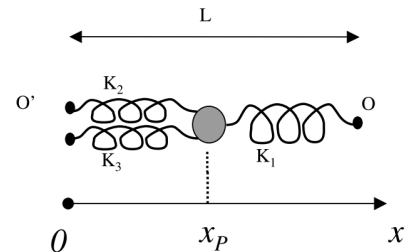


1. Una forza costante F è applicata a un punto materiale di massa m spostandolo di una distanza d . La stessa forza è poi applicata al centro di massa di una sfera rigida di massa $2m$, e percorre ancora la distanza d . Il punto si muove senza attrito, e la sfera si muove rotolando senza strisciare con velocità angolare ω . Esprimere il lavoro compiuto dalla forza nelle due situazioni. Il lavoro, $L = Fd$, è lo stesso in entrambi i casi.

2. Si suole dire che gli astronauti in orbita attorno alla Terra “galleggiano” in assenza di gravità nell’astronave che li trasporta (o anche fuori da questa in caso di “passeggiata” spaziale). È corretta quest’affermazione? Motivare la risposta, descrivendo la situazione sia dal punto di vista di un osservatore terrestre, sia da quello dell’astronave.

L’affermazione è sbagliata: a) Dal punto di vista terrestre l’astronauta orbita intorno alla terra a causa dell’attrazione gravitazionale che il nostro pianeta esercita su di lui. b) Dal punto di vista dell’astronave l’astronauta è immobile (galleggia) perché la forza di gravità (reale) è compensata dalla forza di trascinamento, centrifuga (fittizia), che si genera in questo sistema di riferimento non inerziale.

3. Un punto materiale giace fermo su di un piano liscio, vincolato a 3 molle di costanti elastiche $K_1 = K_2 = K_3 = K$ e lunghezza a riposo nulla. Le molle vengono tese in modo che l’estremo libero della molla 1 è vincolato al punto O e quello delle molle 2 e 3 al punto O' , punti distanti L l’uno dall’altro. Determinare l’allungamento delle molle quando il sistema si trova in equilibrio.



$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_2 = \vec{F}_3 = -K\Delta\vec{l}_{23} \\ \vec{F}_1 = -K\Delta\vec{l}_1 \end{aligned} \right\} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \left[-2Kx_p + K(L - x_p) \right] \hat{i} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$K(L - 3x_p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_p = \frac{1}{3}L \\ L - x_p = \frac{2}{3}L \end{cases}$$

4. Un proiettile di massa $M = 10 \text{ kg}$ è lanciato verticalmente verso l’alto con velocità $v_0 = 75 \text{ m/s}$. A 285.15 m di altezza esplode in tre frammenti. Subito dopo lo scoppio i frammenti, rispettivamente di massa $m_1 = 4 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$ ed m_3 sconosciuta, viaggiano con velocità $\vec{v}_1 = (3\hat{i} + 2\hat{j}) \text{ m/s}$, $\vec{v}_2 = (\vec{v}_1 \wedge \hat{k}) \text{ m/s}$ e $\vec{v}_3 = \vec{v}_x \text{ m/s}$, rispetto ad una terna cartesiana con l’asse z diretto verso l’alto e con origine nel punto dell’esplosione. Calcolare:

- a. La velocità del proiettile subito prima dello scoppio.

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{75^2 - 2 \times 9.8 \times 285.15} = 6.00 \text{ m/s}.$$

- b. La velocità del terzo frammento.

$$m_3 = M - m_1 - m_2 = 4 \text{ kg}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_1 &= 3\hat{i} + 2\hat{j} \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_1 \wedge \hat{k} = (3\hat{i} + 2\hat{j}) \wedge \hat{k} = -3\hat{j} + 2\hat{i} \\ \vec{v}_3 &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \end{aligned} \right\} M\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 3m_1 + 2m_2 + m_3v_x \\ 0 = 2m_1 - 3m_2 + m_3v_y \\ Mv = m_3v_z \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -\frac{3m_1 + 2m_2}{m_3} = -\frac{16}{4} = -4 \text{ m/s} \\ v_y &= \frac{3m_2 - 2m_1}{m_3} = -\frac{2}{4} = -0,5 \text{ m/s} \\ v_z &= \frac{6M}{m_3} = \frac{60}{4} = 15 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \vec{v}_3 = -4\hat{i} - 0,5\hat{j} + 15\hat{k}$$

5. Un punto materiale di massa m si muove soggetto alla forza $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos(\omega t)$, con F_0 costante. All'istante $t = 0$ il punto si trova nell'origine del sistema di assi cartesiani e la sua velocità ha modulo v_0 e stessa direzione e verso della forza.
- a. Risolvere il problema fondamentale della dinamica.

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{F_0}{m\omega} \sin(\omega t) + k_1 \\ x(t) &= -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t) + v_0 t + k_2 \end{aligned} \right.$$

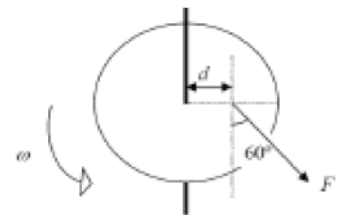
$$\left. \begin{aligned} x(0) = 0 &= -\frac{F_0}{m\omega^2} + k_2 \\ \dot{x}(0) = v_0 &= k_1 \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{F_0}{m\omega} \sin(\omega t) + v_0 \\ x(t) &= -\frac{F_0}{m\omega^2} [1 - \cos(\omega t)] + v_0 t \end{aligned} \right.$$

- b. Trovare il limite dell'equazione del moto quando $\omega \rightarrow \infty$.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} [1 - \cos(\omega t)] = \left[-\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \right] \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} x(t) = v_0 t$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{F_0}{m\omega^2} = 0$$

6. Un disco omogeneo di massa $m = 100 \text{ kg}$ e raggio $R = 1 \text{ m}$ gira intorno al suo asse con frequenza di rotazione pari a 1000 giri/min . A una distanza radiale $d = 0.5 \text{ m}$ viene applicata una forza costante F la cui direzione forma un angolo $\phi = 60^\circ$ con la tangente al disco (vedi figura).



- a. Quanto lavoro deve fare tale forza per arrestare il disco?

$$\left. \begin{aligned} L &= \Delta T = \frac{1}{2} I \omega_i^2 \\ I &= \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned} \right\} L = \frac{1}{4} m R^2 \omega_i^2 = \frac{1}{4} 100 \times 1 \times \left(\frac{2\pi \times 1000}{60} \right)^2 = 274,16 \text{ kJ}$$

- b. Il disco si arresta in un tempo $t_m = 2 \text{ min}$. Quanto vale F ?

$$M = I \dot{\omega} \Rightarrow F d \sin \vartheta = F d \cos \phi = -\frac{1}{2} m R^2 \dot{\omega} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2 F d \cos \phi}{m R^2}$$

$$\int_{\omega_i}^0 d\omega = -\frac{2 F d \cos \phi}{m R^2} \int_0^{t_m} dt \Rightarrow \omega_i = \frac{2 F d \cos \phi}{m R^2} t_m \Rightarrow F = \frac{m R^2 \omega_i}{2 d \cos \phi t_m} = \frac{100 \times 2\pi \times 1000}{60 \times 60} = 174,53 \text{ N}$$