Fisica Generale A

Oscillatore Armonico

Scuola di Ingegneria e Architettura

UNIBO – Cesena

Anno Accademico 2015 – 2016

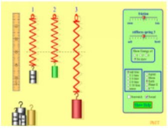
Oscillatore Armonico

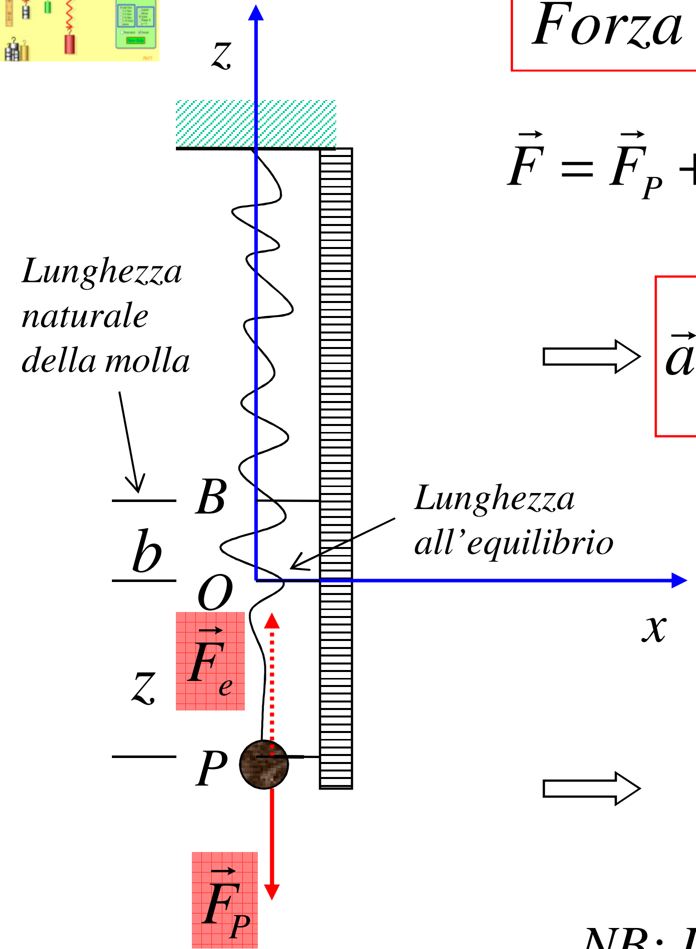
Forza elastica (dipendente da P)

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \qquad -k(P-O) = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = -\frac{k}{m}(P-O)} \qquad \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

P.F. - Es. 2: Forza elastica





Forza dipendente da P

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_P + \vec{F}_e = m\vec{g} - k\left(P - B\right) = m\vec{a}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g} - \frac{k}{m}\left(P - B\right)} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g - \frac{k}{m}\left(z - b\right) \end{cases}$$

All'equilibrio: $-mg + kb = 0 \; . \; \Rightarrow g = \frac{k}{m} b$

$$\Longrightarrow \ddot{z} = -\frac{k}{m} b - \frac{k}{m}\left(z - b\right) \Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0}$$

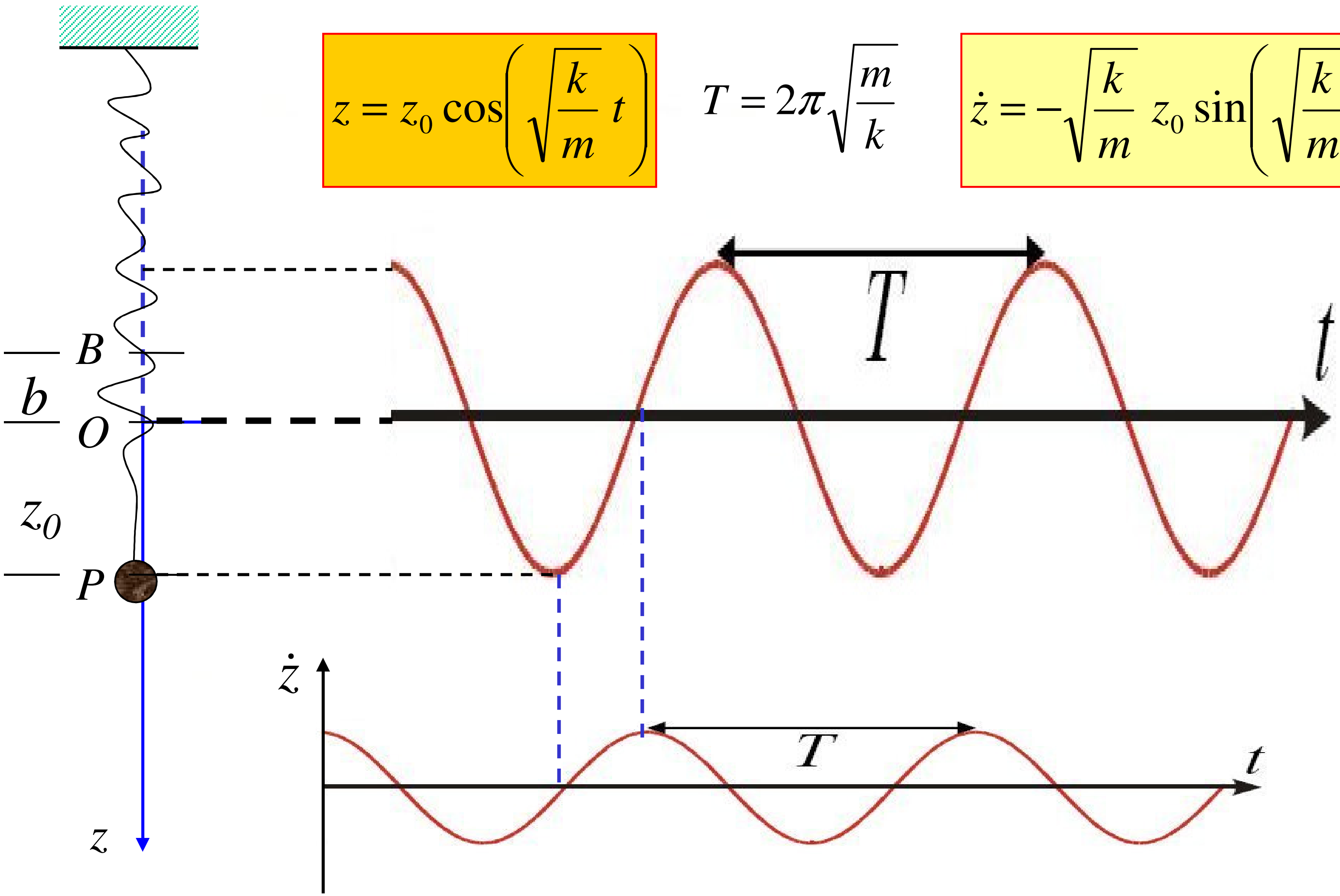
NB: Il risultato non dipende da g !

Oscillatore Armonico

$$z = z_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\dot{z} = -\sqrt{\frac{k}{m}}\, z_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$



Oscillatore Armonico

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0}$$

Soluzione particolare (condizioni iniziali date)

$$x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)} \quad \boxed{\dot{x} = -\sqrt{\frac{k}{m}}\, x_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)}$$

Oscillatore Armonico

Soluzione generale

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \boxed{\dot{x} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \alpha)}$$

ω_0 = *frequenza naturale dell'oscillatore*

oppure

$$\boxed{x = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)} \qquad \boxed{\dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t) + b\omega_0 \cos(\omega_0 t)}$$

$$A\cos(\omega_0 t + \alpha) = A\cos(\omega_0 t)\cos\alpha - A\sin(\omega_0 t)\sin\alpha \qquad a = A\cos\alpha \quad b = -A\sin\alpha$$

Oscillatore Armonico

Conservazione dell'energia meccanica

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\alpha\right)$$

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{k}{m}}A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\alpha\right)$$

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\alpha\right) \\ V &= \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\alpha\right) \end{aligned}\right\} \quad E = T + V = \frac{1}{2}kA^2$$

$$Se\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$$

Oscillatore Armonico

Oscillazioni Forzate

$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)}$

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = F(t)}$$

Consideriamo una forza del tipo $F(t) = F_0 \cos(\omega t - \alpha)$

e verifichiamo se esiste una soluzione del tipo $x = C\cos(\omega t - \alpha)$

$$-m\omega^2 C \cancel{\cos(\omega t - \alpha)} + kC \cancel{\cos(\omega t - \alpha)} = F_0 \cancel{\cos(\omega t - \alpha)} \Rightarrow C = \frac{F_0}{m\omega_0^2 - m\omega^2}$$

$$\boxed{x = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\cos(\omega t - \alpha)}$$

$$\begin{cases} \omega_0 = \textit{frequenza naturale} \\ \omega = \textit{frequenza applicata} \end{cases}$$

Oscillatore Armonico Forzato

Usando i numeri complessi

$$\hat{x} = x + iy$$

$$\boxed{m\ddot{\hat{x}} + k\hat{x} = \hat{F}(t)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$m\ddot{x} + im\ddot{y} + kx + iky = F_x(t) + iF_y(t)$$

$$\hat{F}(t) = \hat{F}_0 e^{i\omega t} = F_0 e^{-i\alpha} e^{i\omega t} = F_0 e^{i(\omega t - \alpha)} = F_0 \cos(\omega t - \alpha) + F_0 i \sin(\omega t - \alpha)$$

e verifichiamo se esiste una soluzione del tipo $\hat{x} = \hat{C} e^{i\omega t}$

$$-m\omega^2 \hat{C} \cancel{e^{i\omega t}} + k\hat{C}\cancel{e^{i\omega t}} = \hat{F}_0 \cancel{e^{i\omega t}} \quad \Rightarrow \quad \hat{C} = \frac{\hat{F}_0}{k - m\omega^2}$$

$$\boxed{\hat{x} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i(\omega t - \alpha)}}$$

$$\boxed{x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t - \alpha)}$$

Oscillatore Armonico Forzato

Lo sfasamento α è caratteristico della forza esterna.
Questa soluzione particolare vale quindi per condizioni iniziali fissate:

$$x = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \cos\left(\omega t - \alpha\right)$$

$$\dot{x} = \frac{-\omega F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \sin\left(\omega t - \alpha\right)$$

$$x(0) = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \cos\alpha$$

$$\dot{x}(0) = \frac{\omega F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \sin\alpha$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\omega}\frac{\dot{x}(0)}{x(0)}\right)$$

Oscillatore Armonico Forzato

Equazione differenziale omogenea

$$\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x=0}$$

$$\boxed{x=a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)}$$

Equazione differenziale non omogenea

$$\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x=F(t)/m}$$

$$\boxed{x=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\cos(\omega t-\alpha)}$$

Soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea

$$\boxed{x=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\cos(\omega t-\alpha)+a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)}$$

Oscillatore Armonico Forzato

Problema fondamentale

$$x(t)=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\cos(\omega t-\alpha)+a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t)=\frac{-\omega F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\sin(\omega t-\alpha)-a\omega_0\sin(\omega_0 t)+b\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

$$a=x(0)-\frac{F_0\cos\alpha}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}$$

$$b=\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}-\frac{\omega}{\omega_0}\frac{F_0\sin\alpha}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}$$

Oscillatore Armonico

Oscillatore forzato con smorzamento

Se, oltre alla forza $\hat{F}(t) = \hat{F}_0 e^{i\omega t}$, *agisce una forza di attrito proporzionale alla velocità ...*

$$m\ddot{\hat{x}} = -k\hat{x} - \lambda\dot{\hat{x}} + \hat{F}(t)$$

... esiste ancora una soluzione del tipo $\hat{x} = \hat{C}e^{i\omega t}$ *?*

$$-m\omega^2\hat{C} = -k\hat{C} - i\omega\lambda\hat{C} + \hat{F}_0 \quad \Rightarrow \quad \hat{C} = \frac{\hat{F}_0}{k + i\omega\lambda - m\omega^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{k}{m} &= \omega_0^2 \\ \frac{\lambda}{m} &= \gamma \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\hat{C} = \frac{\hat{F}_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega\right)}}$$

Oscillatore Forzato con Smorzamento

$$\hat{C} = \frac{\hat{F}_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega\right)}$$

$$\hat{x} = \hat{C}e^{i\omega t} = \frac{\hat{F}_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega\right)} e^{i\omega t}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega\right)} = \rho e^{i\vartheta}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho^2 = \hat{\rho}\hat{\rho}^*$$

$$\hat{F}_0 = F_0 e^{-i\alpha}$$

$$\hat{x} = \rho e^{i\vartheta}\hat{F} = \rho e^{i\vartheta} F_0 e^{i(\omega t - \alpha)} = \rho F_0 e^{i(\omega t - \alpha + \vartheta)}$$

$$x(t) = \rho F_0 \cos\left(\omega t - \alpha + \vartheta\right)$$

$$\rho^2 = \frac{1}{m^2\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2\right]}$$

$$\rho m\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega\right) = e^{-i\vartheta} = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$$

$$\tan\vartheta = -\gamma\omega / \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \alpha - \arctan\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

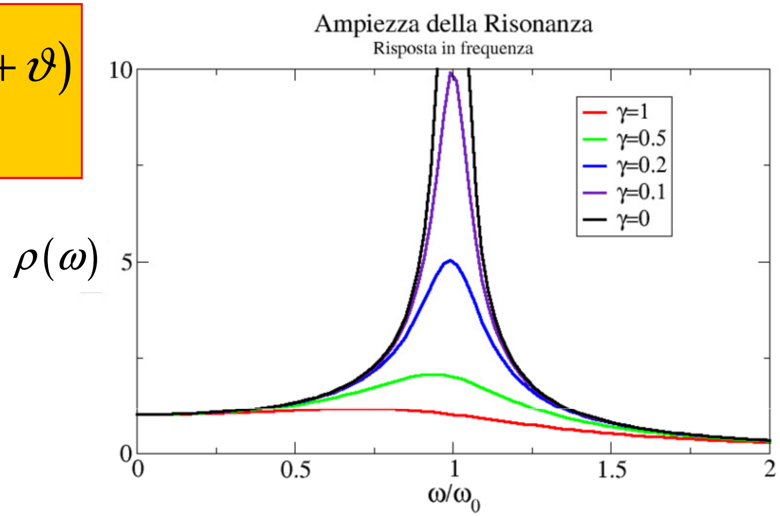
Oscillatore Forzato con Smorzamento

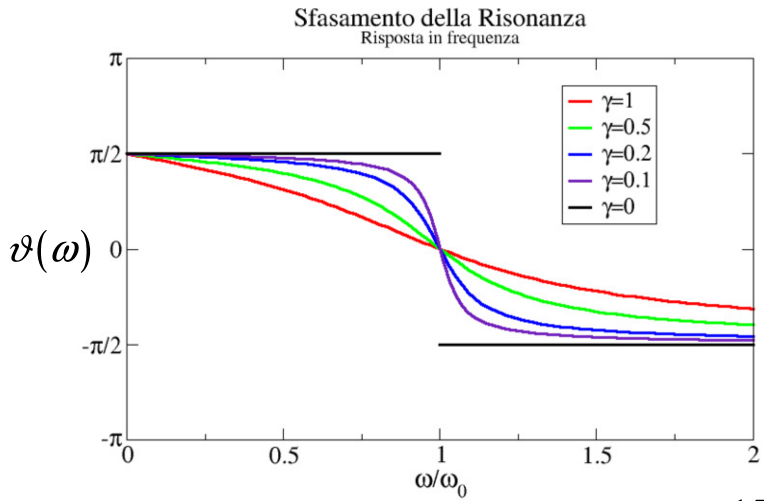
$$x(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \alpha + \vartheta\right)$$

$$x(t) = \rho F_0 \cos\left(\omega t - \alpha + \vartheta\right)$$

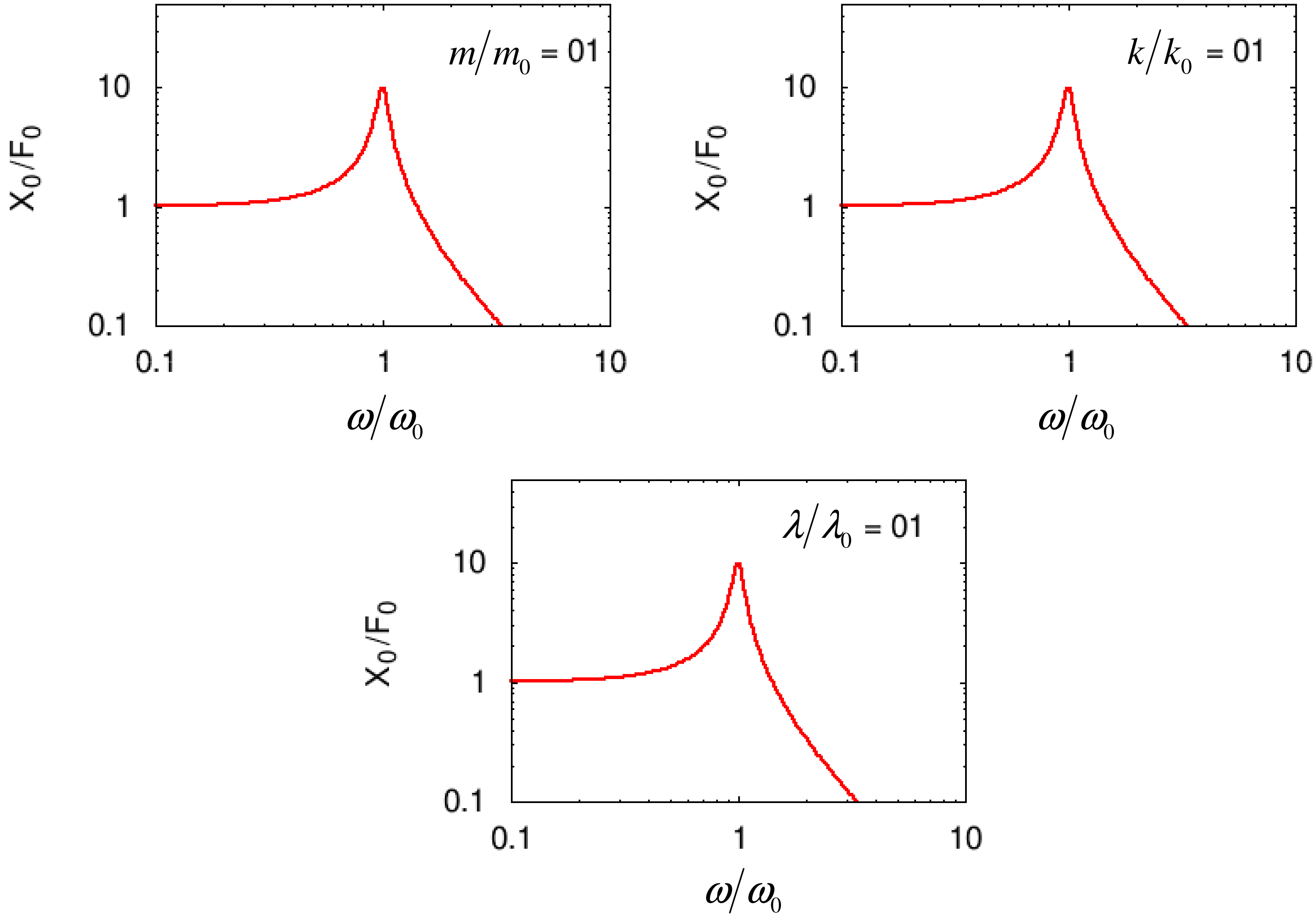
$$\rho = \frac{1}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

$$\tan\vartheta = -\gamma\omega \big/ \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$$





Oscillatore Forzato con Smorzamento



Oscillatore Forzato con Smorzamento

$$m\ddot{x} + kx + \lambda\dot{x} = F(t)$$

Bilancio energetico

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \qquad \frac{\lambda}{m} = \gamma$$

$$W_F = F(t)\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dt} + m\omega_0^2 x\frac{dx}{dt} + m\gamma\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2\right)}_{E\ =\ \text{energia immagazzinata}} + m\gamma\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

W_F = *potenza erogata da* F

E = *energia immagazzinata*

$$\boxed{W_F = E + W_{disp}}$$

Poniamo $x_0 = \rho F_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 \cos(\omega t - \alpha + \vartheta) \qquad \dot{x}(t) = -x_0\omega\sin(\omega t - \alpha + \vartheta)$

$$\langle E\rangle = \left\langle \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t - \alpha + \vartheta)\right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega t - \alpha + \vartheta)\right\rangle$$

$$\boxed{\langle E\rangle = \frac{1}{4}m x_0^2\left(\omega^2 + \omega_0^2\right)}$$

Oscillatore Forzato con Smorzamento

Bilancio energetico

$$\boxed{\langle E\rangle = \frac{1}{4}m x_0^2\left(\omega^2+\omega_0^2\right)}$$

$$\boxed{v(t) = -x_0\omega\sin(\omega t-\alpha+\vartheta)}$$

$$W = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2\right)+m\gamma\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$\langle W\rangle = \frac{d}{dt}\left\langle\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2\right\rangle+\left\langle m\gamma v^2\right\rangle = \cancel{\frac{d}{dt}}\langle E\rangle+\left\langle m\gamma v^2\right\rangle$$

$$\boxed{\langle W\rangle = \frac{1}{2}m x_0^2\gamma\omega^2}$$

$$\boxed{Q = 2\pi\frac{\langle E\rangle}{T\langle W\rangle}} = \frac{2\pi\langle E\rangle}{(2\pi/\omega)\langle W\rangle} = \omega\frac{\langle E\rangle}{\langle W\rangle} = \frac{\left(\omega^2+\omega_0^2\right)}{2\gamma\omega}$$

Fattore di merito:

$$\frac{\textit{Energia immagazzinata}}{\textit{Energia spesa per ciclo}}$$

$$\boxed{Q \underset{\omega\to\omega_0}{\longrightarrow} \frac{\omega_0}{\gamma}}$$

Oscillatore Forzato con Smorzamento

Lo sfasamento α è caratteristico della forza esterna.
Questa soluzione particolare vale quindi per condizioni iniziali fissate:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \alpha + \vartheta\right)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{-\omega F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}} \sin\left(\omega t - \alpha + \vartheta\right)$$

$$\vartheta = \arctan\left[-\gamma\omega \big/ \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\right]$$

$$x(0) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}} \cos\left(\vartheta - \alpha\right)$$

$$\dot{x}(0) = \frac{-\omega F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}} \sin\left(\vartheta - \alpha\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\omega}\frac{\dot{x}(0)}{x(0)}\right)$$

Oscillatore Smorzato

$$\boxed{m\ddot{\hat{x}}+\lambda\dot{\hat{x}}+k\hat{x}=0}$$

$$\hat{x}=\hat{A}e^{i\omega t}$$

$$\left.\right\}\left(-\omega^2+i\gamma\omega+\omega_0^2\right)\cancel{\hat{A}e^{i\omega t}}=0$$

$$\omega_{12}=i\,\gamma/2\pm\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2/4}=i\,\gamma/2\pm\omega_\gamma \quad\Rightarrow\quad \hat{x}_{12}=\hat{A}_{12}e^{i\left(i\gamma/2\pm\omega_\gamma\right)t}=\hat{A}_{12}e^{-(\gamma/2)t}e^{\pm i\omega_\gamma t}$$

1.- Soluzione generale per $\gamma<2\omega_0$ **:**

$$\boxed{\hat{x}=e^{-(\gamma/2)t}\left(\hat{A}_1e^{+i\omega_\gamma t}+\hat{A}_2e^{-i\omega_\gamma t}\right)}$$

Soluzione reale:

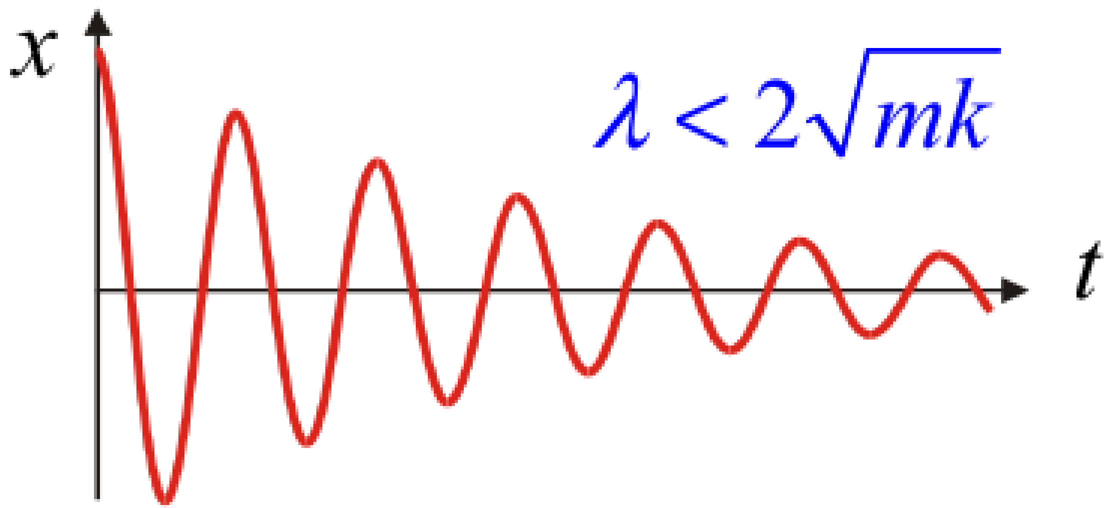
$$\boxed{x=e^{-(\gamma/2)t}\left(\hat{A}e^{+i\omega_\gamma t}+\hat{A}^*e^{-i\omega_\gamma t}\right)=Ae^{-(\gamma/2)t}\cos\left(\omega_\gamma t+\alpha\right)}$$

Oscillatore Smorzato

1.- Soluzione per $\gamma < 2\omega_0$ **:**

$$x = Ae^{-(\gamma/2)t}\cos\left(\omega_\gamma t + \alpha\right)$$

Moto oscillatorio smorzato



Oscillatore Smorzato

2.- Soluzione generale per $\gamma > 2\omega_0$:

$$\omega_{12} = i\gamma/2 \pm i\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2} = i\left(\gamma/2 \pm \omega_\gamma\right)$$

$$\hat{x} = \hat{A}e^{i\omega t}$$

$$\boxed{\hat{x} = \hat{A}_1 e^{-\left(\gamma/2+\omega_\gamma\right)t} + \hat{A}_2 e^{-\left(\gamma/2-\omega_\gamma\right)t}}$$

Soluzione reale:

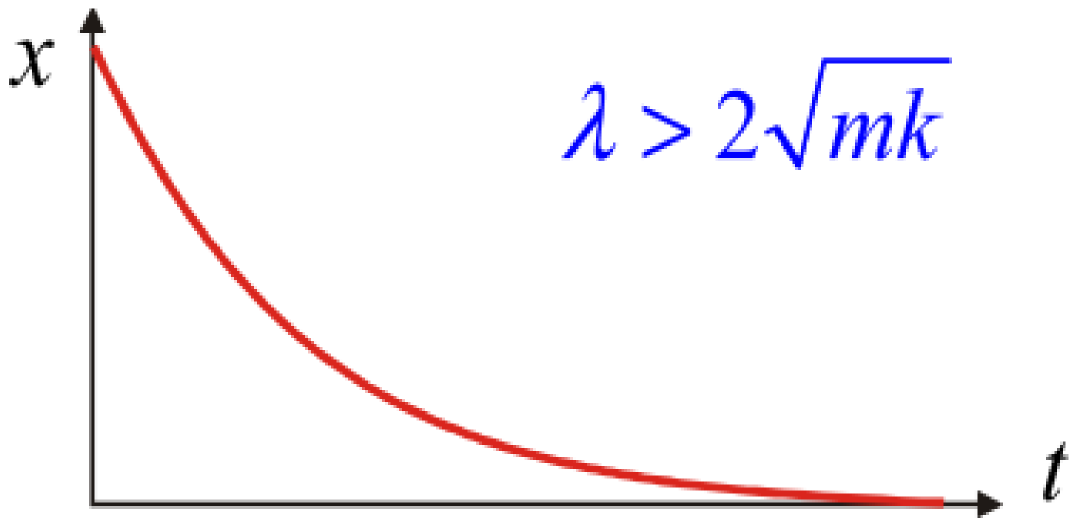
$$\boxed{x = A_1 e^{-\left(\gamma/2+\omega_\gamma\right)t} + A_2 e^{-\left(\gamma/2-\omega_\gamma\right)t}}$$

Oscillatore Smorzato

2.- Soluzione per $\gamma > 2\omega_0$:

$$x = A_1 e^{-\left(\gamma/2+\omega_\gamma\right)t} + A_2 e^{-\left(\gamma/2-\omega_\gamma\right)t}$$

Oscillatore sovrasmorzato



$$\lambda > 2\sqrt{mk}$$

Oscillatore Smorzato

3.- Soluzione per $\gamma = 2\omega_0$:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega_0\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} + \omega_0 x\right) + \omega_0\left(\frac{dx}{dt} + \omega_0 x\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dz}{dt} + \omega_0 z = 0 \\ z = \dfrac{dx}{dt} + \omega_0 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = Ae^{-\omega_0 t} \\ Ae^{-\omega_0 t} = \dfrac{dx}{dt} + \omega_0 x \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dt}e^{\omega_0 t} + \omega_0 x e^{\omega_0 t} = A$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(xe^{\omega_0 t}\right) = A \quad \Rightarrow \quad xe^{\omega_0 t} = At + B \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \left(At + B\right)e^{-\omega_0 t}}$$

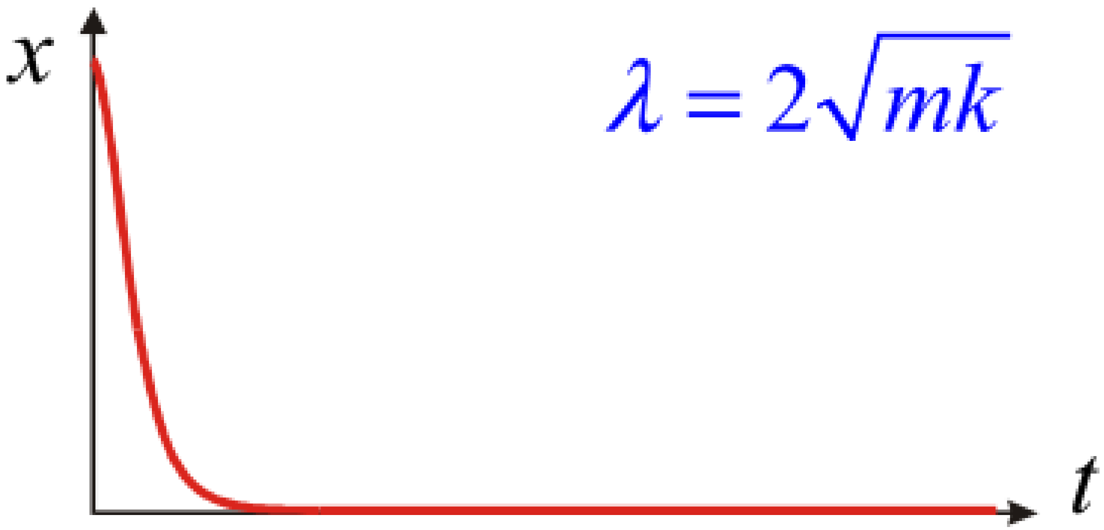
Oscillatore Smorzato

3.- Soluzione per $\gamma = 2\omega_0$ **:**

$$x = \left(At + B \right) e^{-\omega_0 t}$$

Oscillatore criticamente smorzato

http://www.lon-capa.org/~mmp/applist/damped/d.htm



$$\lambda = 2\sqrt{mk}$$

Oscillatore Forzato con Smorzamento

Equazione differenziale omogenea

$$m\ddot{\hat{x}} + \lambda\dot{\hat{x}} + k\hat{x} = 0$$

Equazione differenziale non omogenea

$$m\ddot{\hat{x}} = -k\hat{x} - \lambda\dot{\hat{x}} + \hat{F}(t)$$

1.-
$$\gamma < 2\omega_0$$
$$x = Ae^{-(\gamma/2)t}\cos\left(\omega_\gamma t + \alpha\right)$$

2.-
$$\gamma > 2\omega_0$$
$$x = A_1 e^{-(\gamma/2+\omega_\gamma)t} + A_2 e^{-(\gamma/2-\omega_\gamma)t}$$

3.-
$$\gamma = 2\omega_0$$
$$x = \left(At + B\right)e^{-\omega_0 t}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \alpha + \vartheta\right)$$

$$\vartheta = \arctan\left[-\gamma\omega/\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\right]$$

+

Soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea

Analogia con i circuiti elettrici

Oscillatore meccanico

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$$

x: posizione
m: inerzia meccanica
λ: attrito
k: elasticità
F: forza motrice

Oscillatore elettrico

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=\varepsilon(t)$$

q: carica elettrica
L: induttanza
R: resistenza
C: capacità
ε: forza elettromotrice