

Fisica Generale A

*Gravitazione
universale*

Scuola di Ingegneria e Architettura

UNIBO – Cesena

Anno Accademico 2015 – 2016

Gravitazione Universale

Il contesto storico

			1500	10	20	30	40	50	60	70	80	90	1600	10	20	30	40	50	60	70	80	90	1700	
N. C.	1473 - 1543	...	(XXX)	(XXX)	(XXX)	(XXX)	XX	70																
T. B.	1546 - 1601						XX	XXX	XXX	XXX	XXX	45	X	55										
G. K.	1571 - 1630								XXXXX	XXX	20	XXX	XXX	XXX	X	59								
G. G.	1564 - 1642								XX	XXX	XXX	27	XXX	XXX	XXX	XXX	X	78						
I. N.	1642 - 1727															XXXX	XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	...	85

Nicola Copernico – Torun, Polonia 19/02/1473 – 24/05/1543

Tycho Brahe – Knudstrup, Danimarca 14/12/1546 – 24/10/1601

Giovanni Keplero – Weil der Stadt, Germania 27/12/1571 – 15/11/1630

Galileo Galilei – Pisa, Italia 15/02/1564 – 08/01/1642

Isaac Newton – Woolsthorpe-by-Colsterworth, Inghilterra 25/12/1642 – 20/03/1727



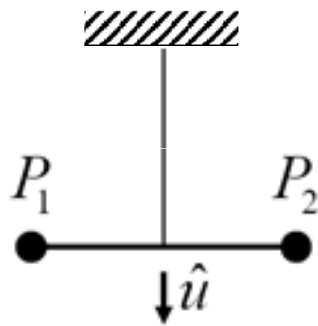
<http://www.youtube.com/watch?v=-giIsnp3sQk>

<http://www.youtube.com/watch?v=SGrO4X1Newo>

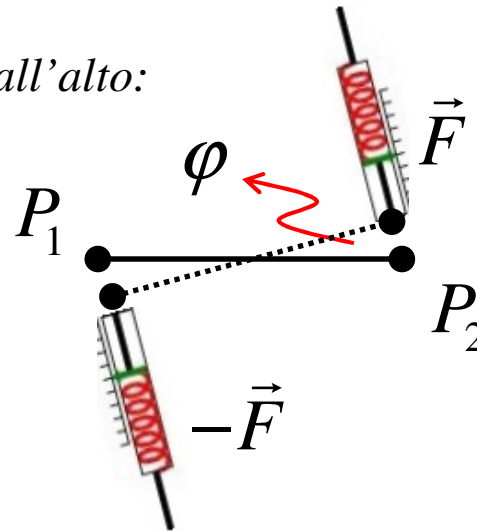
Esperimento di Cavendish

Henry Cavendish (Nizza 1731 – Londra 1810)

Bilancia di torsione



Dall'alto:



$$\mathcal{M}_u^F = F \|P_1 - P_2\|$$

All'equilibrio:

$$\mathcal{M}_u^F + \mathcal{M}_u^T = 0$$



*Sperimentalmente
si osserva che*

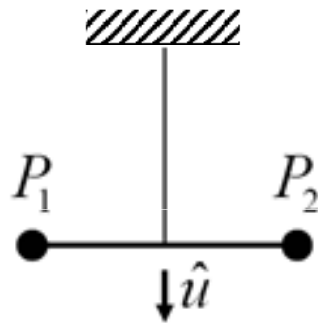
$$\|P_1 - P_2\| F = k\varphi$$



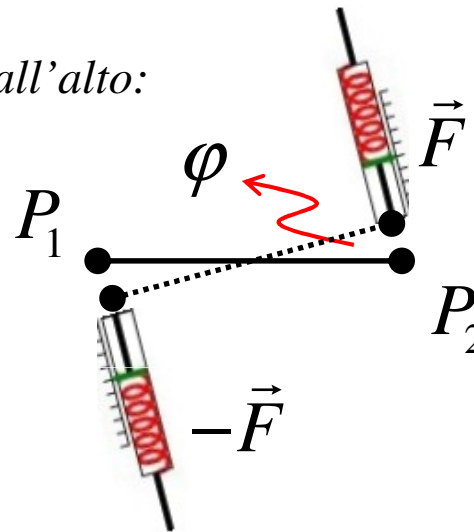
$$\mathcal{M}_u^T = -k\varphi$$

Esperimento di Cavendish

Bilancia di torsione



Dall'alto:

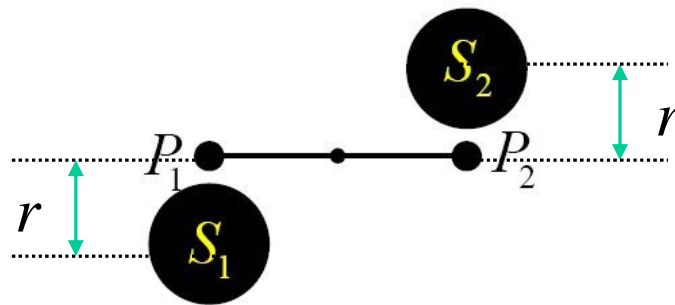


$$\|P_1 - P_2\| F = k\varphi$$

Procedimento:

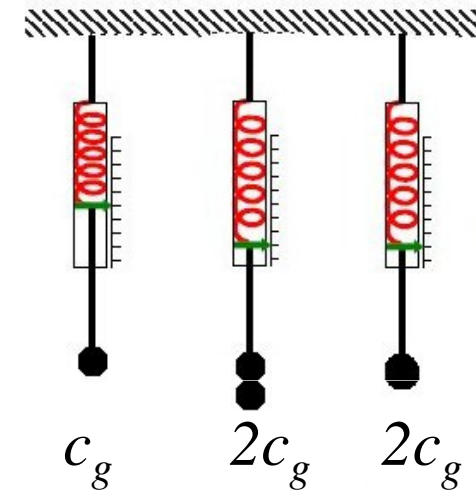
- Conoscendo F , $P_1 - P_2$ e misurando φ , possiamo ricavare k , cioè “calibrare” la bilancia.
- In seguito, misurando l'angolo φ prodotto da una forza F incognita possiamo ricavare la forza incognita.

Esperimento di Cavendish



$$\varphi_i = \varphi(k, c_{gS_i}, r_i)$$

Ipotesi: I corpi possiedono una “carica gravitazionale” responsabile della forza di attrazione gravitazionale



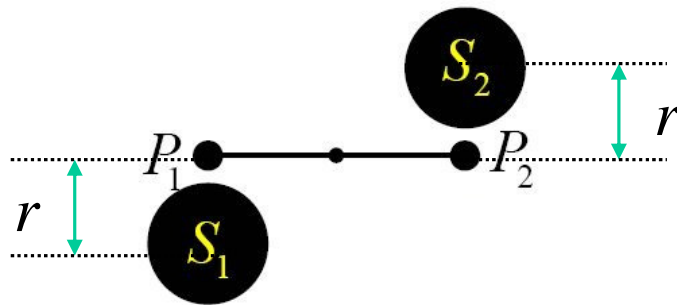
L'esperimento consiste nel misurare gli angoli di torsione rispetto all'equilibrio, dovuti all'attrazione tra le sfere P ed S, per diversi valori di c_g delle sfere, per diverse distanze r fra le stesse e anche con diverse bilance di torsione.

Dalle misure si ottiene:

$$\varphi = \gamma_g \frac{c_{gP} c_{gS}}{r^2} \frac{|P_1 - P_2|}{k}$$



Esperimento di Cavendish



$$\|P_1 - P_2\| F = k \varphi \quad \rightarrow$$

$$\varphi = \gamma_g \frac{c_{gP} c_{gS}}{r^2} \frac{\|P_1 - P_2\|}{k}$$

$$F = \varphi \frac{k}{\|P_1 - P_2\|}$$

$$F = \gamma_g \frac{c_{gP} c_{gS}}{r^2} \frac{\|P_1 - P_2\|}{k} \frac{k}{\|P_1 - P_2\|} \quad \rightarrow$$

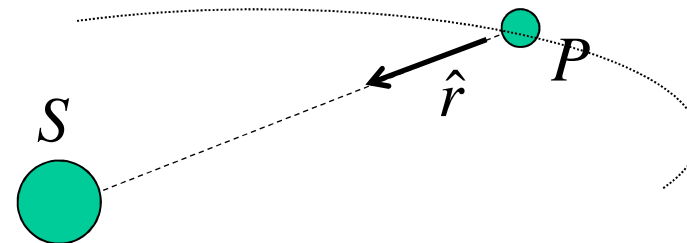
$$\vec{F} = \gamma_g \frac{c_{gP} c_{gS}}{r^2} \hat{r}$$

Esperimento di Cavendish – Gravitazione Universale

In conclusione

- a) Scegliendo opportunamente le unità di carica gravitazionale, dalle misure di Cavendish è possibile ricavare la costante universale γ_g .*
- b) Un corpo P che si trova a distanza r da un altro corpo S , cambierà il suo stato di moto a causa della forza misurata da Cavendish, acquistando una accelerazione in base al secondo principio della dinamica.*

$$\vec{F} = \gamma_g \frac{c_{gP} c_{gS}}{r^2} \hat{r} = m_P \vec{a}_P$$



Esperimento di Cavendish – Gravitazione Universale

Un corpo $\mathbf{P}$ che si trova a distanza $\mathbf{r}$ da un altro corpo $\mathbf{S}$, cambierà il suo stato di moto a causa della forza misurata da Cavendish, acquistando una accelerazione in base al secondo principio della dinamica, che nel caso specifico si scrive:

$$\vec{F} = \gamma_g \frac{C_{gP} C_{gS}}{r^2} \hat{r} = m_P \vec{a}_P$$

E il rapporto tra la sua carica gravitazionale e la sua massa inerziale sarà dato da:

*Normalmente la carica gravitazionale viene chiamata **massa gravitazionale***

$$\frac{m_{gP}}{m_P} = \frac{r^2}{\gamma_g m_{gS}} a$$

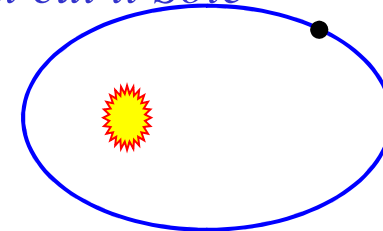
Misurando r ed a e conoscendo m_{gS} è possibile calcolare il rapporto m_{gP}/m_P

Gravitazione Universale

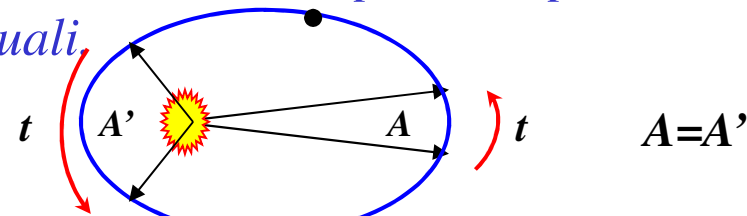
Leggi di Keplero

1ª Legge: I pianeti si muovono su orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

La forza esercitata dal sole sui pianeti è attrattiva.

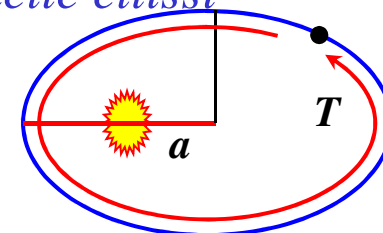


2ª Legge: Il raggio vettore che va dal Sole a un pianeta spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali.



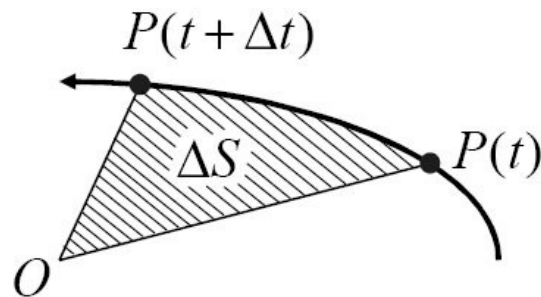
3ª Legge: I quadrati dei tempi periodici di rivoluzione dei pianeti stanno tra loro come i cubi dei semiassi maggiori delle ellissi corrispondenti.

$$a^3 \propto T^2$$



Gravitazione Universale

2ª Legge di Keplero: Il raggio vettore che va dal Sole a un pianeta spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali.



$$A(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

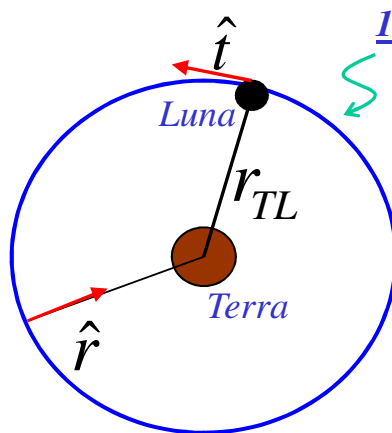
$$\vec{A} = \text{cost}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{P} - \vec{O}) \wedge \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}[\cancel{\vec{v} \wedge \vec{v}} + (\vec{P} - \vec{O}) \wedge \vec{a}] = \vec{0} \Rightarrow (\vec{P} - \vec{O}) \parallel \vec{a}$$

L'accelerazione, e quindi la forza esercitata dal sole su un pianeta, è diretta lungo il raggio vettore che unisce sole e pianeta.

Gravitazione Universale



1ª Legge di Keplero

$$\vec{a} = \cancel{\ddot{r}} + \dot{s}^2 \frac{1}{\rho} \hat{r}$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r_{TL}} \hat{r}$$

2ª Legge di Keplero

$$v = \frac{2\pi r_{TL}}{T}$$

$$a = \frac{4\pi^2 r_{TL}}{T^2}$$

3ª Legge di Keplero



$$T^2 = k_T r_{TL}^3$$



$$a = \frac{4\pi^2}{k_T r_{TL}^2}$$

Simmetrizzazione basata sul
3° Principio della dinamica.

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{TL} = m_L \left(\frac{4\pi^2}{k_T} \right) \frac{1}{r_{TL}^2} \hat{r}} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{LT} = -m_T \left(\frac{4\pi^2}{k_L} \right) \frac{1}{r_{TL}^2} \hat{r}}$$

* N.B. Nel caso di orbita ellittica, esprimendo l'accelerazione in coordinate cilindriche si annulla la componente trasversa

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \hat{i}_r + \cancel{(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})} \hat{i}_\phi$$

Gravitazione Universale

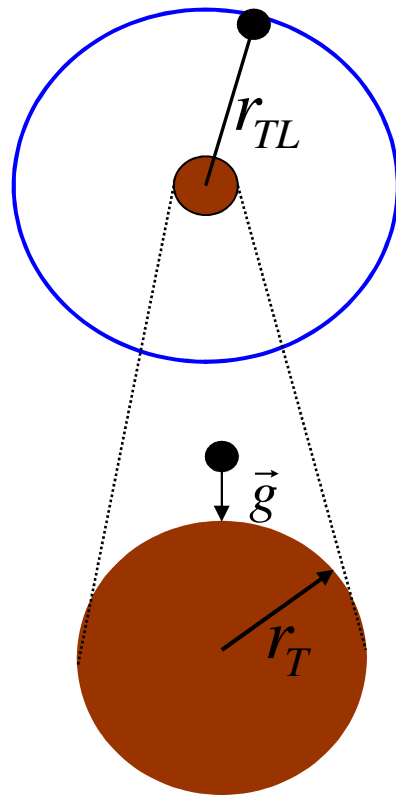
Simmetrizzazione basata sul 3° Principio della dinamica.

$$\vec{F}_{TL} + \vec{F}_{LT} = \left(\frac{m_L}{k_T} - \frac{m_T}{k_L} \right) \frac{4\pi^2}{r_{TL}^2} \hat{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_L k_L = m_T k_T = K \\ \frac{4\pi^2}{k_T} = \frac{4\pi^2}{K} m_T = \gamma m_T \end{cases}$$

$$\vec{F}_{TL} = m_L \left(\frac{4\pi^2}{k_T} \right) \frac{1}{r_{TL}^2} \hat{r}$$

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_T m_L}{r_{TL}^2} \hat{r}$$

Gravitazione Universale



$$a = \frac{4\pi^2 r_{TL}}{T^2}$$

$$r_{TL} \approx 3,84 \cdot 10^8 m$$

$$T = 2,36 \cdot 10^6 s$$

$$a \approx 2,72 \cdot 10^{-3} ms^{-2}$$

$$g \approx 9,8 ms^{-2}$$

$$r_T \approx 6,4 \cdot 10^6 m$$

$$\frac{g}{a} \approx 3604$$

$$\left(\frac{r_{TL}}{r_T} \right)^2 \approx 3600$$

$$a = \frac{4\pi^2}{k_T r_{TL}^2}$$



$$g = \frac{4\pi^2}{k_T r_T^2}$$



$$\frac{g}{a} = \frac{r_{TL}^2}{r_T^2}$$

$$g = \gamma \frac{m_T}{r_T^2}$$

$$\vec{p} = m\vec{g}$$



$$\vec{p} = \gamma \frac{m m_T}{r_T^2} \hat{r}$$



$$\left(\frac{4\pi^2}{k_T} \right) = \gamma m_T$$

Gravitazione Universale

Legge di gravitazione universale di Newton:

Un qualsiasi punto materiale P_1 , di massa m_1 , esercita su un qualunque altro punto materiale P_2 , di massa m_2 , una forza gravitazionale F_{12} diretta secondo la congiungente P_1 con P_2 , attrattiva, di modulo direttamente proporzionale al prodotto delle due masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra P_1 e P_2 .

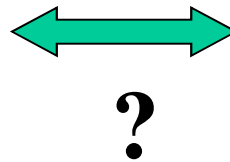
$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad , \quad \vec{r} = P_2 - P_1$$

γ (talvolta scritta anche G) = costante universale, dipende solo dalle unità di misura

Gravitazione Universale

Massa inerziale – massa gravitazionale

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$



$$\vec{F}_{12} = \gamma_g \frac{c_{g1} c_{g2}}{r^2} \hat{r}$$

Caduta libera di un punto materiale di massa inerziale = m

Osservazione sperimentale

$$\vec{F} = \gamma_g \frac{c_g c_{gT}}{r^2} \hat{r} = m \vec{g} \quad \longrightarrow \quad \frac{c_g}{m} = \frac{gr^2}{\gamma_g c_{gT}} = \text{costante}$$

Se per entrambe le grandezze, massa inerziale m (o m_i) e massa gravitazionale c_g (o m_g), si sceglie lo stesso campione unitario



$$\begin{aligned} c_g &= m \\ \gamma_g &= \gamma \end{aligned}$$

Gravitazione Universale

Esperimento di Cavendish

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_{g1} m_{g2}}{r^2} \hat{r} \Rightarrow \gamma = \frac{r^2}{m_{g1} m_{g2}} F_{12}$$

Costante della Gravitazione Universale $\gamma = 6.6726 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

$$m\vec{g} = \gamma \frac{mM}{r_T^2} \hat{r} \Rightarrow M = \frac{gr_T^2}{\gamma}$$

Massa della terra $M = 5.9737 \times 10^{24} kg$

