Fisica Generale A

Cinematica del punto materiale

Scuola di Ingegneria e Architettura

UNIBO – Cesena

Anno Accademico 2015 – 2016

Cinematica

La cinematica studia le grandezze fisiche ed i metodi che servono per descrivere i possibili movimenti di un oggetto qualsiasi, senza occuparsi delle cause che li determinano.

Punto materiale: oggetto mobile puntiforme (ossia di dimensioni trascurabili rispetto al contesto considerato).

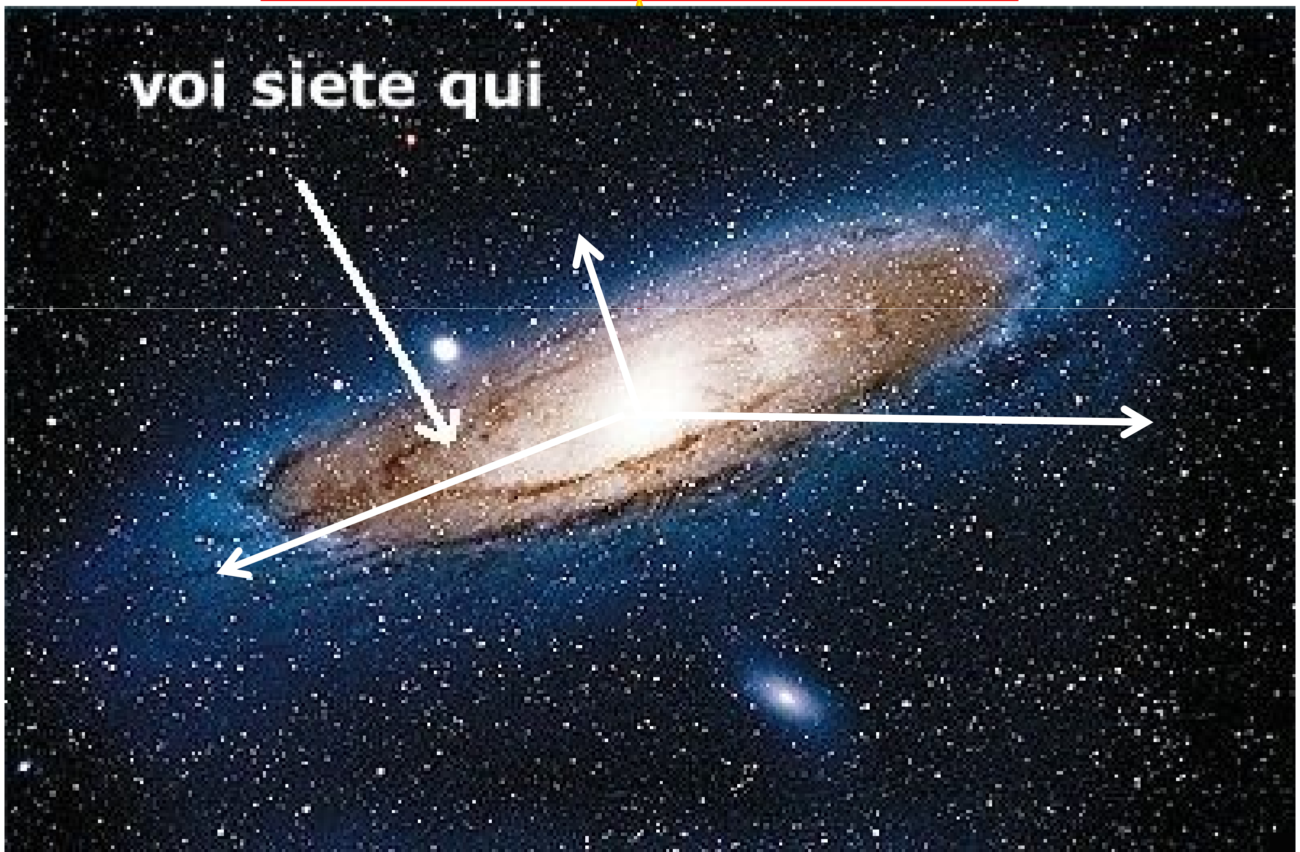
Ha senso affermare che un oggetto si muove (o sta fermo) solo se si precisa il sistema di riferimento rispetto al quale si valuta il movimento: non esiste un sistema di riferimento privilegiato.

Il moto è relativo

Scelto un sistema di riferimento, ai fini di una descrizione analitica del moto si sceglie una terna cartesiana di riferimento solidale con quello.

Cinematica

Sistema di Riferimento – Esempi



Cinematica

La misura dello spazio e del tempo, grandezze fondamentali della cinematica

Sono grandezze fisiche se si può darne una definizione operativa, cioè individuare un procedimento attraverso il quale misurarle.

1 secondo (s) : ***In passato, 1 s = 1/86 400 del giorno solare medio***

È la durata di un numero stabilito[1] *di oscillazioni della radiazione emessa da un isotopo del Cesio in seguito alla sua transizione tra due livelli definiti.*

(1) 1 s = 9 192 631 770 oscillazioni

1 metro (m) : ***In passato, 1 m = 10^{-7} quadrante di meridiano terrestre***

È la lunghezza del tragitto percorso dalla luce nel vuoto in una frazione di secondo prestabilita (quindi pari all'inverso della sua velocità [2]*)*

(2) 1 m = c x 1/299 792 458 s

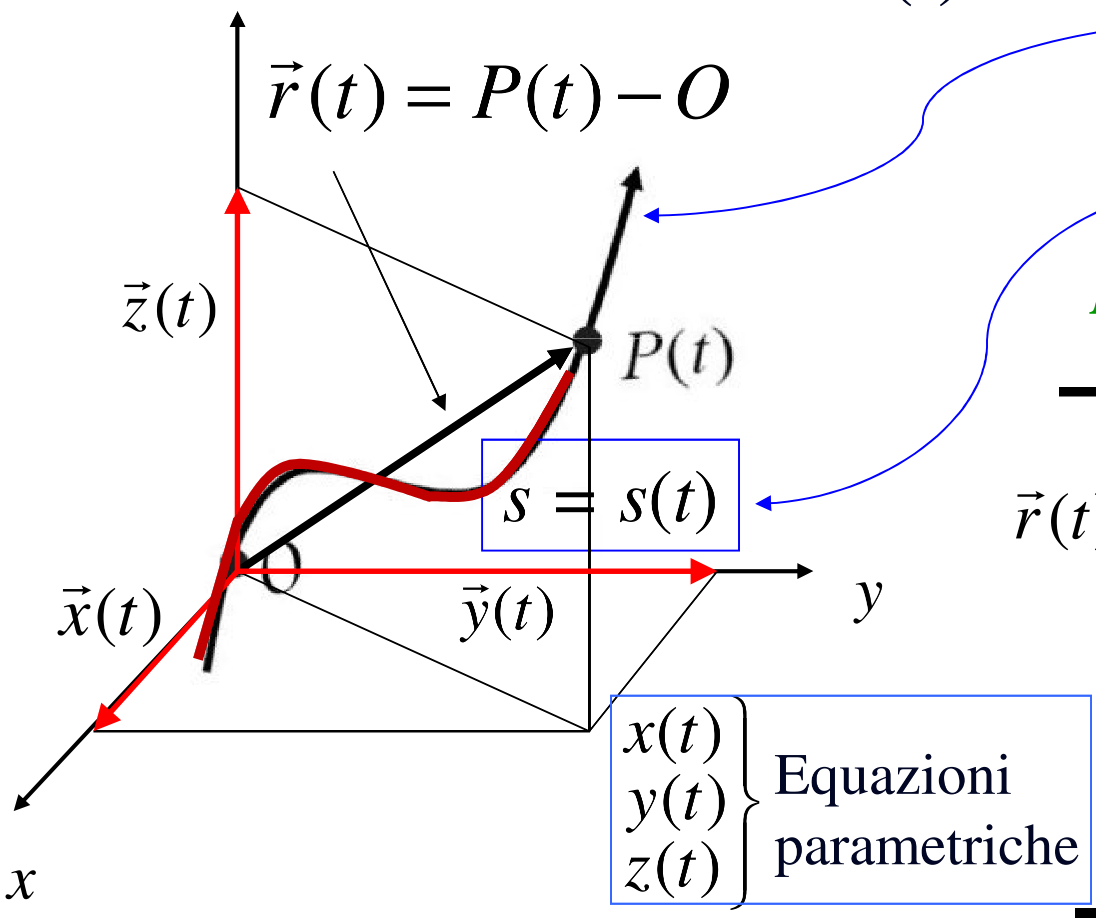
Cinematica

Ipotetica definizione operativa (basata su misure) di metro:

1. *Con un orologio al Cs si misura il tempo (mumero N di oscillazioni) impiegato dalla luce per percorrere una base lunga l (= x metri, con x incognita).*
2. *Si ricava $t = N/\ 9\ 192\ 631\ 770$, tempo in secondi impiegato dalla luce a percorrere la distanza l.*
3. *Assunta la velocità della luce $c = 299\ 792\ 458$ m/s, si ricava $x = ct$.*
4. *Si divide la base l in x parti: ognuna di queste misura 1 m.*

Cinematica – descrizione del moto

$P = P(t)$



Traiettoria +

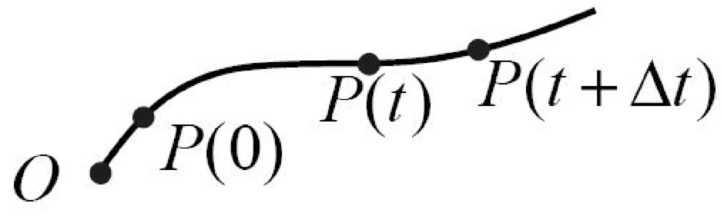
Legge oraria

Descrizione intrinseca

$$\vec{r}(t) = \vec{x}(t) + \vec{y}(t) + \vec{z}(t) =$$
$$= x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Descrizione cartesiana

Cinematica – velocità



$$s_0 = \overset{\frown}{OP}(0)$$
$$s(t) = \overset{\frown}{OP}(t)$$
$$s(t+\Delta t) = \overset{\frown}{OP}(t+\Delta t)$$

Velocità media

$$v_m(t) = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Vel. istantanea:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

Cinematica – velocità

Caso particolare: **Moto uniforme** $\Rightarrow$ $s(t) = kt + s_0$

$$v_m(t) = \frac{\cancel{kt} + k\cancel{\Delta t} + \cancel{s_0} - \cancel{kt} - \cancel{s_0}}{\cancel{\Delta t}} = k$$

la velocità è costante …

$$\boxed{v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(kt + s_0\right) = k}$$

… uguale alle velocità istantanea

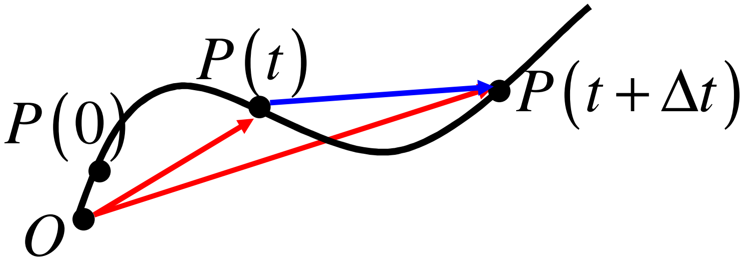
Caso particolare: **Moto unif. acceler.** $\Rightarrow s(t) = kt^2 + v_0 t + s_0$

$$v_m(t) = \frac{\cancel{kt^2} + k\Delta t^{\cancel{2}} + 2kt\cancel{\Delta t} + \cancel{v_0 t} + v_0\cancel{\Delta t} + \cancel{s_0} - \cancel{kt^2} - \cancel{v_0 t} - \cancel{s_0}}{\cancel{\Delta t}}$$

$$\boxed{v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(kt^2 + v_0 t + s_0\right) = 2kt + v_0}$$

$$\boxed{a = \ddot{s} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2kt + v_0\right) = 2k}$$

Cinematica – velocità



$$\overrightarrow{\Delta P} = P(t+\Delta t) - P(t)$$

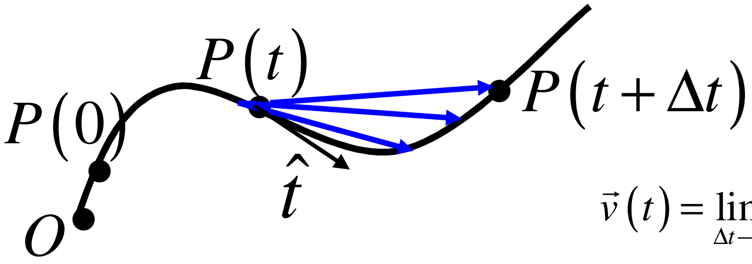
Velocità media vettoriale

$$\vec{v}_m(t) = \frac{\overrightarrow{\Delta P}}{\Delta t} = \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

Vel. Istantanea vettoriale

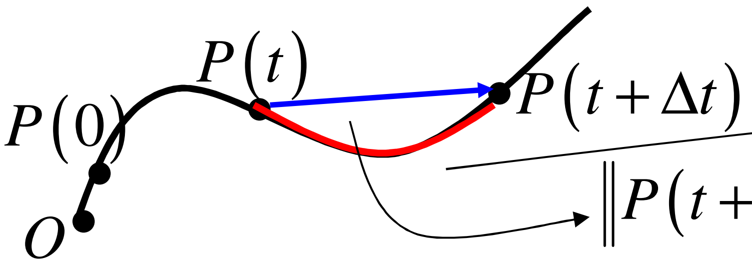
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = \dot{P}(t)$$

Cinematica – velocità



$$\vec{v}(t) = \left\|\vec{v}(t)\right\|\hat{t} = v(t)\hat{t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \frac{dP}{dt}$$



$$\dot{s}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

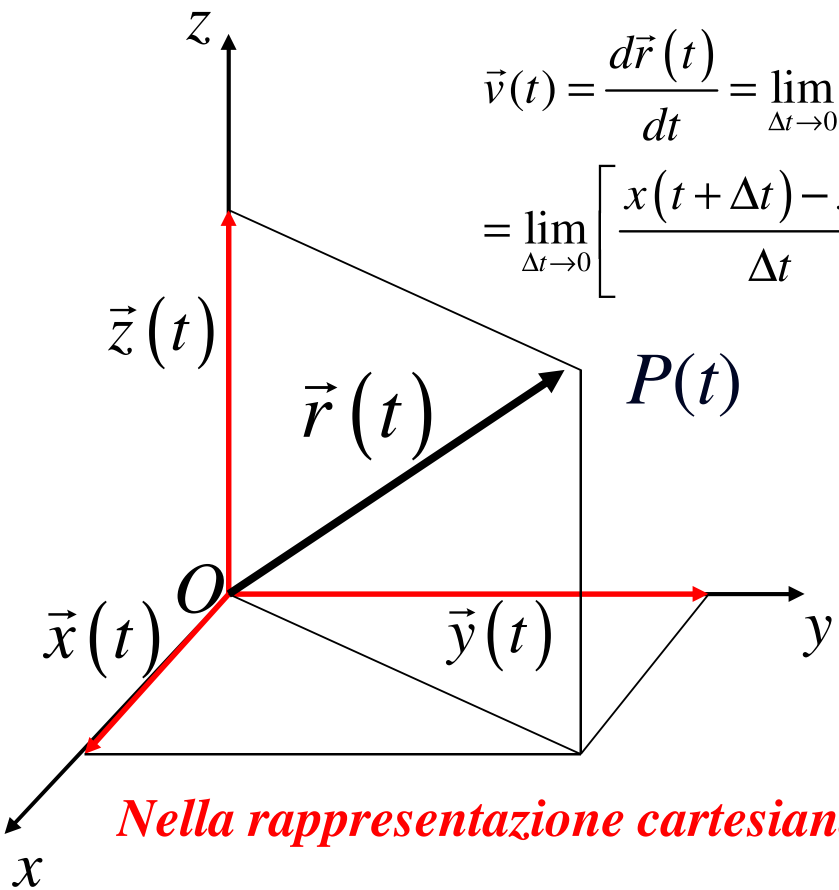
$$\left\|P(t+\Delta t) - P(t)\right\| \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \left|s(t+\Delta t) - s(t)\right|$$

$$\left\|\vec{v}(t)\right\| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left\|P(t+\Delta t) - P(t)\right\|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|s(t+\Delta t) - s(t)\right|}{\Delta t} = \left|\dot{s}(t)\right| = v(t)$$

Nella rappresentazione intrinseca: $\boxed{\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\hat{t}}$

Cinematica – velocità

$$\boxed{\vec{r}(t) = P(t) - O = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}}$$



$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\hat{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\hat{j} + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\hat{k} \right]$$

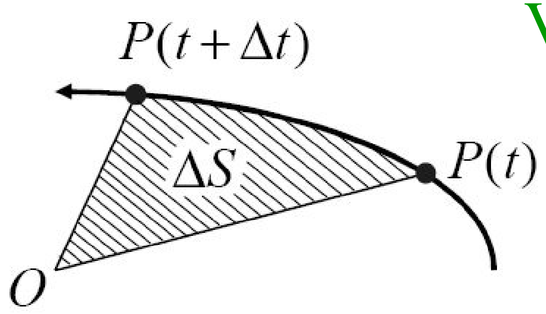
$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

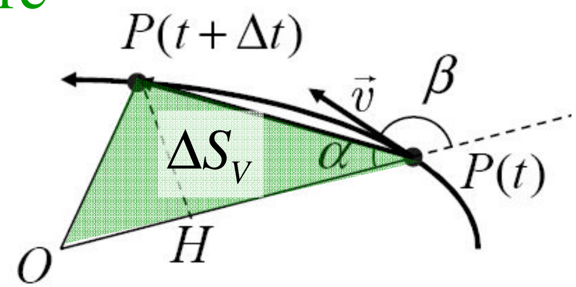
$$= v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$$

Nella rappresentazione cartesiana: $\boxed{\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\hat{k}}$

Cinematica – velocità

Velocità Areolare





$$A(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\Delta S_V(t)=\frac{1}{2}\left\|P(t)-O\right\|\left\|P(t+\Delta t)-P(t)\right\|\left|sen\alpha\right|$$

$$\alpha \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \pi-\beta \qquad \Delta S_V \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \Delta S$$

$$A(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S_V}{\Delta t}=\frac{1}{2}\left\|P(t)-O\right\|\left\|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}\right\|\left|sen(\pi-\beta)\right|$$

$$\boxed{A(t)=\frac{1}{2}\left\|P(t)-O\right\|\left\|\vec{v}(t)\right\|\left|sen\beta\right|}$$

$$\boxed{\vec{A}=\frac{1}{2}(P-O)\wedge\vec{v}}$$

Cinematica – accelerazione

Accelerazione media

$$\vec{a}_m(t) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Acc. Istantanea

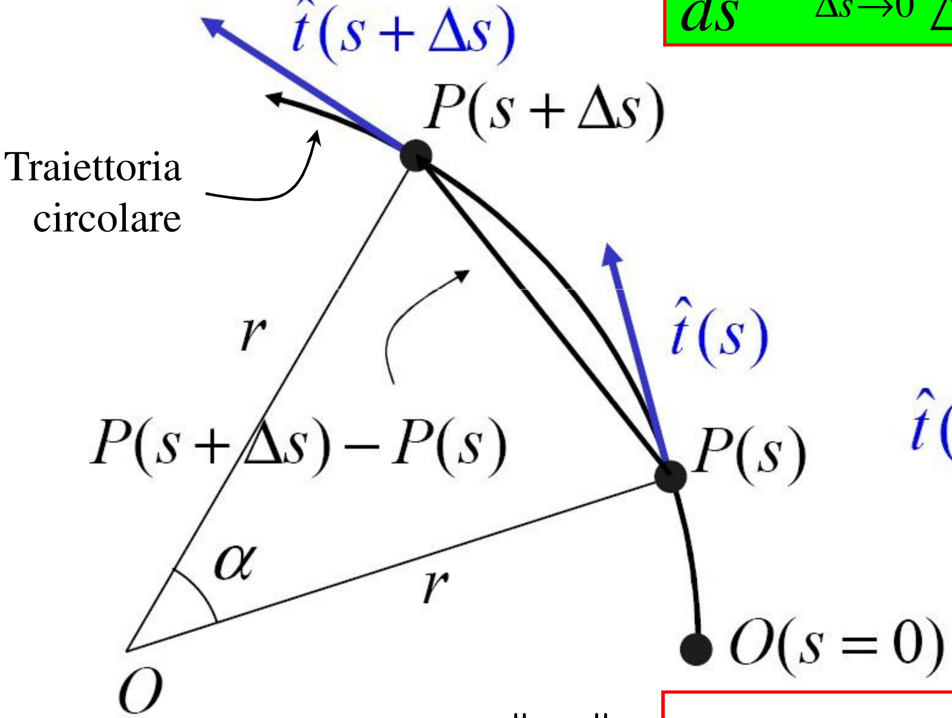
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d^2 P}{dt^2} \qquad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

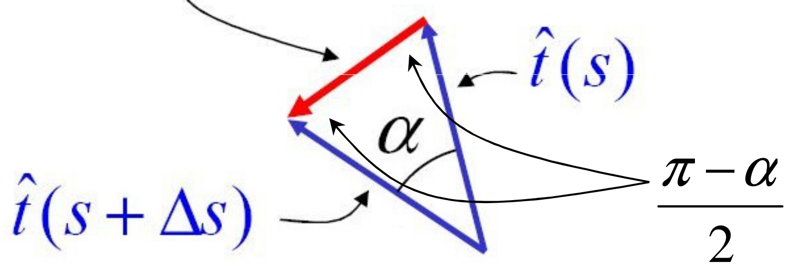
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} \qquad \vec{a} = \ddot{P} \qquad \vec{a} = \ddot{\vec{r}}$$

Cinematica – accelerazione

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta s}$$



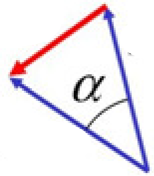
$$\Delta\hat{t} = \hat{t}(s+\Delta s) - \hat{t}(s)$$



$$\frac{\|\Delta\hat{t}\|}{\|\hat{t}\|} = \boxed{\|\Delta\hat{t}\| = \frac{\|P(s+\Delta s)-P(s)\|}{r}}$$

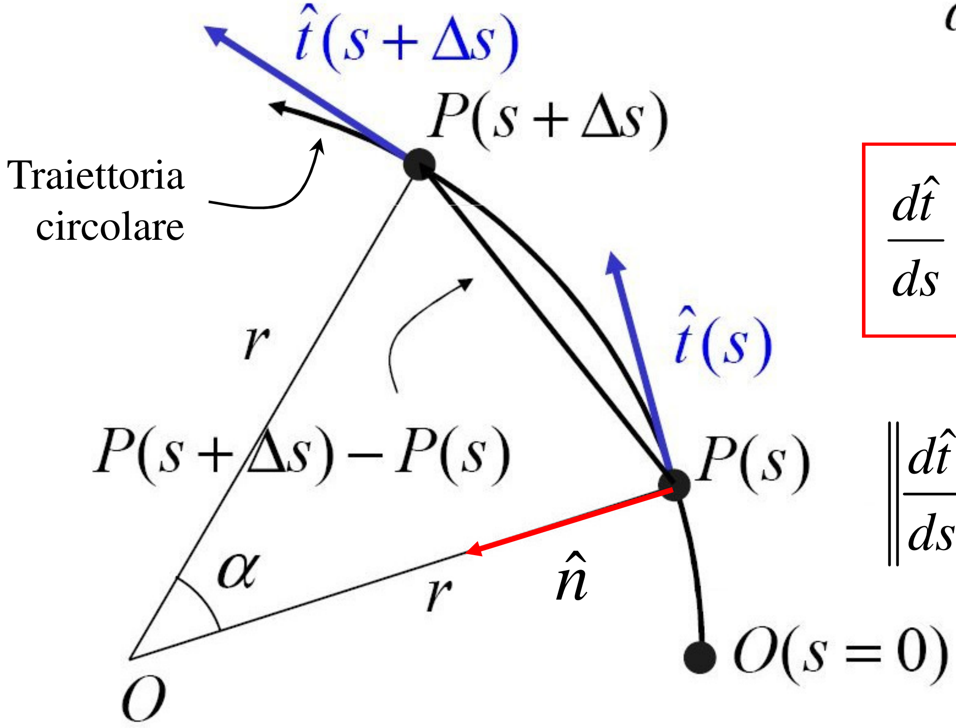
Cinematica – accelerazione

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta s}$$



$$\left\| \Delta \hat{t} \right\| = \frac{\left\| P(s+\Delta s) - P(s) \right\|}{r}$$

$$\alpha \xrightarrow[\Delta s \to 0]{} 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta \hat{t} \underset{\Delta s \to 0}{\perp} \hat{t}}$$



$$\boxed{\frac{d\hat{t}}{ds} = \left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\| \hat{n}}$$

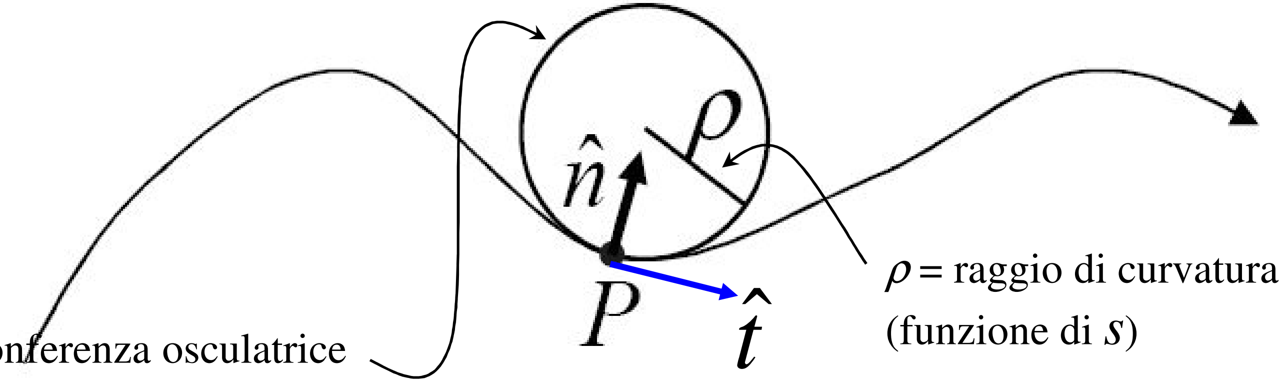
$$\left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\| = \left\| \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta s} \right\|$$

$$\left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\| = \frac{1}{r} \lim_{\Delta s \to 0} \left\| \frac{P(s+\Delta s) - P(s)}{\Delta s} \right\| = \frac{1}{r}$$

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{r} \hat{n}$$

NB.: La derivata di un versore rispetto a un qualsiasi parametro dal quale il versore dipende è un vettore perpendicolare al versore stesso.

Cinematica – accelerazione



Circonferenza osculatrice
(nel piano osculatore)

ρ = raggio di curvatura
(funzione di s)

$$\boxed{\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{n}}$$

Espressione intrinseca

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= \dot{\vec{v}} \\ \vec{v} &= \dot{s}\hat{t} \end{aligned}\right\}$$

$$\dot{\hat{t}} = \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds}\dot{s}$$

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\dot{\hat{t}} \Rightarrow \vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\frac{d\hat{t}}{ds} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\frac{1}{\rho}\hat{n}}$$

Cinematica – accelerazione

Espressione cartesiana

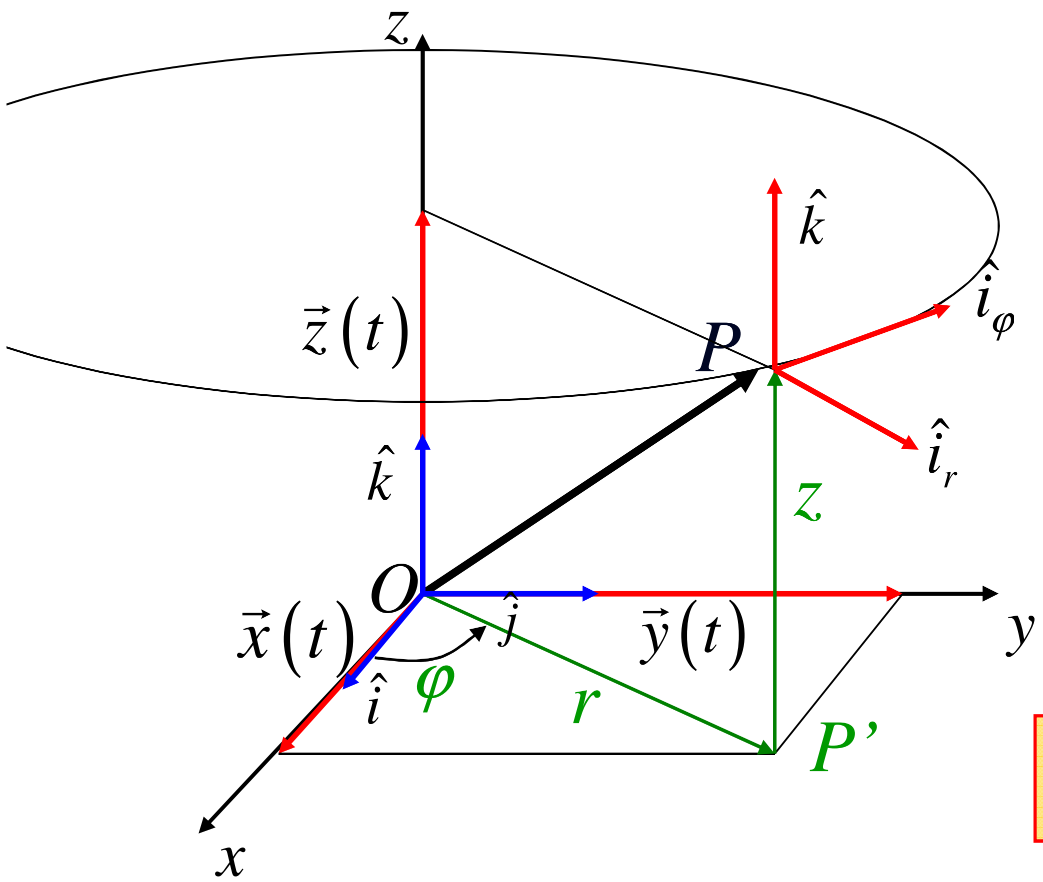
$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = \dot{\vec{v}} \\ \vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}\end{array}\right\}$$

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} = \dot{v}_x\hat{i} + \dot{v}_y\hat{j} + \dot{v}_z\hat{k}}$$

Cinematica – Riepilogo

	Descrizione intrinseca	*Descrizione cartesiana*
Posizione	$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{array}\right\}$ **Equazioni della traiettoria** $s = s(t)$ **Legge oraria**	$\left.\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array}\right\}$ **Equazioni parametriche**
Velocità	$\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\hat{t}(t)$	$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\hat{k}$
Accel.ne	$\vec{a}(t) = \ddot{s}(t)\hat{t}(t) + \dot{s}^2(t)\frac{1}{\rho(t)}\hat{n}(t)$	$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j} + \ddot{z}(t)\hat{k} =$ $= \dot{v}_x(t)\hat{i} + \dot{v}_y(t)\hat{j} + \dot{v}_z(t)\hat{k}$

Cinematica – coordinate cilindriche



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

$$z = z$$

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r sen\varphi$$

$$z = z$$

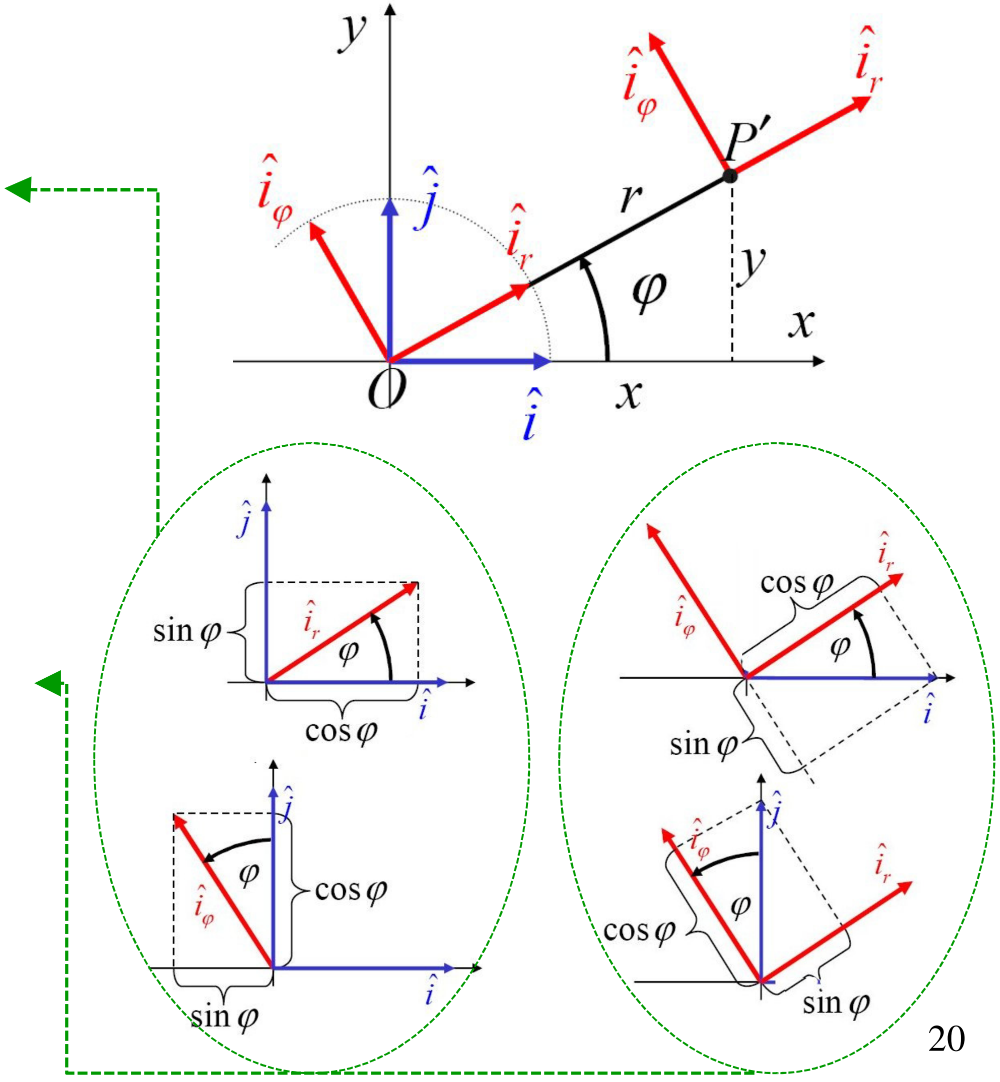
Posizione

$$\boxed{P - O = r(t)\hat{i}_r(t) + z(t)\hat{k}}$$

Cinematica – coordinate cilindriche

$$\begin{cases} \hat{i}_r = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j} \\ \hat{i}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{i} = \cos\varphi\,\hat{i}_r - \sin\varphi\,\hat{i}_\varphi \\ \hat{j} = \sin\varphi\,\hat{i}_r + \cos\varphi\,\hat{i}_\varphi \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases}$$



Cinematica – coordinate cilindriche

$$\begin{cases} \hat{i}_r = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j} \\ \hat{i}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{i} = \cos\varphi\,\hat{i}_r - \sin\varphi\,\hat{i}_\varphi \\ \hat{j} = \sin\varphi\,\hat{i}_r + \cos\varphi\,\hat{i}_\varphi \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{i}_r}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{i} + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{j} = \dot{\varphi}\left(-\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}\right) = \dot{\varphi}\,\hat{i}_\varphi \\ \dfrac{d\hat{i}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{i} - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{j} = -\dot{\varphi}\left(\cos\varphi\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}\right) = -\dot{\varphi}\,\hat{i}_r \\ \dfrac{d\hat{k}}{dt} = 0 \end{cases}$$

Posizione

$$\boxed{P - O = r\hat{i}_r + z\hat{k}}$$

Velocità

$$\vec{v} = \dot{P} = \dot{r}\hat{i}_r + r\dot{\hat{i}}_r + \dot{z}\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}(t)\,\hat{i}_r(t) + r(t)\,\dot{\varphi}(t)\,\hat{i}_\phi(t) + \dot{z}(t)\,\hat{k}}$$

Cinematica – coordinate cilindriche

$$\begin{cases} \hat{i}_r = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j} \\ \hat{i}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{i} = \cos\varphi\,\hat{i}_r - \sin\varphi\,\hat{i}_\varphi \\ \hat{j} = \sin\varphi\,\hat{i}_r + \cos\varphi\,\hat{i}_\varphi \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{i}_r}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{i} + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{j} = \dot{\varphi}\left(-\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}\right) = \dot{\varphi}\,\hat{i}_\varphi \\ \dfrac{d\hat{i}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{i} - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{j} = -\dot{\varphi}\left(\cos\varphi\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}\right) = -\dot{\varphi}\,\hat{i}_r \\ \dfrac{d\hat{k}}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{i}_r + r\dot{\varphi}\hat{i}_\varphi + \dot{z}\hat{k}$$

Accelerazione

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{i}_r + \dot{r}\dot{\hat{i}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{i}_\phi + r\ddot{\varphi}\hat{i}_\phi + r\dot{\varphi}\dot{\hat{i}}_\phi + \ddot{z}\hat{k}$$

$$= \ddot{r}\hat{i}_r + \dot{r}\left(\dot{\varphi}\hat{i}_\phi\right) + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{i}_\phi + r\ddot{\varphi}\hat{i}_\phi + r\dot{\varphi}\left(-\dot{\varphi}\hat{i}_r\right) + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\hat{i}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\hat{i}_\phi + \ddot{z}\hat{k}}$$

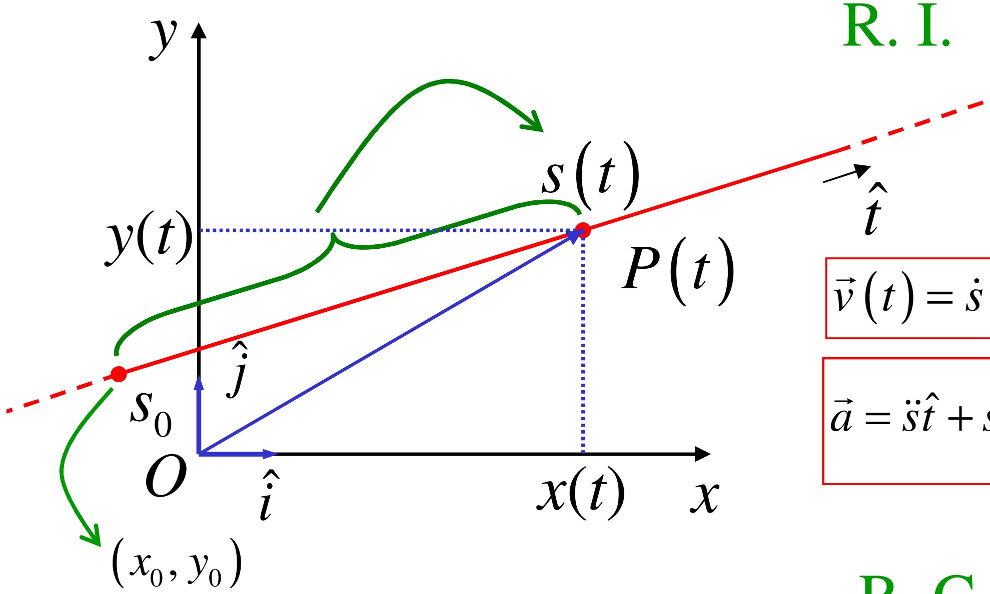
Cinematica – coordinate cilindriche

Posizione
$$P-O=r(t)\hat{i}_r(t)+z(t)\hat{k}$$

Velocità
$$\vec{v}=\dot{r}(t)\hat{i}_r(t)+r(t)\dot{\varphi}(t)\hat{i}_\varphi(t)+\dot{z}(t)\hat{k}$$

Accelerazione
$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\hat{i}_r+\left(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}\right)\hat{i}_\phi+\ddot{z}\hat{k}$$

Cinematica – Moto rettilineo uniforme



R. I.

$$y = ax + b \qquad z = 0$$ *Traiettoria*

$$s(t) = kt + s_0$$ *Equazione oraria*

$$\Downarrow$$

$$\dot{s}(t) = k \qquad \ddot{s}(t) = 0$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = kt\hat{t} \qquad \vec{a}(t) = 0}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\hat{t}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2 \frac{1}{\rho}\hat{n}}$$

Perché?

Perchè $\rho = \infty$

R. C.

$$x(t) = v_{x0}t + x_0 \qquad v_x(t) = \dot{x}(t) = v_{x0} \qquad \ddot{x}(t) = 0$$

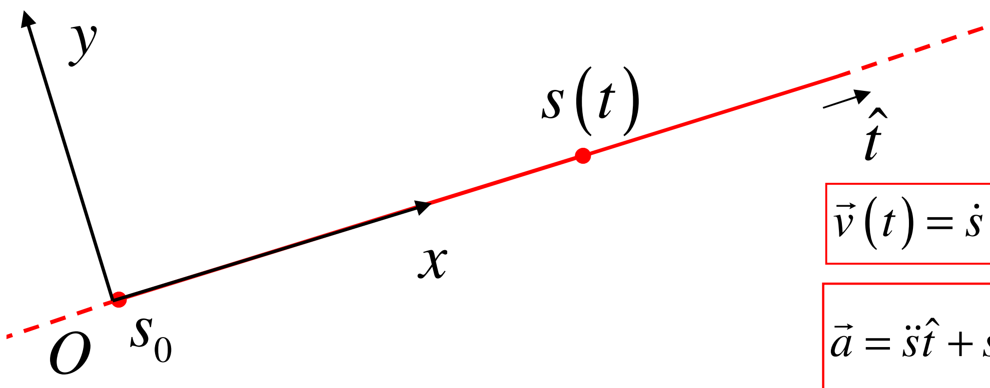
$$y(t) = v_{y0}t + y_0 \qquad v_y(t) = \dot{y}(t) = v_{y0} \qquad \ddot{y}(t) = 0$$

$$z(t) = 0$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = v_{x0}\hat{i} + v_{y0}\hat{j} \qquad \vec{a}(t) = \vec{0}}$$

Cinematica – Moto rettilineo uniforme

R. I.



$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\hat{t}$$

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2 \frac{1}{\rho}\hat{n}$$

$$y = 0$$
$$z = 0$$

Traiettoria

$$s(t) = kt + s_0$$

Equazione oraria

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{s}(t) &= k \\ \ddot{s}(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{aligned} \vec{v}(t) &= k\hat{t} \\ \vec{a}(t) &= 0 \end{aligned}}$$

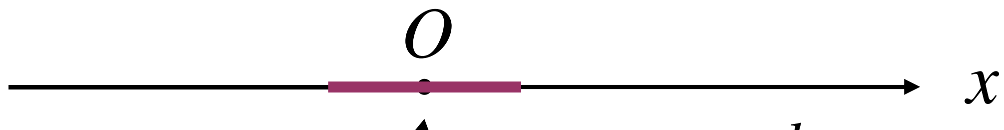
R. C.

$$x(t) = kt$$
$$y(t) = 0$$
$$z(t) = 0$$

$$\dot{x}(t) = k \qquad \ddot{x}(t) = 0$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = k\hat{i} \qquad \vec{a}(t) = \vec{0}}$$

Cinematica – Moto armonico



$$y = 0$$
$$z = 0$$

Traiettoria

$$\boxed{s(t) = l \sin(\omega t + \alpha)}$$

Equazione oraria

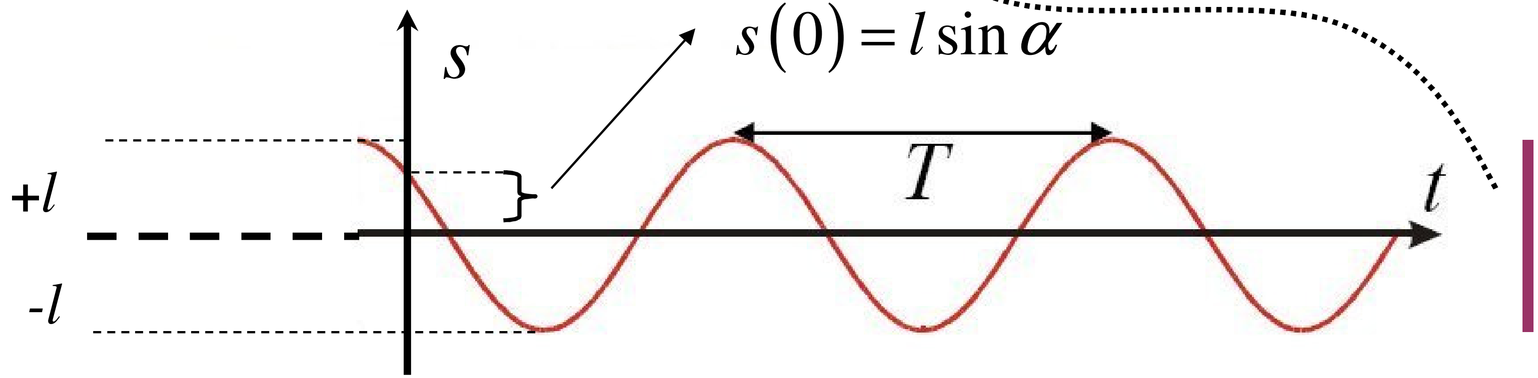
l = *ampiezza*

$\omega t + \alpha$ = *fase*

α = *fase iniziale*

ω = *pulsazione*

$$s(0) = l \sin \alpha$$



se $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} \qquad s(t+T) = s(t)$

T = *periodo*

$\nu = 1/T$ = *frequenza*

Cinematica – Moto armonico

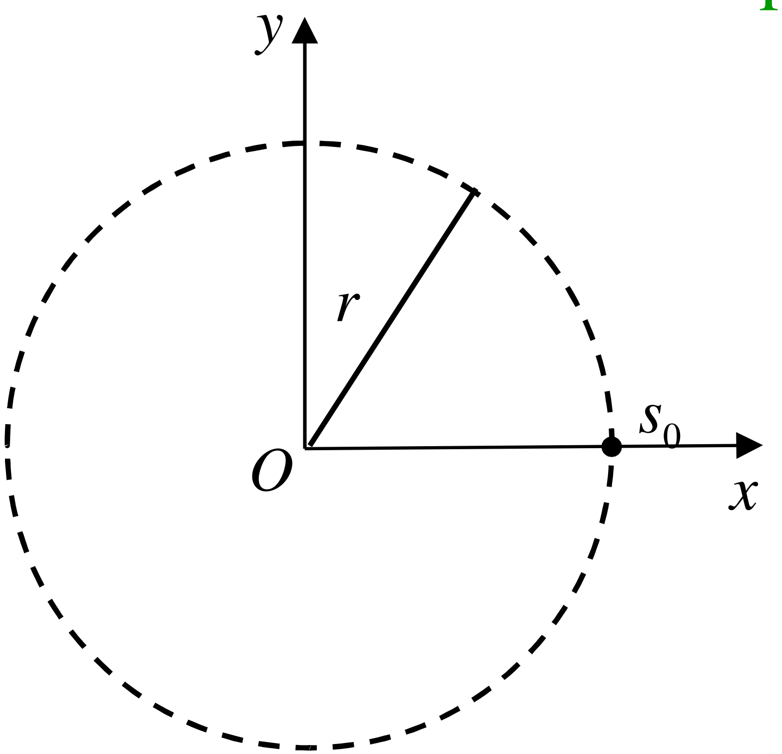
$$\boxed{s = l\sin(\omega t + \alpha)} \qquad \dot{s} = l\omega\cos(\omega t + \alpha) \qquad \begin{aligned}\ddot{s} &= -l\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)\\ &= -\omega^2 s\end{aligned}$$

$$\boxed{\ddot{s} + \omega^2 s = 0}$$

$$\boxed{s = l\cos(\omega t + \alpha)} \qquad \dot{s} = -l\omega\sin(\omega t + \alpha) \qquad \begin{aligned}\ddot{s} &= -l\omega^2 \cos(\omega t + \alpha)\\ &= -\omega^2 s\end{aligned}$$

$$\boxed{s(t) = l_s \sin(\omega t + \alpha_s) + l_c \cos(\omega t + \alpha_c)}$$

Cinematica – Moto circolare uniforme



R. I.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$z = 0$$

Traiettoria

$$s(t) = kt + s_0$$

Equazione oraria

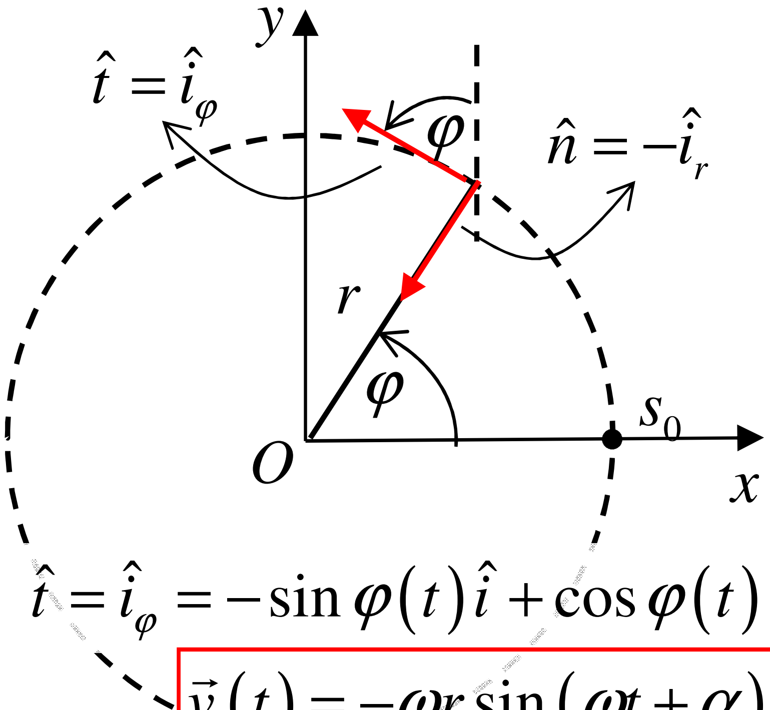
$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\hat{t}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2 \frac{1}{\rho}\hat{n}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}(t) &= k\hat{t} \\ \vec{a}(t) &= \frac{v^2}{r}\hat{n} \end{aligned}}$$

Dipendenza dal tempo?

Cinematica – Moto circolare uniforme



$$\boxed{\vec{v}(t) = k\hat{t} \qquad \vec{a}(t) = \frac{v^2}{r}\hat{n}}$$

$$\varphi(t) = \frac{s(t)}{r} = \frac{k}{r}t + \frac{s_0}{r} = \omega t + \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\varphi}(t) = \omega = \frac{k}{r} = \frac{v}{r} \qquad k = v = \omega r$$

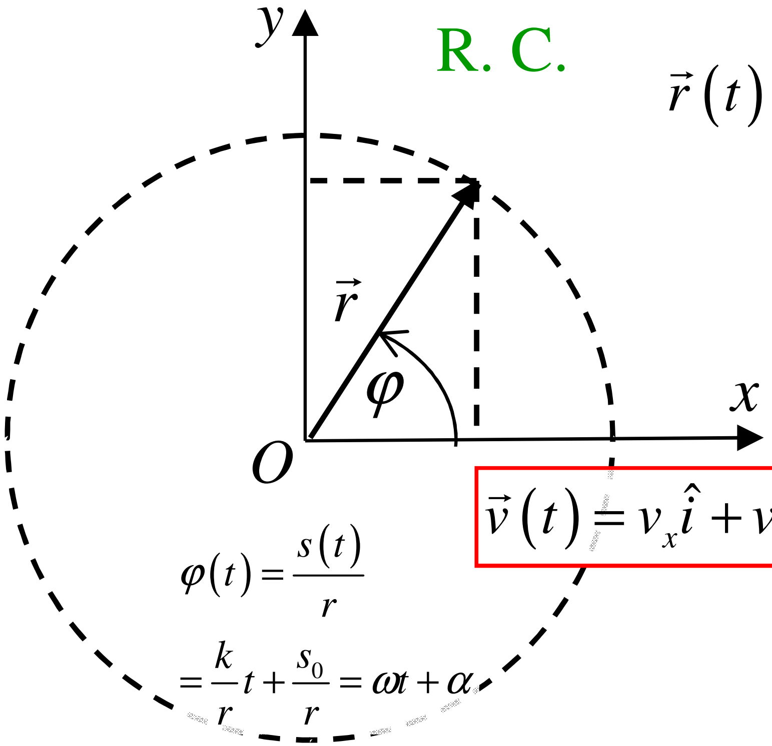
$$\hat{t} = \hat{i}_\varphi = -\sin\varphi(t)\,\hat{i} + \cos\varphi(t)\,\hat{j} = -\sin(\omega t + \alpha)\,\hat{i} + \cos(\omega t + \alpha)\,\hat{j}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = -\omega r\sin(\omega t + \alpha)\,\hat{i} + \omega r\cos(\omega t + \alpha)\,\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}}$$

$$\hat{n} = -\hat{i}_r = -\cos\varphi(t)\,\hat{i} - \sin\varphi(t)\,\hat{j} = -\cos(\omega t + \alpha)\,\hat{i} - \sin(\omega t + \alpha)\,\hat{j}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = -\omega^2 r\cos(\omega t + \alpha)\,\hat{i} - \omega^2 r\sin(\omega t + \alpha)\,\hat{j} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}}$$

Cinematica – Moto circolare uniforme



$$\varphi(t) = \frac{s(t)}{r} = \frac{k}{r}t + \frac{s_0}{r} = \omega t + \alpha$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

$$x(t) = r\cos(\omega t + \alpha)$$

$$y(t) = r\sin(\omega t + \alpha)$$

$$v_x(t) = -\omega r\sin(\omega t + \alpha)$$

$$v_y(t) = \omega r\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = -\omega r\sin(\omega t + \alpha)\hat{i} + \omega r\cos(\omega t + \alpha)\hat{j}}$$

$$a_x(t) = -\omega^2 r\cos(\omega t + \alpha)$$

$$a_y(t) = -\omega^2 r\sin(\omega t + \alpha)$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = -\omega^2 r\cos(\omega t + \alpha)\hat{i} - \omega^2 r\sin(\omega t + \alpha)\hat{j}}$$

Le componenti di $\vec{r}$ si "muovono" di moto armonico

$$a_x + \omega^2 r_x = 0 \qquad a_y + \omega^2 r_y = 0$$