Fisica Generale A – Anno accademico 2009/2010 – Prova di verifica del 12 aprile 2010

1. Calcolare il momento del vettore ***v*** = 6***i*** + ***j*** - 15***k***, applicato nel punto $P(1, 3, 0)$, rispetto al punto $O(4, 2, 2)$.

$$\left.\begin{array}{l} P-O=-3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k} \\ \vec{v}=6\hat{i}+\hat{j}-15\hat{k} \end{array}\right\} \vec{\mathscr{M}}_{(O)}=(P-O)\wedge\vec{v}$$

$$\vec{\mathscr{M}}_{(O)}=\det\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & -15 \end{vmatrix}=-13\hat{i}-57\hat{j}-9\hat{k}$$

$$\begin{cases} (P-O)\cdot\vec{\mathscr{M}}_{(O)}=39-57+18=0 \\ \vec{v}\cdot\vec{\mathscr{M}}_{(O)}=-78-57+135=0 \end{cases}$$

2. Due punti materiali identici scivolano senza attrito su altrettante guide, anche queste identiche tranne che per il piccolo avvallamento simmetrico della guida B. Quale dei due punti raggiunge per primo la fine della guida? Argomentare.

3. Nel luglio 2005 la NASA ha annunciato la scoperta di un decimo pianeta nel sistema solare oltre Plutone. Battezzato provvisoriamente 2003UB313, il pianeta avrebbe un periodo orbitale di 557 anni.
   a) Sapendo che il semiasse maggiore dell'orbita terrestre è $a_T = 149.60 \times 10^6$ *km*, calcolare il semiasse maggiore dell'orbita di 2003UB313.

$$\frac{T_T^2}{a_T^3}=\frac{T_X^2}{a_X^3}$$

$$a_X=\sqrt[3]{\frac{T_X^2}{T_T^2}}\,a_T=\sqrt[3]{\frac{557^2}{1}}\;149.60\times10^6\;km=\sqrt[3]{3.10\times10^5}\;149.60\times10^6\;km$$

$$=67.70\cdot149.60\times10^6\;km=10\;123\times10^6\;km$$

   Dopo accurate osservazioni si è scoperto che 2003UB313 ha anche un satellite naturale che orbita a una distanza media di 36.000 *km* dal pianeta con un periodo orbitale di 14 giorni.
   b) In base alle misure effettuate, e considerando l'orbita del satellite circolare, qual è la massa di 2003UB313?

$$m_{sat}\omega^2 r=\gamma\frac{m_X m_{sat}}{r^2}$$

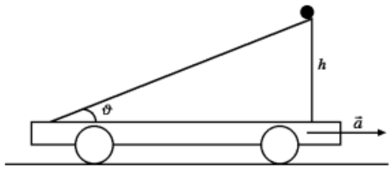
$$m_X=\frac{\omega^2 r^3}{\gamma}=\frac{1}{\gamma}\,\frac{4\pi^2 r^3}{T^2}=\frac{1}{6.67\times10^{-11}\;m^3\;kg^{-1}\;s^{-2}}\;\frac{4\pi^2 4.67\times10^{19}m^3}{(14\cdot86\;400\;s)^2}$$

$$=\frac{1}{6.67\times10^{-11}\;kg^{-1}\;s^{-2}}\;\frac{39.48\cdot4.67\times10^{19}}{(1.21\times10^6\;s)^2}$$

$$=\frac{1}{6.67\times10^{-11}\;kg^{-1}\;s^{-2}}\;\frac{1.84\times10^{21}}{1.46\times10^{12}\;s^2}$$

$$=\frac{1.84\times10^{24}}{97.38}\;kg=1.89\times10^{22}\;kg$$

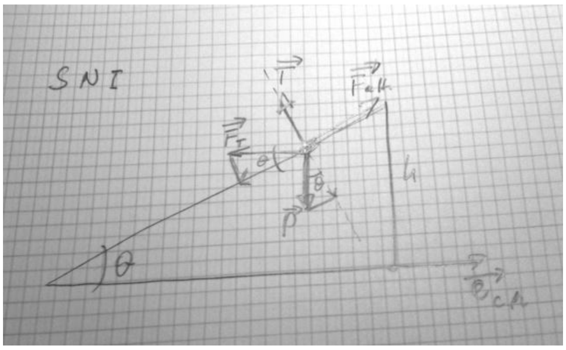
4. Un carrello si muove orizzontalmente con accelerazione costante $\boldsymbol{a}_{cr}$. Su di esso è fissato un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Un punto materiale di massa m parte da fermo rispetto al carrello da un'altezza h e scivola lungo il piano. Il punto è soggetto anche a una forza di attrito che si oppone al moto e il cui modulo è dato da μT, dove μ è una costante (coefficiente di attrito) e T è il modulo della reazione vincolare.

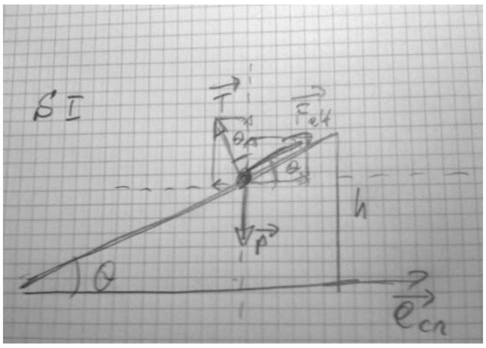


Calcolare:

a) L'accelerazione del punto materiale;

b) Il tempo che il punto materiale impiega per percorrere tutto il piano inclinato.





SNI :

$$\vec{F}_R = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{att} + \vec{F}_T \begin{cases} F_{R\perp} = mg\cos\vartheta - T - ma_{cr}\sin\vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad T = m\left(g\cos\vartheta - a_{cr}\sin\vartheta\right) \\ F_{R\|} = mg\sin\vartheta - \mu T + ma_{cr}\cos\vartheta = ma \quad \Rightarrow \\ a = \left(g + \mu a_{cr}\right)\sin\vartheta + \left(a_{cr} - \mu g\right)\cos\vartheta \end{cases}$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{h}{\sin\vartheta} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a\sin\vartheta}} = \sqrt{\frac{2h}{\left[\left(g + \mu a_{cr}\right)\sin\vartheta + \left(a_{cr} - \mu g\right)\cos\vartheta\right]\sin\vartheta}}$$

SI :

$$\vec{F}_A = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{att} \begin{cases} F_{AV} = mg - T\cos\vartheta - \mu T\sin\vartheta = ma'_V \\ F_{AH} = T\sin\vartheta - \mu T\cos\vartheta = ma'_H \\ T = m\left(g\cos\vartheta - a_{cr}\sin\vartheta\right) \end{cases}$$

$$a'_V = g - \left(g\cos\vartheta - a_{cr}\sin\vartheta\right)\left(\cos\vartheta + \mu\sin\vartheta\right) = \left(g\sin\vartheta - \mu g\cos\vartheta + a_{cr}\cos\vartheta + \mu a_{cr}\sin\vartheta\right)\sin\vartheta$$

$$h = \frac{1}{2}a'_V t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a'_V}} = \sqrt{\frac{2h}{\left[\left(g + \mu a_{cr}\right)\sin\vartheta + \left(a_{cr} - \mu g\right)\cos\vartheta\right]\sin\vartheta}}$$

$$a'_H = \left(g\cos\vartheta - a_{cr}\sin\vartheta\right)\left(\sin\vartheta - \mu\cos\vartheta\right) = \left[\left(g + \mu a_{cr}\right)\cos\vartheta - \left(a_{cr} - \mu g\right)\sin\vartheta\right]\sin\vartheta - \mu g$$