{E} \text{ e } \hat{u}\cdot\vec{B} \text{ sono} \\ \text{indipendenti da } w\end{gathered}} \quad \hat{u}\cdot\vec{E} = \hat{u}\cdot\vec{E}_0 f_E(w) = cost$$

$$Ma\ \hat{u}\cdot\vec{E}_0 \text{ è costante mentre } f_E(w) \text{ ovviamente no} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{u}\cdot\vec{E}_0 = \hat{u}\cdot\vec{E} = 0}$$

$$\ldots idem\ per\ \vec{B}$$

***E* e *B* sono perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda.**

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\hat{u}\wedge\vec{E} - v\vec{B}\right) = \hat{u}\wedge\vec{E}_0\frac{\partial}{\partial w}f_E - v\vec{B}_0\frac{\partial}{\partial w}f_B = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_0 = \frac{\hat{u}\wedge\vec{E}_0}{v}\frac{\partial f_E}{\partial w}\Big/\frac{\partial f_B}{\partial w} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_E}{\partial w}\Big/\frac{\partial f_B}{\partial w} = a, \quad f_E = a f_B$$

$$\hat{u}\wedge\vec{E}_0 f_E(w) - v\vec{B}_0 f_B(w) = \left(a\hat{u}\wedge\vec{E}_0 - v\vec{B}_0\right)f_B(w) = \vec{K} \quad \Rightarrow \quad a\hat{u}\wedge\vec{E}_0 - v\vec{B}_0 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad a\hat{u}\wedge\vec{E}_0 f_B(w) - v\vec{B}_0 f_B(w) = \hat{u}\wedge\vec{E}_0 f_E(w) - v\vec{B}_0 f_B(w) = \hat{u}\wedge\vec{E} - v\vec{B} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\hat{u}\wedge\vec{E}}{v}}$$

***E* e *B* sono perpendicolari fra di loro, con rapporto dei moduli = c (nel vuoto)**