Università di Bologna - Corsi di Laurea Triennale in Ingegneria, II Facoltà - Cesena
2° Appello Estivo - Prova scritta del corso di Fisica Generale A (L-A)
(13 luglio 2010)
Prof. Maurizio Piccinini

1. Un punto materiale viene ripetutamente lanciato, in varie direzioni, da una altezza h dal suolo, con velocità iniziale sempre di modulo v_0. Esprimere il modulo della sua velocità di arrivo a terra, in funzione dell'angolo di lancio.

$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh + v_0^2}$ *Il modulo di v non dipende dall'angolo di lancio.*

2. L'energia cinetica di un sistema rigido è data dall'energia cinetica del centro di massa più la metà del prodotto tra il momento d'inerzia del corpo rigido e il quadrato della velocità angolare. Commentare quest'affermazione, aggiungendo ciò che eventualmente manca per renderla rigorosa.

"L'energia cinetica di un sistema rigido è data dall'energia cinetica del centro di massa *qualora in esso fosse concentrata tutta la massa del corpo*, più la metà del prodotto tra il momento d'inerzia del corpo rigido *rispetto a un asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse istantaneo di rotazione*, e il quadrato della velocità angolare".

3. Il raggio dell'orbita circolare di un satellite geostazionario (fisso rispetto alla terra):
   a. Dipende dalla massa del satellite.
   b. E proporzionale alla radice cubica della massa della terra. *V*
   c. Dipende dal piano orbitale (equatoriale oppure nord-sud)

   Scegliere la risposta giusta e motivarla.

$\gamma\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$ con ω fissato. $\Rightarrow \quad r^3 = \gamma\frac{M}{\omega^2}$.

Riguardo il punto c: un satellite geostazionario deve per forza essere in un'orbita equatoriale …

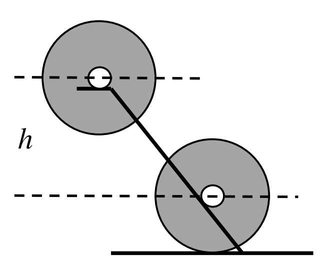
4. Un punto materiale di massa m = 2 Kg si muove lungo una retta con moto dato dall'equazione $x = t^3 - 2t + 6$, dove x è in metri e t in secondi.
   a. Trovare l'espressione della forza che agisce sul punto materiale e il suo valore quando t = 1*s* e quando t = 4*s*.

$$\left.\begin{array}{l} x = t^3 - 2t + 6 \quad m \\ v = 3t^2 - 2 \quad m/s \\ a = 6t \quad m/s^2 \end{array}\right\} F(t) = ma = 12t\ N \begin{cases} F(1) = 12\ N \\ F(4) = 48\ N \end{cases}$$

   b. Dimostrare il teorema dell'impulso per l'intervallo di tempo di cui al punto precedente.

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt = Q_2 - Q_1 \begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} 12t\,dt = 6t^2\Big|_1^4 = 90Ns \\ Q_2 - Q_1 = m\left[v(4) - v(1)\right] = 2(46-1) = 90Kg\ m/s \end{cases}$$

5. Un cilindro cavo di raggio r, massa m_c = 72 *Kg* e spessore trascurabile, rotola senza strisciare lungo un piano inclinato costituito da due binari. A metà del cilindro, solidale e coassiale con questo, vi è un anello pieno, omogeneo, di raggio esterno 6r e massa m_a = 248 *Kg*. Il corpo rigido così composto è rilasciato con velocità iniziale nulla dalla sommità del piano inclinato. Giunto in piano il suo asse di rotazione si è abbassato di un altezza h = 0.9 *m*, e l'anello viene a contatto con una superficie caratterizzata dal coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.15$.



Università di Bologna - Corsi di Laurea Triennale in Ingegneria, II Facoltà - Cesena
2° Appello Estivo - Prova scritta del corso di Fisica Generale A (L-A)
(13 luglio 2010)
Prof. Maurizio Piccinini

a. Dimostrare che il momento d'inerzia dell'anello rispetto all'asse di simmetria è dato da $I_a = (1/2)m_2\left[r^2 + (6r)^2\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} I_T = I_V + I_a \quad \Rightarrow \quad I_a = \frac{1}{2}(m_V + m_2)R^2 - \frac{1}{2}m_V r^2 \\ m_V = \frac{r^2}{R^2}(m_V + m_2) \quad \Rightarrow \quad m_V = \frac{r^2}{R^2 - r^2}m_2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} I_a = \frac{1}{2}m_2\frac{R^4 - r^4}{R^2 - r^2} \\ I_a = \frac{1}{2}m_2\left((6r)^2 + r^2\right) \end{array}\right. .$$

b. Calcolare la velocità di traslazione del corpo quando raggiunge la parte più bassa del piano inclinato (un attimo prima che intervenga l'attrito).

$$M = m_c + m_a$$

$$I_G = I_c + I_a = m_c r^2 + \frac{1}{2}m_a\left[r^2 + (6r)^2\right] = \frac{1}{2}r^2(2m_c + 37m_a)$$

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\frac{v_G^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v_G = \sqrt{2\frac{Mgh}{M + I_G/r^2}} = 2\sqrt{gh\frac{(m_c + m_a)}{(4m_c + 39m_a)}} = 1.065 m/s$$

c. Raggiunto il piano orizzontale, dopo un tempo t_{rp} e una distanza s_{rp} il corpo rigido passa a un moto di rotolamento puro con velocità di traslazione v_{rp}. Calcolare queste tre grandezze.

$$\left.\begin{array}{l} \mu Mg = Ma_G \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_G = \mu g \\ v_G = \mu g t + v_G^i \quad \Rightarrow \quad t_{rp} = \frac{v_G^{rp} - v_G^i}{\mu g} \\ s_G = \frac{1}{2}\mu g t^2 + v_G^i t \end{array}\right. \\ \mu Mg6r = -I_G\alpha \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\mu Mg6r}{I_G} \\ \omega = -\frac{\mu Mg6r}{I_G}t + \frac{v_G^i}{r} \quad \Rightarrow \quad t_{rp} = I_G\frac{v_G^i/r - v_G^{rp}/6r}{6\mu gMr} \end{array}\right. \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} t_{rp} = \frac{v_G^{rp} - v_G^i}{\mu g} \\ t_{rp} = I_G\frac{v_G^i/r - v_G^{rp}/6r}{6\mu gMr} \\ s_G^{rp} = \frac{1}{2}\mu g t_{rp}^{\ 2} + v_G^i t_{rp} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} I_G = \frac{1}{2}r^2(2m_c + 37m_a) \\ t_{rp} = \frac{v_G^{rp} - v_G^i}{\mu g} = 1.044 s \quad \Leftarrow \\ t_{rp} = I_G\frac{v_G^i/r - v_G^{rp}/6r}{6\mu gMr} \end{array}\right\} v_G^{rp} = 6v_G^i\left(\frac{6Mr^2 + I_G}{36Mr^2 + I_G}\right) = 6v_G^i\left(\frac{14m_c + 49m_a}{74m_c + 109m_a}\right) = 2.599 m/s$$

$$s_G^{rp} = \frac{1}{2}\mu g t_{rp}^{\ 2} + v_G^i t_{rp} = 1.913 m$$

6. Due punti materiali, entrambi di massa *m*, sono collocati nel piano (*x,y*) nei punti di coordinate (0, y_0) e (0,- y_0).

a. Trovare il punto x_M dell'asse *x* dove il campo gravitazionale è massimo.

$$G_x = -2\gamma m \frac{x}{\left(x^2 + y_0^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{dG_x}{dx} = -2\gamma m \left[\frac{\left(x^2 + y_0^2\right)^{3/2} - 3x^2\left(x^2 + y_0^2\right)^{1/2}}{\left(x^2 + y_0^2\right)^3} \right] = 0$$

$$x^2 + y_0^2 = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad x_M = \sqrt{\frac{1}{2}}y_0$$

b. Trovare il potenziale gravitazionale U nello stesso punto (x_M,0), assumendo $U(\infty) = 0$.

$$\vec{G}(r_1, r_2) = -\gamma \frac{m}{r_1^2}\hat{r}_1 - \gamma \frac{m}{r_2^2}\hat{r}_2$$

$$U(r_1, r_2) = \gamma m \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad \Rightarrow \quad U(x,0) = 2\gamma m \left(\frac{1}{\left(x^2 + y_0^2\right)^{1/2}}\right)$$

$$U(x_M, 0) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\gamma m}{y_0}$$

c. Scrivere l'espressione generale del potenziale U quando invece si sceglie $U(x_M,0) = 0$, e scrivere le equazioni della curva luogo dei punti nei quali $U = 0$.

$$\left.\begin{aligned} & U(r_1, r_2) = \gamma m \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + k \\ & r_1 = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2 + z^2} \\ & r_2 = \sqrt{x^2 + (y + y_0)^2 + z^2} \\ & U(x_M, 0, 0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad U(r_1, r_2) = \gamma m \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\gamma m}{y_0}$$

$$U(r_1, r_2) = 0 \quad se \quad \gamma m \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\gamma m}{y_0} \quad cioè\ se \quad r_1 = r_2 = \sqrt{x_M^2 + y_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad U(r_1, r_2) = 0 \quad se \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + z^2 = x_M^2 \end{cases}$$