

Fisica Generale LB

Prof. Mauro Villa

Esercizi di elettrostatica nel vuoto

A - Forza di Coulomb, campi elettrici

1. Calcolare la forza elettrostatica esercitata su di una carica Q_3 , posta in mezzo ad altre due cariche puntiformi Q_1 e Q_2 , sapendo che $Q_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}$ C, $Q_2 = 1.6 \cdot 10^{-5}$ C, $Q_3 = 1.1 \cdot 10^{-6}$ C e che la distanza tra le cariche Q_1 e Q_2 vale 2 m.
2. Trovare il rapporto tra la forza elettrica e la forza gravitazionale che agiscono fra un protone ($q_p = +1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_p = 1.7 \cdot 10^{-27}$ Kg) ed un elettrone ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg). Si ricordi che $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N \cdot m²kg⁻².
3. Assumendo che un atomo di idrogeno possa essere descritto classicamente come una carica fissa positiva ed una negativa che percorre orbite circolari attorno a quella positiva, determinare: 1) se esiste un raggio minimo dell'orbita, 2) il modulo della velocità nel caso di orbite di raggio $R = 0.5 \cdot 10^{-10}$ m. Si ricordi che: $q_p = +1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_p = 1.7 \cdot 10^{-27}$ Kg, $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg
4. In un nucleo di Elio (2 protoni + 2 neutroni), i due protoni si trovano ad una distanza tipica di $d = 6 \cdot 10^{-15}$ m. Determinare la forza coulombiana che agisce tra i protoni e l'entità della forza forte che vincola i protoni a rimanere nel nucleo. Quanta massa è in grado di sollevare una forza di pari entità sulla superficie terrestre?
5. Una carica $Q = 2.2 \cdot 10^{-5}$ C è posta su ciascun vertice di un triangolo equilatero, di lato $L = 0.2$ m. Quale valore deve avere una carica Q_c posta nel baricentro del triangolo affinché la forza esercitata su ognuna delle cariche sia nulla? La situazione che si crea è per definizione una situazione di equilibrio. Si tratta di equilibrio stabile, instabile o indifferente?
6. Due cariche di valore $Q_1 = -Q_2 = 0.3 \mu\text{C}$ sono poste rispettivamente nelle posizioni $\vec{r}_1 = 2\hat{k}$ e $\vec{r}_2 = -2\hat{k}$. Determinare modulo, direzione e verso della forza complessiva che agisce su una carica di prova $q = 2 \text{ nC}$ posta in un punto arbitrario del piano $z = 0$ ($\vec{r}_q = x\hat{i} + y\hat{j}$).

7. Una carica $q = 20 \text{ nC}$ è vincolata a muoversi lungo un asse (asse x) ed inizialmente posta in quiete nella posizione $\vec{r}_q = 5 \hat{i}$. Sull'asse sono fissate rigidamente altre due cariche (Q_1 e Q_2), rispettivamente nelle posizioni $\vec{r}_1 = 2 \hat{i}$ e $\vec{r}_2 = -4 \hat{i}$. Se la carica Q_1 vale $6 \mu\text{C}$, quanto deve valere Q_2 affinché la carica q non sia soggetta a forze?
8. Quattro cariche di valore $Q_A = -Q_B = Q_C = -Q_D = 2 \mu\text{C}$ sono poste ai vertici di un quadrato ABCD di lato $l = 0.1 \text{ m}$. Determinare 1) la forza agente su ogni carica; 2) il luogo dei punti dove una carica di prova q non sente alcuna forza.
9. Una carica elettrica Q_1 di massa $m = 0.3 \text{ kg}$ è attaccata ad un capo di un filo inestensibile di lunghezza $l = 0.5 \text{ m}$ e massa trascurabile. Il capo opposto del filo è vincolato nell'origine di un sistema di coordinate avente l'asse z coincidente con la direzione verticale sulla superficie terrestre. Per l'azione di una carica $Q_2 = 0.4 \mu\text{C}$ posta lungo l'asse z , il filo forma un'angolo $\theta = 30^\circ$ con la direzione verticale. Determinare il valore della carica Q_1 quando 1) la carica Q_2 è posta alla stessa quota della carica Q_1 ; 2) la carica Q_2 è posta nella posizione $\vec{r}_{Q_2} = -0.5 \hat{k} \text{ m}$.
10. Due palloncini identici, riempiti di un gas più leggero dell'aria fluttuano in equilibrio sollevando una massa $m = 10\text{g}$ a loro attaccata tramite fili inestensibili. I palloncini sono stati caricati ciascuno con una certa carica Q . Determinarne il valore assumendo per semplicità che i palloncini possano essere trattati come cariche puntiformi e sapendo che la distanza tra i due palloncini è $d = 30 \text{ cm}$ e che la distanza palloncini-massa è $l = 1.5 \text{ m}$.
11. Calcolare il campo elettrico generato da un anello circolare di raggio R caricato con carica Q su di un punto P posizionato su un asse perpendicolare al piano dell'anello e passante per il suo centro. Sia h la distanza di P dal centro dell'anello.
12. Calcolare il campo elettrico generato da un disco di raggio R caricato con carica Q su di un punto P posizionato sull'asse del disco ad altezza h dal centro del disco.
13. Si consideri un triangolo rettangolo isoscele, di lato minimo L , e si supponga che una carica $Q > 0$ sia posta nell'estremità sinistra e una carica Q' nell'estremità destra dell'ipotenusa di tale triangolo. Si supponga inoltre che Q' possa essere fatta variare tra $-Q$ e $+Q$. Determinare: 1) il campo elettrico \vec{E} nel vertice del triangolo opposto all'ipotenusa, 2) per quale valore di Q' il modulo del campo nel vertice è minimo e la corrispondente direzione del campo \vec{E} .
14. Nell'istante $t = 0 \text{ s}$, una particella di massa m e carica q viene proiettata orizzontalmente in un campo elettrico diretto verso l'alto con una

velocità iniziale v_0 . Determinare 1) la traiettoria della particella, 2) quando la velocità della particella forma un angolo di 45° rispetto alla sua direzione iniziale. Si trascuri la gravità.

15. Due fili rettilinei infinitamente lunghi sono disposti parallelamente ad una distanza d . Supponendo che siano abbiano una densità lineare di carica costante data rispettivamente da λ_1 e λ_2 , determinare la forza per unità di lunghezza dei fili che si esercita tra i fili.

B - Dipoli elettrici

- Ad un dipolo che ha il centro nell'origine delle coordinate ed è orientato lungo l'asse y , per cui $\vec{p} = p\hat{j}$, viene applicato un campo esterno $\vec{E} = (E_0y/2a)\hat{j}$, dove $2a$ è la distanza tra le cariche del dipolo. Determinare la forza che agisce sul dipolo. Dimostrare che per qualunque campo arbitrario \vec{E} diretto lungo l'asse y , la forza che agisce sul dipolo è data da: $\vec{F} = p(\partial\vec{E}/\partial y)$
- Dato un dipolo elettrico \vec{p} ed un campo elettrico \vec{E} , dimostrare che il momento della forza agente sul dipolo è dato da $\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$, se si assume che \vec{E} sia approssimativamente uguale sulle due cariche del dipolo. In questa approssimazione, è rilevante il centro di riduzione O rispetto al quale si calcola il momento M ? Motivare la risposta.

C - Complementi di analisi vettoriale

- Calcolare le seguenti divergenze: $\text{div } \vec{r} = \vec{\nabla} \cdot \vec{r}$, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{r}/r)$, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{r}/r^3)$, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$, $\vec{\nabla} \cdot [\vec{A} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{B})]$, con $\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ e $\vec{\omega}$, \vec{A} , \vec{B} vettori costanti.
- Calcolare i seguenti gradienti: $\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{r})$, $\vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{r})$, $\vec{\nabla} 1/r$, $\vec{\nabla}[\vec{A} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{B})]$ con \vec{A} e \vec{B} vettori costanti.
- Calcolare i seguenti rotori: $\text{rot } \vec{r} = \vec{\nabla} \wedge \vec{r}$, $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$, $\vec{\nabla} \wedge (\vec{r}/r^3)$, con $\vec{\omega}$ e \vec{A} vettori costanti.
- Verificare le seguenti identità vettoriali: $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0$ con ϕ arbitraria funzione scalare del vettore \vec{r} e \vec{v} arbitrario campo vettoriale.

D - Flusso del campo elettrico e legge di Gauss

- Sia dato il campo elettrico $\vec{E} = x\hat{i} + y^2\hat{j} + xy\hat{k}$. Determinare il flusso del campo sul quadrato di vertici ABCD, con $\vec{r}_A = \vec{0}$, $\vec{r}_B = 1\hat{i}$, $\vec{r}_C = 1\hat{i} + 1\hat{j}$, $\vec{r}_D = 1\hat{j}$. Determinare il flusso di \vec{E} uscente dal cubo di vertici ABCDA'B'C'D' con $\vec{r}_{X'} = \vec{r}_X + 1\hat{k}$. Si assuma che le unità di lunghezza siano metri e quelle del campo elettrico Newton/metri.

2. È noto che intersecando una sfera con un piano si ottiene un cerchio. Se il raggio del cerchio così ottenuto sottende un angolo θ rispetto al centro della sfera, che angolo solido sottende l'area del cerchio-intersezione rispetto al centro della sfera?
3. Una sfera di raggio $R = 0.2 \text{ m}$ ha una distribuzione volumetrica di carica tale da creare un campo elettrico \vec{E} simmetrico rispetto al centro della sfera. Supponendo che in un punto generico P interno alla sfera, il campo sia proporzionale alla distanza tra P e il centro della sfera, determinare: 1) la densità volumetrica $\rho(\vec{r})$, 2) la carica totale, 3) il campo \vec{E} nello spazio esterno alla sfera, sapendo che sulla superficie della sfera \vec{E} è diretto verso il centro della sfera ed il suo modulo vale 2 N/C .
4. Sia dato un campo elettrico $\vec{E} = Ar^2 \vec{r}$ nella regione di spazio $|\vec{r}| \leq R$, con A costante. Assumendo che vi sia il vuoto nella regione $|\vec{r}| > R$, determinare: 1) la densità di carica $\rho(\vec{r})$ in tutto lo spazio, 2) il campo elettrico per $|\vec{r}| > R$.
5. Considerata una carica Q distribuita uniformemente su una sfera di raggio R , determinare il campo in un punto P posto ad una distanza r dal centro della sfera, quando 1) $r > R$, 2) $r < R$.
6. Una piastra infinita di spessore L è posta nello spazio con le facce date dalle coordinate $x = 0$ e $x = L$ determinare il campo elettrico in tutto lo spazio sapendo che la densità volumetrica di carica vale $\rho(\vec{r}) = Ax^2$ per $0 < x < L$ e 0 altrimenti. Suggestioni: si utilizzi prima la forma differenziale, poi quella integrale di Gauss e si osservi la simmetria del problema quando $|x| \gg L$.
7. Dire se in una regione priva di cariche può esistere un campo elettrico dato da $\vec{E} = (x^2 + y^2)^{-2}[2xy\hat{i} + (y^2 - x^2)\hat{j}]$.
8. Su una piastra quadrata di lato $L = 1\text{m}$ e spessore trascurabile, viene posta una carica $Q = 2 \mu\text{C}$. Assumendo che la carica si distribuisca uniformemente sulla superficie, quanto vale il campo elettrico in prossimità del centro del quadrato ad una distanza $d = 1 \text{ cm}$ dalla superficie della piastra? Suggestioni: si sfrutti il fatto che $d \ll L$.
9. Una sfera di raggio $R = 0.1 \text{ m}$ ha una densità di carica data da $\rho(\vec{r}) = a(1 - (r/R)^2)$, con $a = 2 \text{ mC/m}^3$ per $0 < r < R$ e da $\rho(\vec{r}) = 0$ per $r = |\vec{r}| > R$. Determinare il campo elettrico in tutto lo spazio.

E - Potenziali

1. Una carica puntiforme $Q = -5 \mu\text{C}$ viene tenuta ferma in una certa posizione mentre una seconda carica $q = 2 \mu\text{C}$ viene spostata da un

punto P_1 a distanza $r_1 = 0.4 \text{ m}$ ad un punto P_2 a distanza $r_2 = 0.8 \text{ m}$ dalla carica Q . Determinare: 1) la d.d.p. ΔV tra i punti P_1 e P_2 ; 2) il lavoro \mathcal{L} compiuto contro la forza elettrica nello spostamento della carica q . Dal punto di vista energetico, dove si ritrova tale lavoro?

2. Due particelle con cariche $Q_1 = 5 \mu\text{C}$ e $Q_2 = 0.3 \mu\text{C}$ e masse $M_1 = 0.5 \text{ kg}$ e M_2 rispettivamente, interagiscono solo tra loro ed ad un certo istante si trovano in quiete nel vuoto ad una distanza relativa $d = 0.5 \text{ m}$. Si calcolino le velocità relative delle due particelle quando la distanza relativa è $2d$, nei seguenti casi: 1) $M_2 \gg M_1$; 2) $M_2 = M_1$; 3) $M_2 \ll M_1$.
3. Una sfera di raggio $R = 0.1 \text{ m}$ ha una densità di carica data da $\rho(\vec{r}) = a(1 - (r/R)^2)$, con $a = 2 \text{ mC/m}^3$ per $0 < r < R$ e da $\rho(\vec{r}) = 0$ per $r = |\vec{r}| > R$. Determinare il potenziale in tutto lo spazio ponendo $V(\infty) = 0$. Suggestioni: si sfrutti la simmetria radiale del problema.
4. Determinare 1) il potenziale di una linea avente una densità lineare di carica λ costante, 2) il potenziale di un cilindro conduttore di raggio R , lunghezza infinita e densità volumetrica di carica ρ costante.
5. Determinare la distribuzione di carica che genera nello spazio il potenziale $V(\vec{r}) = A/r^3$.
6. Determinare la distribuzione di carica che genera nello spazio il potenziale $V(\vec{r}) = A \exp(-\lambda r)/r$, con A e λ costanti.
7. Due cariche $+q$ e $-q$, inizialmente poste nell'origine delle coordinate, vengono spostate ad opera di un campo esterno \vec{E} . Si origina così un dipolo elettrico \vec{p} . Dimostrare che l'energia potenziale dovuta al campo esterno è pari a $U_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.