

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Fisica

**STUDIO DI
NUCLEI ESOTICI
NON LEGATI**

Tesi di Laurea in Reazioni Nucleari

Relatore:
Prof. Mauro Bruno

Presentata da:
Cristina Rea

Correlatore:
Prof.ssa Angela Bonaccorso

Sessione II
Anno Accademico 2007-2008

*Alle domande che mi hanno portato qui,
sperando di averne sempre di nuove e
ai miei genitori ...*

Indice

1	I Nuclei Esotici	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Produzione di fasci di ioni radioattivi (RIBs)	2
1.2.1	I metodi ISOL e In-Flight	5
1.3	Struttura e proprietà dei nuclei "halo"	7
1.3.1	Il sistema Borromeo	9
1.3.2	Alone di neutrone, alone di protone	10
1.3.3	Halo e skin	12
1.4	Nuclei esotici: approccio teorico e sperimentale	13
2	Reazioni di produzione di nuclei non legati	17
2.1	Introduzione	17
2.2	Sezione d'urto	22
2.3	Teoria del trasferimento al continuo	23
2.4	Eccitazione inelastica al continuo	26
2.4.1	Lo spettro della probabilità	31
2.4.2	Valutazione approssimata dell'integrale $I(k, q)$	32
2.5	Conclusione	34
3	Applicazioni alla struttura del ^{10}Li	37
3.1	Introduzione	37
3.2	Potenziale medio per un neutrone	38
3.3	^{10}Li : Trasferimento al continuo	40
3.4	^{10}Li : Frammentazione del proiettile	45

Conclusioni	51
A Richiami di Meccanica Quantistica	55
A.1 Autofunzioni in un potenziale centrale	55
A.2 Funzioni d'onda per l generici	59
A.2.1 Costante di normalizzazione asintotica	60
A.2.2 Fattori Spettroscopici	61
B Teoria perturbativa dipendente dal tempo	63
C Lunghezza di scattering	67
Bibliografia	69
Ringraziamenti	71

Capitolo 1

I Nuclei Esotici

1.1 Introduzione

I nuclei stabili esistenti in natura hanno approssimativamente un egual numero di protoni e neutroni: tali nuclei godono di caratteristiche comuni, come ad esempio il valore pressoché costante dell'energia di legame media per nucleone ($\sim 8\text{MeV/nucleone}$, se si escludono i nuclei più leggeri aventi numero di massa A minore di 21). Il diagramma di Segrè riporta il numero di neutroni N sulle ascisse e il numero di protoni Z sulle ordinate: i nuclei aventi N e Z uguali fino al ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ si collocano lungo la cosiddetta “*valle di stabilità*”; tali nuclei risultano essere quelli maggiormente legati. Per $A > 40$ si ha una deviazione dalla sistematica a causa della quale l'accumulo di neutroni viene avvantaggiato rispetto a quello dei protoni; di conseguenza la maggior parte dei nuclei stabili pesanti presenta un eccesso di neutroni ($N > Z$) che viene giustificato all'interno della formula semi - empirica di massa e del *modello a shell*. D'altra parte, i cosiddetti nuclei *esotici* presentano un anomalo rapporto N/Z e si collocano al di fuori della valle di stabilità proprio a causa di un eccesso di protoni o di neutroni rispetto a quelli stabili; tali nuclei mostrano un'energia di legame sempre più piccola al crescere del numero di nucleoni in eccesso, fino a raggiungere le cosiddette *driplines*, le curve oltre le quali i nuclei non risultano più legati. Quanto più un nucleo è lontano

dalla valle di stabilità, tanto più piccola sarà l'energia di legame degli ultimi nucleoni; se consideriamo nuclei ricchi di neutroni al limite della soglia di instabilità, in essi uno o più neutroni con una piccola energia di separazione possono formare una regione spaziale di bassa densità di materia rispetto a quella popolata dai nucleoni più fortemente legati, andando così a costituire un *alone nucleare*.

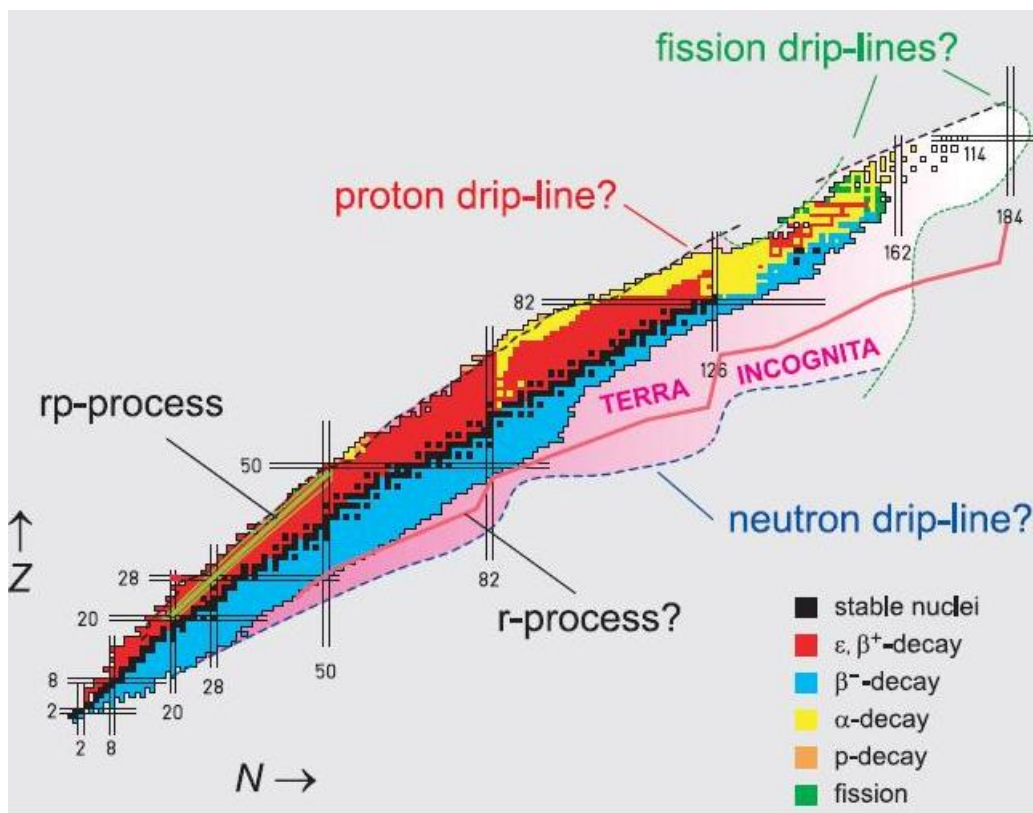


Figura 1.1: Diagramma di Segrè. Gli elementi in nero rappresentano i nuclei stabili.

1.2 Produzione di fasci di ioni radioattivi (RIBs)

Le informazioni utilizzate in questa sezione sono state tratte da Rif.[1].

Da un punto di vista sperimentale, la maggior parte delle informazioni accumulate finora sulle proprietà dei nuclei conosciuti al giorno d'oggi è stata ottenuta attraverso l'uso di fasci stabili, accelerati ad energie comprese tra qualche centinaio di keV e circa 1 GeV per nucleone, e bombardando bersagli stabili. Estendere la nostra conoscenza verso quella quantità di nuclei ancor oggi sconosciuti, arrivare ad esplorare la cosiddetta *terra incognita*, richiederebbe bersagli radioattivi (e quindi instabili), o fasci di ioni radioattivi (RIBs) aventi intensità paragonabili a quelle raggiungibili attualmente dai fasci stabili. L'utilizzo di RIBs risulta più efficiente dell'uso di targhette radioattive, se si considerano vite medie minori di 1 ora, il che si rivela essere il tipico caso della stragrande maggioranza dei nuclei radioattivi. Le intensità dei fasci stabili tipicamente spaziano tra qualche nanoampere fino a qualche microampere, i.e. tra 10^{10} e 10^{13} particelle al secondo. Gli attuali impianti per la produzione di fasci di ioni radioattivi sono lontani dal raggiungere tali valori, producendo nei casi migliori circa 10^6 particelle al secondo. Si rende quindi necessaria una nuova generazione di impianti per la produzione di RIBs che possano produrre fasci di nuclei radioattivi che superino almeno di 4-5 ordini di grandezza quelli prodotti attraverso la strumentazione attuale, questo per poter ampliare le odierne conoscenze e sviluppare al meglio una "fisica dei nuclei esotici", ma non solo. Infatti il panorama di ricerca offerto risulta molto più vasto ed arriva a toccare anche campi di ricerca appartenenti ad altre discipline come la Fisica dello Stato Solido o ad esempio quella medica attraverso esperimenti che possono anche riguardare la produzione di isotopi radioattivi utilizzati nell'ambito della diagnostica e della radioterapia.

Per quel che riguarda la struttura nucleare, le proprietà dei nuclei stabili sono state esplorate per valori di T_z (isospin), J (momento angolare totale), E (energia di eccitazione), T (la temperatura in MeV) e ρ (densità di nucleoni espressa in termini della normale, $\rho_0 = 0.17 fm^{-3}$, densità nucleare), non così lontani dai valori tipici dei nuclei stabili. I problemi attuali nello studio della struttura nucleare riguardano le proprietà dei nuclei per valori estremi

di queste quantità; vengono quindi coinvolti:

- nuclei molto lontani dalla valle di stabilità;
- nuclei con elevati spin;
- nuclei a densità e temperature estreme.

Un'ulteriore applicazione è quella della ricerca nel campo dell'astrofisica nucleare, in quanto gran parte delle reazioni di interesse stellare coinvolgono nuclei esotici e quindi appartenenti a quella zona della carta dei nuclidi definita come *terra incognita* Fig.(1.1), esplorabile solo attraverso RIBs molto intensi.

Inoltre nel campo delle interazioni fondamentali e delle leggi di simmetria la disponibilità di RIBs intensi aprirebbe nuove strade:

- lo studio di transizioni β super-permesse, che permetterebbe di testare l'unitarietà della matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) per il cosiddetto *quark-mixing*, alla base del Modello Standard; questo richiederebbe una precisa conoscenza delle vite medie, dei Q-valori e rate di tali processi;
- l'identificazione di possibili interazioni esotiche nel decadimento β ; ciò può essere sviluppato attraverso misurazioni della correlazione angolare del neutrino - β , cioè osservando i nuclei nel loro stato finale e la loro radiazione γ ;
- la ricerca di possibili deviazioni dalla massima violazione di parità o dall'invarianza per inversione temporale nell'ambito della conservazione della stranezza nel Modello Standard: questi test implicherebbero la produzione di nuclei esotici polarizzati e misurazioni molto precise della polarizzazione longitudinale delle particelle β emesse;
- l'investigazione della non conservazione della parità in transizioni atomiche per atomi pesanti; questi esperimenti richiederebbero l'imma-

gazzinamento e la manipolazione di atomi pesanti radioattivi in luoghi adatti.

Per tutti questi motivi, è allo studio un progetto a livello europeo, nel quale anche l'Italia è coinvolta, avente come fine ultimo quello di realizzare una struttura di prossima generazione per la produzione di ioni radioattivi attraverso il metodo ISOL (*Isotope Separation On-Line*).

Il programma **EURISOL** [1] trae le sue origini dal lavoro del **Nuclear Physics European Collaboration Committee (NuPECC)**, un comitato di esperti della *European Science Foundation (ESF)*, ed ha avuto inizio il 1 Gennaio del 2000, con il supporto della Commissione Europea. Per il momento è stata portata a termine soltanto una prima fase, quella dello studio di fattibilità del progetto, a questa dovranno susseguirsi una seconda consistente nella ricerca e sviluppo tecnologico ed una terza riguardante un più dettagliato disegno ingegneristico dell'impianto pianificato, basato naturalmente sui risultati delle prime due fasi, e che condurrebbe alla costruzione dell'impianto stesso. È quindi possibile evincere che il progetto necessita del tempo prima di concretizzarsi; ma la sua realizzazione implicherebbe eccitanti prospettive di ricerca in campi che per il momento non si è avuto la possibilità di investigare a fondo, e ciò permetterebbe alla comunità Europea di Fisica Nucleare di possedere i mezzi per mantenere una posizione - guida nel mondo.

1.2.1 I metodi ISOL e In-Flight

Si vuole qui dare una breve descrizione dei metodi ISOL e In-Flight usati per la produzione di RIBs e sottolinearne la loro complementarità.

- Nel metodo ISOL, elevate quantità di nuclei radioattivi vengono prodotte bombardando un bersaglio spesso (il principale) con un fascio di particelle precedentemente accelerate (attraverso il cosiddetto *driver accelerator*), oppure con un flusso di neutroni proveniente da un reattore

nucleare o da una sorgente di neutroni prodotti per spallazione. Questi nuclei vengono poi estratti dal bersaglio, trasformati in ioni in una sorgente di ioni adatta, consecutivamente subiscono un processo di separazione in massa e infine vengono ri-accelerati alle energie desiderate da un secondo acceleratore (*post-accelerator*). I RIBs così prodotti vengono inviati su di un bersaglio secondario per indurre reazioni nucleari e realizzare misurazioni spettroscopiche.

- Nel metodo In-Flight, fasci di ioni pesanti, in un range di energie tra i 100 MeV fino a 1 GeV per nucleone, colpiscono un bersaglio principale sottile, a causa del quale incorrono nella frammentazione. I frammenti prodotti vengono poi selezionati in volo da un dispositivo apposito (*Fragment Recoil Separator*), secondo le loro masse e cariche ed infine vengono diretti su un bersaglio secondario, per studi spettroscopici e di reazione.

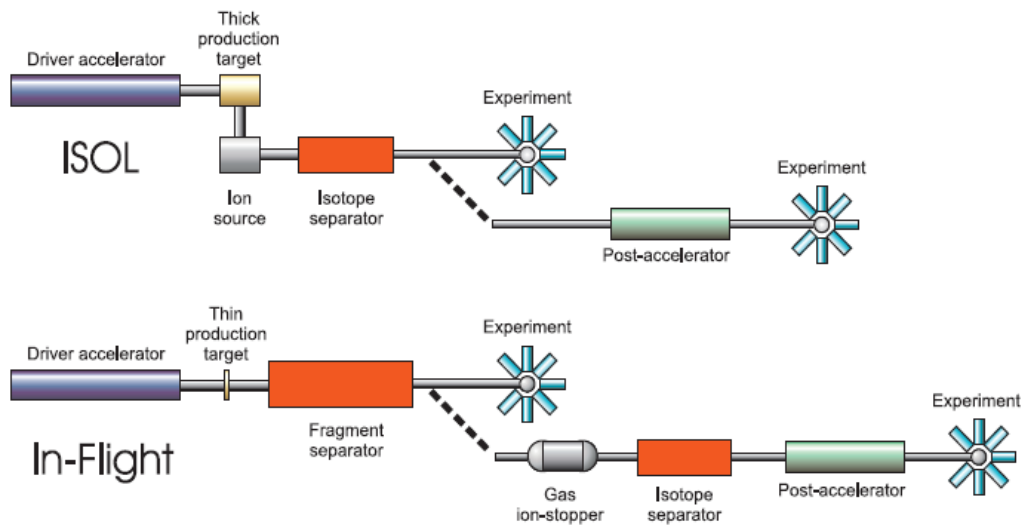


Figura 1.2: Paragone tra i metodi ISOL e In-Flight per la produzione di RIBs.

Come accennato in precedenza, queste due tecniche si rivelano altamente complementari.

La prima si limita a fasci di ioni radioattivi aventi lunghe vite medie, maggiori di 1 ms, a causa del tempo necessario ad estrarre i nuclei radioattivi dallo spesso bersaglio principale e a trasportarli nella sorgente di ioni. Tuttavia, l'ISOL produce RIBs di elevata qualità in un ampio range di energie, tra qualche decina di keV e circa 100 MeV per nucleone.

Il metodo In-Flight permette di produrre RIBs aventi brevi vite medie, fino ad alcune centinaia di nanosecondi (i.e. corrispondente al tempo di volo nel Fragment Recoil Separator). Questi fasci risultano comunque di bassa qualità, e sono limitati ad energie vicine a quelle del fascio primario stabile, in un range tra i 100 MeV fino ad 1 GeV per nucleone. La qualità del fascio potrebbe essere migliorata attraverso tecniche di raffreddamento, ma ciò non risulterebbe compatibile con le suddette vite medie brevi.

I due metodi possono essere combinati rallentando i frammenti prodotti attraverso la tecnica In-Flight e poi riaccelerandoli, come mostrato nella parte inferiore della Fig.(1.2).

1.3 Struttura e proprietà dei nuclei "halo"

I nuclei *halo* sono stati esotici molto debolmente legati di materia nucleare nei quali i nucleoni più esterni o di valenza (generalmente uno o due) sono spazialmente disaccoppiati da un *core* relativamente più legato così da trascorrere più della metà del loro tempo al di là del range del potenziale di legame nucleare. L'alone è un fenomeno di soglia a causa del quale i nucleoni *halo* penetrano quantisticamente regioni classicamente non permesse, dando luogo a code estese nelle funzioni d'onda e quindi ad un più grande raggio medio nella distribuzione di materia. I nucleoni appartenenti all'alone tendono a trovarsi in stati di basso momento angolare (*s* o *p*) così da non restare confinati a causa della barriera di potenziale centrifugo.

Le prime evidenze sperimentali risalgono al 1985, fornite da esperimenti condotti da Tanihata et al. [2], [3] al Bevalac del Lawrence Berkeley Laboratory

che prevedevano la misurazione della sezione d'urto di interazione degli isotopi dell'elio (He) e del litio (Li) e ciò permise loro di trovare per certi nuclei, valori molto più grandi per i raggi quadratici medi (*rms*) rispetto ai valori dati dalla dipendenza teoricamente prevista, $R \approx r_0 A^{1/3}$: infatti per i nuclei stabili si ha $r_0 \approx 1.2 fm$ mentre quelli esotici è stato trovato un anomalo $r_0 \approx 1.5 fm$.

Un altro lavoro molto importante fu quello di Hansen e Jonson del 1987 [4], i quali diedero un'interpretazione dell'estesa distribuzione spaziale in materia del ^{11}Li trattandolo quale sistema binario costituito da un core di 9Li in interazione con un dineutrone debolmente legato in uno stato s; mostrarono così come la debole energia di legame tra la coppia potesse formare un alone di densità estesa. Inoltre tale modello prediceva anche un rapido aumento del raggio quadratico medio al diminuire dell'energia di separazione della coppia di neutroni.

Successivamente Kobayashi et al. [5] misurarono la distribuzione di impulsi trasversi dei frammenti prodotti in seguito al breakup di nuclei di 8He e ^{11}Li su un bersaglio sottile di ^{12}C a 0.79 GeV/nucleone, trovando una distribuzione di impulsi dei frammenti con una struttura a due componenti, una delle quali estremamente stretta. Tale misura era consistente con l'ipotesi che questi nuclei fossero dotati di alone, in quanto per il principio di indeterminazione una distribuzione di impulsi molto stretta per i frammenti di breakup implica un raggio molto grande per l'orbita del neutrone emesso.

Altri studi analoghi di reazioni indotte dal ^{11}Li su bersagli pesanti mostrarono un aumento della probabilità di rimozione dei due neutroni, giustificato dal fatto che un raggio maggiore implica qualitativamente la possibilità di frammentazione anche a distanze maggiori dove il potenziale Coulombiano è più debole. La dissociazione Coulombiana poteva essere interpretata come un'eccitazione del sistema di neutrone - 9Li verso uno stato del continuo, seguita da un decadimento nei due frammenti. Dalle sezioni d'urto di interazione e di rimozione dei due neutroni, Kobayashi et al. [6] dedussero inoltre la sezione d'urto di dissociazione elettromagnetica (EMD); normalmente ad alte ener-

gie di eccitazione si osserva una risonanza gigante di dipolo (GDR), ma per il ^{11}Li , come anche per altri nuclei halo, si osservò oltre alla GDR normale, un'altra componente ad energia di eccitazione più bassa che venne detta risonanza gigante di tipo *soft*. È stato quindi possibile ipotizzare uno splitting della GDR in due componenti per questa tipologia di nuclei. La componente ordinaria sarebbe dovuta alle oscillazioni collettive dei protoni del core rispetto ai neutroni del core stesso, mentre la componente di tipo *soft* sarebbe dovuta all'oscillazione dei neutroni che compongono l'alone, rispetto ai protoni del core. (Vedi Fig.(1.3))

Successivamente, è stato mostrato che la dissociazione Coulombiana è essenzialmente un fenomeno di soglia dovuto al rinculo del core (Rif.[26, 27]).

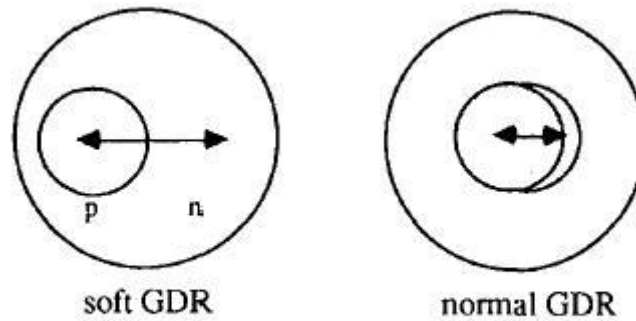


Figura 1.3: Rappresentazione schematica della risonanza gigante di dipolo (GDR) *soft* e normale nei nuclei halo. Vengono mostrate le oscillazioni collettive di neutroni e protoni in entrambi i casi.

1.3.1 Il sistema Borromeo

Il ^{11}Li possiede in realtà una struttura più complessa di quella presentata da Hansen e Jonson, essendo un sistema a tre corpi di tipo *Borromeo*, come mostrato da Zhukov et al. [7], ovvero un sistema a tre corpi legato nel quale però nessuno dei tre sottosistemi binari costituisce a sua volta uno

stato legato.

Più di trenta anni fa, Efimov propose un modello nel quale un sistema di tre corpi può possedere stati legati sotto condizioni tali per cui nessuna delle tre coppie che lo costituiscono rappresentano stati legati oppure una o due coppie sono debolmente legate. Egli mostrò che indipendentemente dalla natura dell'interazione dei due corpi, quando qualsiasi coppia è vicina alla soglia di energia di legame, un potenziale quadratico inverso attrattivo dipendente dalla variabile radiale del sistema a tre corpi prevede un infinito numero di stati debolmente legati.

Quindi un sistema viene chiamato *Borromeano* se è un sistema legato di tre corpi ma che non può essere scomposto in tre sottosistemi, poiché il sottosistema a due corpi non costituisce un sistema legato. Il nome deriva dallo stemma della famiglia Milanese dei Borromeo; all'interno di questo sono infatti raffigurati tre anelli ognuno dei quali è concatenato con gli altri due cosicché spezzandone uno qualunque i restanti due non sono comunque legati. Il numero di stati legati dei sistemi Borromeani è quasi sempre limitato allo stato fondamentale. L'interazione effettiva a due corpi deve essere debole abbastanza da escludere stati legati e forte abbastanza da tenere legato il sistema di tre corpi. Pertanto una o più risonanze a due corpi devono essere presenti a bassa energia.

1.3.2 Alone di neutrone, alone di protone

In generale, l'alone nucleare può essere definito come un fenomeno di soglia che si manifesta quando la funzione d'onda del nucleo si estende oltre la regione spaziale classicamente permessa e una condizione necessaria per la sua esistenza è una bassa energia di legame del nucleo [8]. L'alone di neutrone si manifesta quando l'ultimo neutrone si trova in uno stato s o p vicino alla soglia di emissione di particelle, per cui vi è una probabilità diversa da zero che uno o più nucleoni attraversino la barriera di potenziale per effetto tunnel giungendo nella regione spaziale classicamente proibita, e ciò

implica la formazione di una zona a bassa densità di materia, esterna al core del nucleo.

L'esempio più semplice di nucleo con alone di neutrone è il ^{11}Be , essendo formato da un sistema a due corpi costituito da un neutrone e un core di ^{10}Be deformato, e i suoi due unici stati legati presentano entrambi una struttura ad alone. Per lo stato s , la parte della funzione d'onda non normalizzata mostra asintoticamente un andamento del tipo esponenziale decrescente, $\exp(-kr)$, dove il numero d'onda k viene espresso in termini della massa ridotta e dell'energia di separazione del neutrone ($k = \sqrt{2\mu S_n}/\hbar$). L'esponenziale avrà una pendenza tanto maggiore quanto maggiore è l'energia di legame, pertanto per i nuclei debolmente legati si avrà una coda allungata, il che sta ad indicare una densità di materia estesa. Inoltre la grande distanza tra alone e core, dell'ordine di $1/k$, indica che molte proprietà del ^{11}Be sono determinate essenzialmente dalla parte asintotica della funzione d'onda e dipendono poco dalla struttura del core.

Nel caso in cui i nucleoni debolmente legati siano i protoni, si deve tener conto del potenziale Coulombiano repulsivo che innalza la barriera centrifuga diminuendo la probabilità di tunneling e la frazione di funzione d'onda trovata al di fuori della regione del core è più piccola in un alone di protone se paragonata ad un alone di neutrone nelle stesse condizioni di momento angolare ed energia di separazione; tuttavia vi è la possibilità che si formi un alone di protone, sebbene in tal caso la distribuzione risulti meno pronunciata. L'esistenza di alone di protone viene suggerita da alcuni nuclei aventi un eccesso di protoni rispetto all'elemento stabile, come ad esempio il ^8B , il quale fino ad oggi è l'unico nucleo con alone di protoni nel suo stato fondamentale che abbia trovato conferma sperimentale.

In un certo senso i nuclei con alone vengono considerati quali costituiti da un core inerte circondato da uno o due nucleoni esterni. L'assunzione di un core inerte deve però essere trattata con attenzione quando il core del nucleo possiede una bassa energia di eccitazione; il legame tra i nucleoni dell'alone e il core è estremamente debole, cosicché i primi tendono ad essere espulsi

durante le collisioni. Fino ad ora, soltanto nuclei con aloni di uno o due neutroni sono stati osservati. I più conosciuti sono il ^{11}Be (con un alone di un neutrone), e ^6He , ^{11}Li e ^{14}Be (aventi aloni di due neutroni).

1.3.3 Halo e skin

È possibile fare un'ulteriore distinzione nello studio dei nuclei ricchi di neutroni, ed è quella tra *skin* ed *halo*, dove la prima indica la presenza di uno strato più spesso nella superficie del nucleo. Tanihata et al. esaminando i dati sui raggi quadratici medi e sulle distribuzioni di materia di ^6He ed

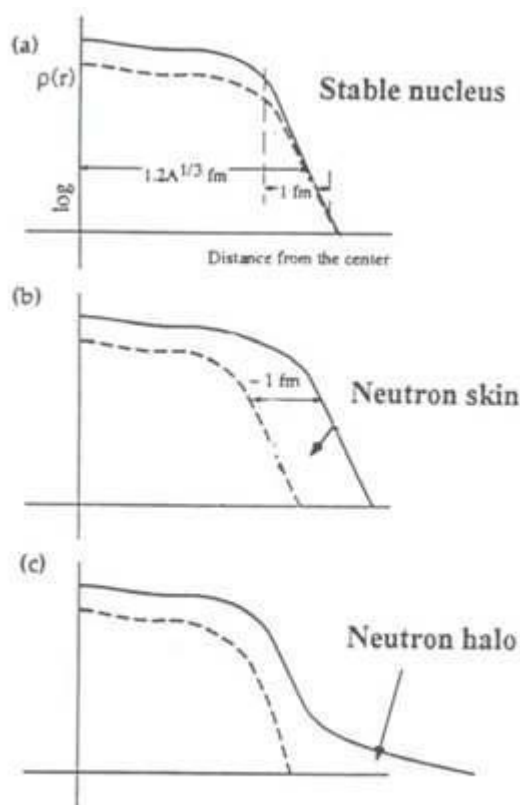


Figura 1.4: Distribuzioni di densità in funzione della distanza: (a)nucleo stabile; (b)skin di neutrone; (c)alone di neutrone.

${}^8\text{He}$ ottenuti precedentemente, si resero conto della presenza in entrambi i nuclei di un core di ${}^4\text{He}$, circondato da uno strato spesso di neutroni che si estendeva oltre il fermi. Tale strato venne indicato come *skin* di neutroni, fortemente accentuato nel caso del ${}^8\text{He}$, nel quale l'energia di legame dei quattro neutroni esterni risultava maggiore di quella della coppia di neutroni nel ${}^6\text{He}$. In realtà la distinzione tra halo e skin viene effettuata in termini di differenza nella pendenza della coda della densità, la quale è a sua volta legata all'energia di separazione. (Vedi Fig.(1.4))

1.4 Nuclei esotici: approccio teorico e sperimentale

Lo sviluppo di impianti per la produzione di fasci radioattivi (RIBs) ha permesso di effettuare una serie di esperimenti sulle reazioni indotte da nuclei esotici e i risultati sperimentali sono stati poi confrontati con i calcoli eseguiti sfruttando vari modelli teorici.

Conseguentemente, gli approcci teorici alla descrizione della struttura di un alone costituito da due neutroni sono in gran parte calcoli a tre corpi semi-fenomenologici basati su uno schema di un core+n+n. L'occupazione degli stati del core viene generalmente presa in considerazione attraverso una condizione di ortogonalità: viene analizzato (i) se l'interazione nota dei tre corpi può essere riprodotta da appropriate forze a due corpi tali da descrivere i sottosistemi core+n e n+n; (ii) se le proprietà conosciute del sistema possono essere riprodotte da una correzione fenomenologica delle interazioni. Le proprietà del sistema del core più un neutrone sono essenziali e i modelli si basano sulla conoscenza del momento angolare e della parità così come delle energie e del corrispondente potenziale effettivo tra neutrone e core.

Gli studi sulla struttura nucleare riguardano principalmente le proprietà degli stati discreti, cioè stati legati e risonanze. Nelle reazioni considerate tuttavia i sistemi nucleari si trovano in condizioni di scattering. L'accoppiamento

tra stati legati e di scattering è particolarmente importante nei nuclei lontani dalla valle di stabilità; quindi l'interpretazione dei risultati sperimentali dipende in maniera critica dall'affidabilità dei modelli di reazione. Il cosiddetto *breakup* (rottura) *Coulombiano* risulta di particolare interesse: in modo da estrarre correttamente informazioni circa la struttura di questi nuclei dalle sezioni d'urto sperimentali, si rende necessaria un'accurata descrizione teorica del meccanismo.

Le reazioni con nuclei con aloni sono caratterizzate da proiettili debolmente legati. In una convenzionale teoria di reazioni, questo tipo di proiettile pone un fondamentale problema: bisogna tenere conto dell'accoppiamento agli stati del continuo perché gli effetti di breakup possono diventare importanti in ogni canale. Tuttavia, quando il moto relativo tra proiettile e bersaglio è molto più veloce di quello del nucleone o dei nucleoni dell'alone appartenente al nucleo proiettile, la situazione diventa più semplice: per descrivere questo tipo di reazioni è possibile trascurare il moto all'interno del nucleo, il che è una sorta di approssimazione adiabatica.

D'altra parte, lo studio di sistemi non legati che mostrano risonanze molto vicine alla soglia di particella sta dando luce alla spettroscopia nel continuo: idealmente si vorrebbe studiare lo scattering elastico di neutroni a energie molto basse sul core del nucleo. Tuttavia, ciò non è fattibile al momento poiché tali cores, come ${}^9\text{Li}$, ${}^{12}\text{Be}$ oppure ${}^{15}\text{B}$ sono essi stessi instabili e quindi non possono essere usati quali bersaglio. Invece sono state utilizzate finora tecniche indirette che mirano principalmente a determinare l'energia e il momento angolare degli stati del continuo. Tali informazioni dovrebbero aiutare a fissare i parametri e la forma dell'interazione neutrone - core.

Le reazioni usate finora per studiare nuclei non legati possono essere raggruppate come:

- breakup del proiettile in seguito al quale le coincidenze neutrone - core vengono registrate e lo spettro energetico del neutrone rispetto al core viene ricostruito;
- reazioni di trasferimento di più particelle;

- trasferimento di un singolo protone o neutrone.

In alcuni altri casi, viene indotto il trasferimento di un neutrone da un bersaglio di deutone o di ${}^9\text{Be}$, aventi entrambi una bassa energia di separazione per il neutrone, e il neutrone interagisce nello stato finale con un proiettile di, ad esempio ${}^9\text{Li}$. In questo modo vengono popolati gli stati di risonanza di ${}^{10}\text{Li}$ secondo quella che può essere definita una *reazione di trasferimento al continuo*.

Capitolo 2

Reazioni di produzione di nuclei non legati

2.1 Introduzione

I nuclei leggeri non legati hanno attirato molta attenzione in connessione agli studi sui nuclei esotici con alone. Inoltre, una precisa conoscenza dei nuclei non legati è essenziale per determinare la posizione delle cosiddette *driplines* (Fig. (1.1)).

I nuclei halo sono sistemi molto complessi da descrivere (cfr. sezione 1.3), in particolare un punto chiave è l'accuratezza delle teorie di reazione adottate per estrarre informazioni sulla loro struttura. Da questo punto di vista, sono stati proposti semplici modelli semi-fenomenologici i quali esibiscono le proprietà di tali nuclei in termini di funzioni d'onda di uno o due singoli nucleoni e grazie ai quali ne risulta anche una semplificazione riguardante i calcoli della sezione d'urto per diverse reazioni causate da tali proiettili.

Come precedentemente accennato¹, idealmente si vorrebbe studiare lo scattering elastico di un neutrone sul core di provenienza considerato come bersaglio per energie molto basse. Ma tali cores, come il ${}^9\text{Li}$, ${}^{12}\text{Be}$ o ${}^{15}\text{B}$,

¹Sezione 1.4

sono essi stessi instabili e non possono essere usati poiché decadono troppo rapidamente. Finora sono state usate metodologie indirette, volte principalmente a determinare l'energia e il momento angolare degli stati del continuo.

In base alla teoria, i nuclei con alone di singolo neutrone possono essere descritti in un modello a due corpi consistente in un core in interazione con un neutrone. Tutta la complessità del problema a molti-corpi, quando le correlazioni a due corpi divengono importanti, può essere trasformata in un problema di potenziale efficace di singolo corpo tra il core e il neutrone esterno, e cioè un potenziale di *Hartree-Fock* più il contributo dovuto agli accoppiamenti vibrazionali tra particella e core. Questo contributo, piccolo in nuclei normali, è così forte in nuclei quali il ^{11}Be o il ^{10}Li che può essere responsabile ad esempio di un'inversione degli stati $1/2^+$ e $1/2^-$. Può inoltre indurre una forte modificazione delle funzioni d'onda le quali diventano un miscuglio di stati di singolo nucleone ed altri più complicati formati da un singolo nucleone accoppiato alle vibrazioni del core. Quale conseguenza, i fattori spettroscopici² del singolo nucleone sono più piccoli di uno. Questi possono essere estratti dalle sezioni d'urto di rimozione del singolo neutrone se si possiede una buona descrizione della reazione. Ed infine, un paragone tra i fattori spettroscopici teorici e misurati costituisce un ottimo test del modello adottato.

Quindi ^5He , ^{10}Li , così come ad esempio ^{13}Be e ^{16}B esistono solo quali stati di risonanza di un neutrone più un core e risulta necessario un ulteriore neutrone e la sua energia di legame per legare appunto il ^{11}Li e l' ^6He . Tuttavia l'energia di separazione dei due neutroni è tipicamente molto piccola ($\epsilon_{2n} = 0.3\text{MeV}$ per il ^{11}Li).

Da un punto di vista sperimentale, il metodo del trasferimento al continuo si presta molto bene a studi di sistemi non legati quali il ^{10}Li , i quali costituiscono i mattoni fondamentali dei nuclei borromeani. Esiste una teoria

²Si veda Appendice A, paragrafo A.2.2

comprovata per studiare tali reazioni, che permette di determinare le distribuzioni energetiche in valore assoluto per popolazioni di stati non legati. Visto che la stessa informazione si può ottenere attraverso gli esperimenti, la teoria permette di determinare la lunghezza di scattering degli stati s e l'energia di "risonanza" di stati non legati di singola particella, nonché i valori associati di l e j . Tali studi possono infine essere usati per definire l'interazione core - neutrone. Il vantaggio di questo metodo è che l'ingrediente fondamentale della teoria è la matrice - S che descrive lo scattering tra il neutrone ed il nucleo. Inoltre, può essere inclusa anche l'interazione spin - orbita così che per qualsiasi energia si può ottenere il contributo da tutti gli stati di dato l e j .

Così come il metodo del trasferimento al continuo, anche quello della frammentazione del proiettile valuta la probabilità di transizione per un neutrone da uno stato iniziale legato all'interno di un nucleo ad uno stato finale di scattering che include un'interazione nucleare. Ed anche in questo approccio, per descrivere tale interazione nello stato finale, viene utilizzata una matrice di scattering inserita nel contesto di un modello ottico per il trasferimento al continuo.

Per essere più precisi, chiameremo frammentazione del proiettile il *breakup* elastico di nuclei con alone di neutrone, quando ciò che viene osservato e studiato è lo spettro di energia relativa all'interazione neutrone - core. Le osservabili che descrivono tale tipo di interazioni sono state ampiamente misurate in relazione al breakup Coulombiano su bersaglio pesante. I meccanismi di reazione sono molto differenti quando dominano le interazioni Coulombiane invece che quelle a corto raggio. Per gli aloni nucleari il Coulombiano domina per bersagli pesanti mentre risulta non significativo per bersagli più leggeri. Per bersagli mediamente pesanti, i contributi a corto e lungo raggio possono essere paragonabili e ciò che avviene è il fenomeno dell'interferenza.

La frammentazione del proiettile è stata usata sperimentalmente anche per proiettili aventi alone di due neutroni. In questo caso è stato suggerito che la

reazione possa procedere secondo una singola fase (emissione simultanea dei due neutroni) o due fasi (emissioni successive) a seconda del tipo di bersaglio: se il bersaglio è pesante e quindi il breakup Coulombiano risulta il meccanismo dominante o se il bersaglio è leggero e quindi la reazione che predomina è il breakup nucleare. L'emissione successiva può essere dovuta a meccanismi differenti: una possibilità è quella che il neutrone venga emesso a causa dell'interazione con il bersaglio, mentre l'altro viene lasciato ad esempio in uno stato di risonanza e successivamente decade. Questa seconda fase può venire descritta attraverso un'approssimazione adiabatica sotto l'ipotesi che il primo neutrone venga strappato al sistema e si considera il secondo neutrone emesso per grandi parametri d'impatto cosicché l'interazione neutrone - bersaglio può essere trascurata. Il meccanismo a due fasi implica che i due neutroni non siano fortemente correlati così è possibile considerare l'emissione quale sequenziale.

Tuttavia l'interazione neutrone - bersaglio causa non solo reazioni di *stripping* ma anche breakup elastico ed in entrambi i casi al primo ordine nell'interazione il neutrone finisce in uno stato finale di onda piana [10]. Questo può quindi re - interagire con il core, il quale ad esempio può essere ^{10}Be nel caso di proiettile con alone di un neutrone (originariamente ^{11}Be), mentre sarà ^{12}Be nel caso della frammentazione di un proiettile di ^{14}Be , visto che ^{13}Be è un nucleo non legato. Se nel caso del ^{11}Be la struttura dei suoi stati legati e del continuo è ben conosciuta grazie ad altre tipologie di esperimenti e quindi gli esperimenti di frammentazione del proiettile sono utili a chiarire il meccanismo della reazione e la sua possibile descrizione, nel caso del ^{13}Be o di altri nuclei non legati l'interazione tra la struttura e gli aspetti della reazione deve ancora essere chiarita.

Sono stati effettuati esperimenti con un proiettile di ^{14}Be , nei quali gli spettri energetici relativi all'interazione neutrone - ^{12}Be sono stati ricostruiti attraverso misure di coincidenza. In nuclei di questo tipo il neutrone di valenza è debolmente legato, con energia di separazione $S_n = 0.969\text{MeV}$,

mentre il protone di valenza risulta fortemente legato con energia di separazione $S_p = 17.3\text{MeV}$. In ragione di ciò, il neutrone verrà probabilmente emesso nella prima fase e quindi nuovamente diffuso dal core del nucleo senza un neutrone. Le distanze proiettile - bersaglio alle quali questo tipo di meccanismo può essere rilevante sono probabilmente non così grandi da trascurare l'effetto dell'interazione neutrone - bersaglio. Ci si potrebbe chiedere come sia possibile descrivere un neutrone che si separi a causa dell'interazione con il bersaglio, venga lasciato in uno stato di moto descritto da un'onda piana che si muove alla stessa velocità del core di origine e che infine con quest'ultimo interagisca nuovamente nello stato finale. Questo risulta essere uno dei meccanismi all'origine delle misurazioni di coincidenza per un sistema avente un alone di un neutrone come il ^{11}Be o per un proiettile come il ^{14}Be ; nonché una delle reazioni che alimenta gli esperimenti per le misurazioni di frammentazione di ^{14}Be in ^{13}Be . Supponendo che i due neutroni siano fortemente correlati e che vengano emessi simultaneamente a causa dell'interazione con il proiettile, la misurazione della coincidenza di un neutrone con il core metterebbe in evidenza l'interazione nello stato finale tra il neutrone e il core.

In questo capitolo viene presentato il formalismo fondamentale per descrivere il trasferimento al continuo e la frammentazione del proiettile: se il primo tipo di reazione viene inteso come un passaggio di un neutrone tra due nuclei interagenti, da uno stato iniziale legato ad uno finale nel continuo con annessa interazione, la frammentazione del proiettile può venire intesa come una eccitazione inelastica al continuo per il sistema neutrone - core, del quale viene studiato poi lo stato finale di interazione.

Il paragone tra i due modelli porterà alla conclusione che il formalismo che descrive la frammentazione del proiettile non riflette direttamente le proprietà del sistema neutrone - core, in quanto vedremo che verrà introdotto uno sfasamento addizionale che contiene una dipendenza esplicita dal parametro d'impatto.

2.2 Sezione d'urto

Una descrizione completa del trattamento attraverso le equazioni di scattering per un nucleo che decade attraverso un breakup di singolo neutrone conseguentemente alla sua interazione con un altro nucleo, può essere trovata nei riferimenti [8, 9, 10]. Qui viene mostrato che all'interno dell'approccio semi - classico per il moto relativo proiettile - bersaglio, il differenziale della sezione d'urto rispetto a ϵ_f , energia finale nel continuo del neutrone, è

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon_f} = C^2 S \int_0^\infty db_c \vec{d}P_t(b_c) P_{ct}(b_c), \quad (2.1)$$

(cfr. Eq.(2.3) di [11]) e $C^2 S$ è il fattore spettroscopico per l'orbitale iniziale della singola particella.

La probabilità di sopravvivenza del core $P_{ct}(b_c) = |S_{ct}|^2$ nella Eq.(2.1) tiene conto della natura periferica della reazione e naturalmente esclude la possibilità di grandi sovrapposizioni tra proiettile e bersaglio. P_{ct} è definito in termini di una funzione della matrice di scattering dipendente dalla distanza di minimo approccio tra core - bersaglio, b_c . Una semplice parametrizzazione è $P_{ct}(b_c) = e^{(-\ln 2 \exp[(R_s - b_c)/a])}$, dove il raggio di forte assorbimento $R_s \approx 1.4(A_p^{1/3} + A_t^{1/3})fm$ è definito come la distanza di minimo approccio per una traiettoria che viene assorbita per il 50% dal canale elastico e $a = 0.6fm$ è un parametro di diffusività.

Nel Rif.[18], è stato mostrato che il trattamento semi - classico delle reazioni periferiche quasi - elastiche risulta valido per reazioni di trasferimento così come per le eccitazioni (inelastiche) del proiettile e quindi è possibile applicarlo semplicemente sostituendo $P_{in}(b_c)$ a $P_t(b_c)$ nella (2.1), che da la sezione d'urto in termini di probabilità di eccitazione del neutrone e della probabilità di scattering elastico. La sola differenza è che qui ϵ_f è l'energia finale del neutrone rispetto al suo core di origine. Poiché $P_{in}(b_c)$ dipende da b_c attraverso un fattore di forma I_{m_i, m_f} , definito in seguito nell'Eq.(2.29),

alla sezione d'urto finale contribuirà in maggior parte un limitato intervallo di parametri d'impatto centrato sul raggio di forte assorbimento.

2.3 Teoria del trasferimento al continuo

Utilizzando gli strumenti di Meccanica Quantistica forniti in Appendice A e B, e in accordo con il Rif.[9], l'elemento di matrice nell'ampiezza di transizione per un nucleone da uno stato legato ψ_i nel proiettile ad uno stato finale del continuo ψ_f (Eq. (B.14))

$$A_{fi} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \psi_f | V(\vec{r}) | \psi_i \rangle, \quad (2.2)$$

può essere ridotto ad un integrale di sovrapposizione tra le parti asintotiche delle funzioni d'onda per lo stato finale e iniziale. Qui V è l'interazione responsabile per la transizione del neutrone al continuo. Nel caso di un nucleo esotico leggero interagente con un altro nucleo leggero $V(\vec{r})$ è proprio il potenziale ottico tra il neutrone e il bersaglio $V(r) = U(r) + iW(r)$, e il differenziale della probabilità di trasferimento rispetto all'energia del neutrone può essere scritta come

$$\frac{dP_t(b_c)}{d\epsilon_f} = \frac{1}{8\pi^3} \frac{m}{\hbar^2 k_f} \frac{1}{2l_i + i} \sum_{m_i} |A_{fi}|^2 \quad (2.3a)$$

$$\approx \frac{4\pi}{2k_f^2} \sum_{j_f} (|1 - S_{j_f}|^2 + 1 - |S_{j_f}|^2) (2j_f + 1) (1 + F_{l_f, l_i, j_f, j_i}) B_{l_f, l_i} \quad (2.3b)$$

$$= \sigma_{nN}(\epsilon_f) F \quad (2.3c)$$

dove A_{fi} è data dall'equazione (2.2) ed è stata fatta una media sugli stati iniziali del neutrone e sommato sugli stati finali dello stesso.

L'equazione (2.3) possiede una struttura molto trasparente che la rende adatta a descrivere reazioni quali quelle di trasferimento al continuo. Infatti il termine

$$\sigma_{nN}(\epsilon_f) = \frac{4\pi}{2k_f^2} \sum_{j_f} (|1 - S_{j_f}|^2 + 1 - |S_{j_f}|^2)(2j_f + 1) \quad (2.4)$$

fornisce la sezione d'urto d'interazione neutrone - nucleo. S_{j_f} è la matrice di scattering nel modello ottico neutrone - nucleo, la quale viene calcolata per l'energia finale di ogni nucleone nel continuo con una energia dipendente dal modello ottico. I due termini $|1 - S_{j_f}|^2$ e $1 - |S_{j_f}|^2$ rappresentano rispettivamente la *shape* elastica di diffusione e l'assorbimento. Per i casi di nostro interesse solo il primo termine darà contributo, in quanto la discussione riguarderà stati di scattering sotto il primo stato eccitato del core e quindi verrà usato un potenziale ottico reale.

Il termine

$$B_{l_f, l_i} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{k_f}{mv^2} \right] |C_i|^2 \frac{e^{-2\eta b_c}}{2\eta b_c} M_{l_f, l_i}, \quad (2.5)$$

contiene le condizioni di raccordo tra l'energia iniziale e finale del neutrone e l'energia di moto relativo per particella $\frac{mv^2}{2}$ alla distanza di minimo approccio. $\eta = \sqrt{k_1^2 + \gamma_i^2}$ è la componente trasversa del momento del neutrone la quale viene conservata nella transizione del neutrone, $\gamma_i = \frac{\sqrt{-2m\epsilon_i}}{\hbar}$ e $k_f = \frac{\sqrt{2m\epsilon_f}}{\hbar}$ sono i momenti del neutrone nello stato iniziale e finale e $k_1 = \frac{\epsilon_f - \epsilon_i - mv^2/2}{\hbar v}$ è la componente longitudinale del momento del neutrone nello stato iniziale. Inoltre, b_c è il parametro d'impatto core-bersaglio, C_i è la costante di normalizzazione asintotica dello stato iniziale³ e M_{l_f, l_i} è un fattore dipendente dalla parte angolare delle funzioni d'onda iniziale e finale [11, 12].

Una caratteristica importante del presente formalismo è che la probabilità di trasferimento, Eq.(2.3), contiene il termine $1/k_f^2$: è stato notato

³Si veda l'equazione (A.28) nella sezione A.2.1

che se un formalismo riguardante un trasferimento al continuo non contiene tale fattore, allora le sezioni d'urto del modello per un'energia che tende a zero svaniranno sempre, il che non è una situazione fisicamente possibile. Le nostre sezioni d'urto calcolate invece avranno, nel caso di uno stato virtuale di energia esattamente pari a zero e $l = 0$, un andamento divergente per energie pari a zero, in accordo con i dati sperimentali e con le aspettative fisico - teoriche per uno stato s alla soglia. Bisognerebbe inoltre notare che nel termine B_{l_f, l_i} c'è un fattore di modulazione $\frac{k_f}{mv^2} \approx \frac{v_f}{v^2}$ il quale tiene conto del raccordo tra la velocità del proiettile alla distanza di minimo approccio v e la velocità finale del neutrone nel continuo v_f .

Un caso interessante risulta essere quello in cui l'energia finale del continuo tende a zero. Allora solo l'onda parziale con $l = 0$ contribuisce e usando $\frac{1}{4} |1 - S_0|^2 = \sin^2 \delta_0$, l' Eq.(2.1) diventa molto semplice se viene scritta come il differenziale rispetto al momento del neutrone nello stato finale, in particolare se lo stato iniziale del neutrone è esso stesso uno stato con $l = 0$ ed è così possibile assumere un fattore spettroscopico unitario. In tal caso il fattore di accoppiamento per lo spin $(1 + F_{l_f, l_i, j_f, j_i})$ e il fattore M_{l_f, l_i} sono indipendenti dall'energia cosicché la sezione d'urto differenziale finalmente risulta:

$$\frac{d\sigma}{dk_f} = (\sin \delta_0)^2 |C_i|^2 \left[\frac{\hbar}{mv} \right]^2 \int_0^\infty db_c \frac{e^{-2\eta b_c}}{\eta b_c} e^{(-\ln 2 \exp[(R_s - b_c)/a])}. \quad (2.6)$$

Se la parte sinistra dell'equazione precedente viene misurata sperimentalmente, allora il termine $(\sin \delta_0)^2$ può essere ottenuto dal rapporto tra $d\sigma_{exp}/dk_f$ e i restanti termini del lato destro dell'equazione (2.6), nel limite in cui l'energia tende a zero. Infatti l'equazione riportata sopra è ben strutturata, perché l'unica dipendenza dall'energia del neutrone è contenuta nel termine $\frac{e^{-2\eta b_c}}{\eta b_c}$, dove η tende ad un valore costante nel limite di energia nulla. Infine la lunghezza di scattering può essere ottenuta da $a_s = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \delta_0}{k}$.

È interessante notare la somiglianza tra l'equazione (2.6) e la corrispondente formula per una reazione di trasferimento tra stati legati

$$\sigma(\epsilon_f) = \frac{\pi}{2} |C_i C_f|^2 \left[\frac{\hbar}{mv} \right]^2 \int_0^\infty db_c \frac{e^{-2\eta b_c}}{\eta b_c} e^{(-\ln 2 \exp[(R_s - b_c)/a])}, \quad (2.7)$$

come già discusso in altri studi (cfr. Rif.[9]); infatti è stato mostrato che il termine $(\sin \delta_0)^2$ dopo essere integrato sull'energia finale del continuo, gioca lo stesso ruolo della costante di normalizzazione asintotica dello stato finale legato C_f^2 .

2.4 Eccitazione inelastica al continuo

Analogamente a quanto detto sopra, al prim'ordine le eccitazioni di tipo inelastico possono essere descritte attraverso una teoria perturbativa dipendente dal tempo, e quindi attraverso la seguente ampiezza (cfr. Eq. (B.14))

$$A_{fi} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \psi_f(\vec{r}, t) | V_2(\vec{r} - \vec{R}(t)) | \psi_i(\vec{r}, t) \rangle, \quad (2.8)$$

per una transizione di un nucleone da uno stato legato ψ_i ad uno stato finale ψ_f che nel caso in questione risulta essere uno stato appartenente al continuo. V_2 è l'interazione responsabile della transizione del neutrone, mentre $\psi_i = \phi_i(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_i t}$ è la funzione d'onda iniziale per la singola particella. La sua parte radiale $\phi_i(\vec{r})$ è calcolata in un potenziale $V_{WS}(r)$ il quale risulta fissato nello spazio. Il sistema di coordinate usato nei calcoli è mostrato nella Fig. (2.1) e corrisponde ad una approssimazione in cui l'effetto di rinculo del core è trascurato.

Nel caso speciale dei nuclei esotici il tradizionale approccio alle eccitazioni inelastiche deve essere modificato. Ad esempio lo stato finale può essere un autostato di un potenziale V_1 modificato rispetto al Wood-Saxon iniziale

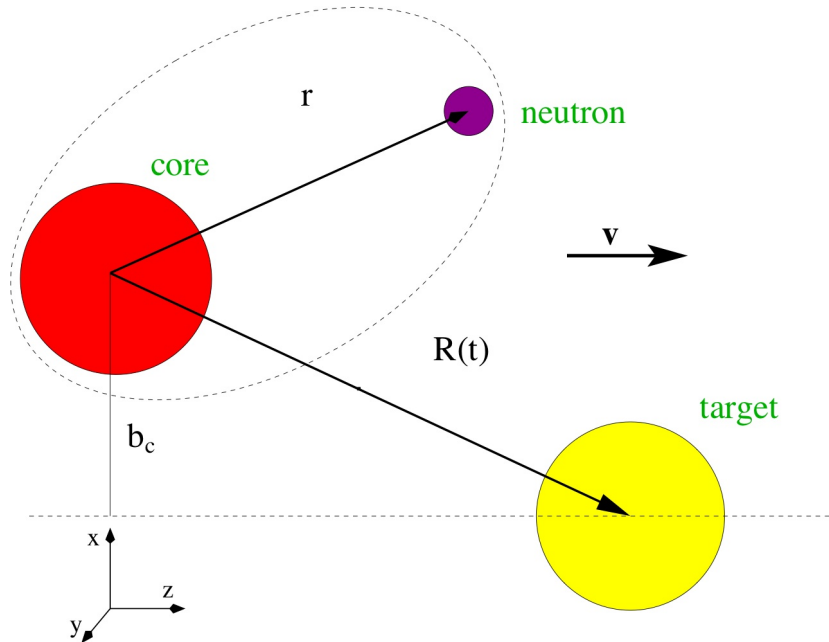


Figura 2.1: Sistema di coordinate usato nei calcoli.

poiché qualche altra particella può essere emessa durante il processo della reazione come discusso nell'introduzione. L'interazione nello stato finale può anche avere una parte immaginaria che tiene conto dell'accoppiamento tra uno stato del continuo e un core eccitato. Il potenziale $V_2(\vec{r} - \vec{R}(t))$ tiene conto di un moto a velocità costante v nella direzione dell'asse z con un parametro d'urto b_c nella direzione dell'asse x nel piano $y = 0$; infatti $\vec{R}(t) = \vec{b}_c + \vec{v}t$. Queste assunzioni rendono tale modello semi-classico valido per energie del fascio superiori all'altezza della barriera Coulombiana. Queste sono infatti le condizioni in cui vengono effettuati gli esperimenti di frammentazione del proiettile.

Al primo ordine, l'ampiezza della perturbazione dipendente dal tempo risulta⁴:

⁴Equazione (B.14)

$$A_{fi} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt dx dy dz \phi_f^*(x, y, z) \phi_i(x, y, z) e^{i\omega t} V_2(x - b_c, y, z - vt), \quad (2.9)$$

dove $\hbar\omega$ è la differenza energetica tra gli stati iniziale e finale. Applicando un cambiamento di variabili tale che $z - vt = z'$ o $t = (z - z')/v$, l'ampiezza diventa

$$A_{fi} = \frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz dz' \phi_f^*(x, y, z) \phi_i(x, y, z) e^{iq(z-z')} V_2(x - b_c, y, z'), \quad (2.10)$$

dove

$$q = \frac{\epsilon_f - \epsilon_i}{\hbar v}. \quad (2.11)$$

Allora

$$A_{fi} = \frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz \phi_f^*(x, y, z) \phi_i(x, y, z) e^{iqz} \tilde{V}_2(x - b_c, y, q), \quad (2.12)$$

dove

$$\tilde{V}_2(x - b_c, y, q) = \int_{-\infty}^{\infty} dz V_2(x - b_c, y, z) e^{iqz}. \quad (2.13)$$

Nel presente approccio la presenza del bersaglio rappresentata da questa interazione ha l'effetto di perturbare la funzione d'onda iniziale dello stato legato e permette la transizione al continuo trasferendo della quantità di moto al neutrone. A questo proposito, sebbene il potenziale $V_2(r)$ ha un raggio dell'ordine del potenziale del bersaglio, risulta sufficiente scegliere una forma semplificata dell'interazione. Viene quindi scelta per $V_2(r)$ una funzione delta

dalla forma $V_2(r) = v_2\delta(x)\delta(y)\delta(z)$, con $v_2 = [MeVfm^3]$. É così possibile calcolare gli integrali su x e su y i quali forniscono

$$A_{fi} = \frac{v_2}{i\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} dz \phi_f^*(b_c, 0, z)\phi_i(b_c, 0, z)e^{iqz}. \quad (2.14)$$

Da questa equazione è chiaro quale sia l'effetto dell'interazione δ tra il neutrone e il bersaglio in un approccio dipendente dal tempo: mentre in un'approssimazione adiabatica la sovrapposizione dello stato iniziale e finale viene considerata nell'intero spazio delle coordinate, indipendentemente dalla velocità del bersaglio e del fascio, qui la sovrapposizione delle funzioni d'onda iniziale e finale viene presa per distanze pari al parametro d'impatto core - bersaglio nella direzione dell'asse x che giace per l'appunto lungo la distanza di minimo approccio. La componente y è zero (il neutrone risulta emesso preferenzialmente nel piano della reazione) e la componente z , giacendo lungo l'asse della velocità relativa viene incrementata da un momento q .

Il potenziale delta - forme può essere una buona approssimazione se $\gamma R_T \ll 1$ e $kR_T \ll 1$ dove R_T è il raggio del bersaglio, $\gamma = \sqrt{-2m\epsilon_i}/\hbar$ è la lunghezza di decadimento della funzione d'onda iniziale di singola particella corrispondente all'energia di legame ϵ_i e $k = \sqrt{2m\epsilon_f}/\hbar$ è il momento finale del nucleone nello stato del continuo. In questo caso le funzioni d'onda iniziale e finale sono abbastanza costanti sul volume del bersaglio e possono essere sostituite dai loro valori al centro. La seconda condizione è legata alla prima in quanto la sezione d'urto si riduce se k è grande paragonato a γ . Viene inoltre richiesto che la reazione sia periferica nel senso che $R_c + R_T < b_c$ dove R_c è il raggio del core del proiettile.

Un'altra situazione in cui il potenziale delta - forme è una buona approssimazione è quando $\gamma R_T \gg 1$, cioè lo stato iniziale deve essere fortemente legato e la funzione d'onda iniziale decade rapidamente all'interno del bersaglio. Allora il potenziale δ deve essere situato sulla superficie del bersaglio. Se, per esempio, $V_2(r)$ è una buca di potenziale con raggio R_T e se $\gamma R_T \gg 1$, allora

l'Eq.(2.14) può essere usata per valutare il breakup attraverso le seguenti modifiche:

- b_c viene sostituito da $b_c - R_T$, quindi l'interazione è situata sulla superficie del bersaglio;
- v_2 viene sostituito da \bar{v}_2 dove

$$\bar{v}_2 = \frac{3}{2} \frac{v_2}{(\gamma - ik)^2 R_T^2}. \quad (2.15)$$

Per primo è possibile studiare il semplice caso in cui lo stato iniziale legato e lo stato finale del continuo hanno $l_i = l_f = 0$, quindi

$$\phi_i(b_c, 0, z) = -\frac{C_i}{\sqrt{4\pi}} \frac{e^{-\gamma r}}{r}, \quad (2.16)$$

$$\phi_f(b_c, 0, z) = \frac{C_f}{\sqrt{4\pi}} i \frac{k}{2} \left(h_0^{(-)}(kr) - S h_0^{(+)}(kr) \right). \quad (2.17)$$

Queste espressioni sono le forme asintotiche delle funzioni d'onda iniziale e finale. Il loro uso viene giustificato quando il parametro d'impatto risulta sufficientemente grande e $r = \sqrt{b_c^2 + z^2}$.

$\gamma = \frac{\sqrt{-2m\epsilon_i}}{\hbar}$ e $k = \frac{\sqrt{2m\epsilon_f}}{\hbar}$ sono i momenti del neutrone negli stati iniziale e finale. C_i è la costante di normalizzazione asintotica della funzione d'onda dello stato iniziale mentre $C_f = \sqrt{2/L}$ è la costante di normalizzazione asintotica per lo stato finale. L è la larghezza della buca in cui si normalizza la funzione d'onda nel continuo. La quantità S è la matrice di scattering che rappresenta l'interazione nello stato finale tra il neutrone e il core proiettile. Allora

$$A_{fi} = -\frac{v_2}{\hbar v} \frac{C_i C_f}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-(\gamma-ik)r} - S^* e^{-(\gamma+ik)r}}{r^2} \cos qz. \quad (2.18)$$

Adesso definiamo

$$I_R = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-(\gamma-ik)r}}{r^2} \cos qz, \quad (2.19)$$

e

$$I_I = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-(\gamma-ik)r}}{r^2} \cos qz, \quad (2.20)$$

così che :

$$I(k, q) = I_R + iI_I = |I|e^{i\nu} \quad (2.21)$$

mentre

$$\bar{S} = S e^{2i\nu} = e^{2i(\delta+\nu)} \quad (2.22)$$

allora

$$A_{fi} = C(I - S^* I^*) \quad (2.23)$$

e

$$|A_{fi}|^2 = |C|^2 |I|^2 |1 - \bar{S}|^2. \quad (2.24)$$

dove ora $C = -\frac{v_2}{\hbar v} \frac{C_i C_f}{8\pi}$.

2.4.1 Lo spettro della probabilità

La probabilità di eccitare uno stato finale del continuo con energia ϵ_f è una media sullo stato iniziale

$$P_{in} = \frac{1}{2l_i + 1} \sum_{m_i, m_f} |A_{fi}|^2 \quad (2.25)$$

e una somma sugli stati finali. Introducendo la regola di quantizzazione

$$kL = n\pi, \quad (2.26)$$

e la densità degli stati finali, in accordo con il Rif.[9]

$$\rho(\epsilon_f)d\epsilon_f = \frac{L}{\pi} \frac{m}{\hbar^2 k} d\epsilon_f, \quad (2.27)$$

lo spettro delle probabilità risulta

$$\frac{dP_{in}}{d\epsilon_f} = \frac{2}{\pi} \frac{v_2^2}{\hbar^2 v^2} C_i^2 \frac{m}{\hbar^2 k} \frac{1}{2l_i + 1} \sum_{m_i, m_f} |1 - \bar{S}_{m_i, m_f}|^2 |I_{m_i, m_f}|^2, \quad (2.28)$$

dove ora

$$|I_{m_i, m_f}|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iqz} i^{l_i} \gamma h_{l_i}^{(1)}(i\gamma r) Y_{l_i, m_i}(\theta, 0) k \frac{i}{2} h_{l_f}^{(-)}(kr) Y_{l_f, m_f}(\theta, 0) \right|^2. \quad (2.29)$$

Da notare che la dipendenza in L dell'equazione (2.27) cancella quella in C_f . Per semplicità le equazioni in questa sezione sono state ricavate senza le variabili di spin negli stati iniziale e finale; per una trattazione completa si può fare riferimento all'appendice B di [14].

2.4.2 Valutazione approssimata dell'integrale $I(k, q)$

Per studiare gli effetti qualitativi dell'interazione nello stato finale verrà qui effettuata una valutazione approssimata per l'integrale $I(k, q)$ per $l_i = l_f = 0$. Per grandi parametri d'impatto b_c , si ha che $r = \sqrt{b_c^2 + z^2} \approx b_c + z^2/2b_c$. Allora

$$\begin{aligned} I(k, q) &\approx \frac{1}{b_c^2} e^{-(\gamma - ik)b_c} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-(\gamma - ik)z^2/b_c} \cos(qz) \\ &= \frac{1}{b_c^2} \sqrt{\frac{2\pi b_c}{(\gamma - ik)}} e^{-(\gamma - ik)b_c} \exp\left(-\frac{b_c q^2}{2(\gamma - ik)}\right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Qui la fase ν sarà data da

$$\begin{aligned}\nu &= -\frac{1}{2}\text{arg}(\gamma - ik) + kb_c - \frac{kb_c q^2}{2(\gamma - ik)} \\ &= -\frac{1}{2}\text{arg}(\gamma - ik) + kb_c \left(1 - \frac{\gamma^2 + k^2}{8\bar{k}^2}\right)\end{aligned}\quad (2.31)$$

dove $\bar{k} = mv/\hbar$ ed è stata usata l'Eq.(2.11) per ottenere $q = (\gamma^2 + k^2/2\bar{k})$. Il valore stimato per $|I|^2$ è

$$\begin{aligned}|I|^2 &= -\frac{1}{b_c^4} \frac{2\pi b_c}{\sqrt{\gamma^2 + k^2}} e^{-2\gamma b_c} \exp\left(-\gamma b_c \frac{\gamma^2 + k^2}{4\bar{k}^2}\right) \\ &= \frac{1}{b_c^3} \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma^2 + k^2}} \exp\left(-2\gamma b_c \left(1 + \frac{q}{4\bar{k}}\right)\right).\end{aligned}\quad (2.32)$$

Le formule approssimate suggeriscono alcune semplici interpretazioni dal punto di vista fisico. La prima è che è stata ottenuta una espressione esplicita per la dipendenza di ν dal numero d'onda k del neutrone, dal parametro d'impatto core-bersaglio b_c e dal parametro di adiabaticità q/\bar{k} .

$|I|^2 \approx \frac{e^{-2\gamma b_c}}{b_c^3}$ può essere interpretato come un fattore di forma inelastico e risulta interessante paragonarlo al fattore di forma del continuo $\frac{e^{-2\eta b_c}}{b_c}$ dato nel Rif.[9]. Il fattore di forma inelastico diminuisce al crescere del parametro d'impatto molto più velocemente dell'altro fattore di forma. Questa è una caratteristica ben nota degli stati finali legati ed è interessante vedere che persiste per stati finali nel continuo.

Infine è possibile effettuare una connessione con la formula dell'approssimazione adiabatica che descrive la seconda fase di una reazione di breakup di neutrone quale decadimento di risonanza, quando il primo neutrone è stato precedentemente strappato. Nella notazione adottata questa risulta

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\epsilon_f} &\approx \frac{1}{k(\gamma^2 + k^2)} \left(\frac{k \cos \delta + \gamma \cos \delta}{\sqrt{\gamma^2 + k^2}} \right)^2 \\ &\approx \frac{1}{k} \frac{|\sin(\delta + \beta)|^2}{(\gamma^2 + k^2)}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

dove $\beta = \arctan(k/\gamma)$. Questo formalismo inoltre predice la presenza di un ulteriore sfasamento β rispetto allo scattering della particella libera determinato da δ visto che $|\sin(\delta + \beta)|^2 = \frac{1}{4}|1 - \tilde{S}|^2$ e $\tilde{S} = e^{2i(\delta+\beta)}$. L'effetto di β sarebbe quello di modificare le strutture risonanti. In entrambi i casi S e \tilde{S} possono essere interpretati come le matrici di scattering sulla soglia dell'energia. D'altra parte la fase addizionale ν contiene una dipendenza esplicita dal parametro d'impatto e nel nostro caso è stato calcolato lo sfasamento del potenziale e la matrice - S in un modello ottico. Inoltre la nostra matrice - S in linea di principio può essere complessa per permettere gli effetti di eccitazione del core e può descrivere consistentemente, adottando lo stesso formalismo, gli stati finali del continuo risonanti e non risonanti di momento angolare $l_f = 0$ ma anche $l_f > 0$.

2.5 Conclusione

In questo capitolo, sono stati presentati due modelli per lo studio delle transizioni di un neutrone da uno stato iniziale legato ad uno stato finale di risonanza nello spettro di bassa energia del continuo del sistema neutrone - core. Questo è il processo attraverso il quale vengono creati i nuclei "non legati" e poi studiati mediante esperimenti di trasferimento al continuo o di frammentazione del proiettile.

Il metodo del trasferimento al continuo permette di studiare nuclei instabili per decadimento di neutrone come il ^{10}Li , costituenti fondamentali dei nuclei borromeiani; è possibile inoltre determinare la lunghezza di scattering

a_s e le proprietà delle risonanze di singola particella. Per quel che riguarda la teoria della frammentazione del proiettile, è stato mostrato (Rif.[18]) che il trattamento semi - classico delle reazioni periferiche quasi - elastiche risulta valido anche per le eccitazioni (inelastiche) del proiettile così come per le reazioni di trasferimento e quindi è possibile applicarlo semplicemente sostituendo $P_{in}(b_c)$ (Eq.(2.25)) a $P_t(b_c)$ nella (2.1), come già è stato sottolineato, con la sola differenza che qui ϵ_f è l'energia finale del neutrone rispetto al suo core di origine. Poiché $P_{in}(b_c)$ dipende da b_c attraverso il fattore di forma I_{m_i, m_f} , alla sezione d'urto finale contribuirà in maggior parte un limitato intervallo di parametri d'impatto centrato sul raggio di forte assorbimento. Una delle differenze tra le due tipologie di reazione è infatti il diverso range per il fattore di forma: paragonando il fattore di forma inelastico $I_{l_f, l_i} \approx \frac{e^{-2\gamma b_c}}{b_c^3}$ a quello per il trasferimento al continuo $B_{l_f, l_i} \approx \frac{e^{-2\eta b_c}}{b_c}$, vediamo che il primo diminuisce al crescere del parametro di impatto molto più velocemente del secondo e quindi risulta essere un fattore di forma a più corto range. Inoltre nella trattazione dell'interazione nello stato finale viene adottata da entrambi i metodi una matrice di scattering per il sistema neutrone - core, solo che per la frammentazione del proiettile l'esistenza di uno sfasamento aggiuntivo ν fa sì che la matrice - S venga analizzata fuori dalla shell di energia.

Adottando questo tipo di trattazione è possibile studiare anche una fase del breakup di due neutroni di un nucleo Borromeo. Alcune di queste applicazioni (al ^{11}Be , ^{14}Be e ^{11}Li) possono trovarsi nei lavori [13, 14], nei quali i risultati ottenuti rivelano una buona affidabilità della teoria della reazione sviluppata, paragonando i dati sperimentali ai calcoli teorici.

Capitolo 3

Applicazioni alla struttura del

^{10}Li

3.1 Introduzione

Il legame tra la teoria della reazione e il modello della struttura si basa sulla determinazione della matrice di scattering nell'Eq.(2.3) e quindi sul potenziale ottico; una volta che la teoria ha stabilito posizione e forma della distribuzione di energia nel continuo per il sistema nucleo - neutrone, risulta possibile dedurre i parametri del potenziale.

Il ^{10}Li non è un sistema legato e per basse energie nei suoi stati del continuo ci si aspetta di trovare quattro stati (due doppietti di spin) dovuti all'accoppiamento con lo stato $p_{3/2}^-$ di un protone extra del core di ^9Li . Gli stati con spin totale 1^- o 2^- sarebbero dovuti ad un accoppiamento di un neutrone in uno stato s , mentre l'accoppiamento con uno stato p avrebbe dato spin 1^+ o 2^+ . Per il ^{10}Li le evidenze sperimentali portano ad uno stato fondamentale di 1^- a causa di uno stato s "virtuale" vicino alla soglia.

Recenti esperimenti di *pickup* di protone $d(^{11}\text{Be}, ^3\text{He})^{10}\text{Li}$ hanno definitivamente confermato l'ipotesi che lo stato fondamentale del ^{10}Li sia lo stato virtuale $2s$ e che l'orbitale $1p_{1/2}$ dia uno stato eccitato.

3.2 Potenziale medio per un neutrone

Per descrivere il neutrone di valenza nel ^{10}Li viene assunto che l'Hamiltoniana del singolo neutrone rispetto al ^9Li abbia la forma:

$$h = t + U + iW, \quad (3.1)$$

dove t è l'energia cinetica e

$$U(r) = V_{WS} + \delta V, \quad (3.2)$$

è la parte reale dell'interazione core - neutrone. Nel presente lavoro la parte immaginaria viene assunta nulla.

V_{WS} è l'usuale potenziale di Wood-Saxon più il termine d'interazione spin - orbita:

$$V_{WS}(r) = \frac{V_0}{1 + e^{(r-R)/a}} - \left(\frac{\hbar}{m_\pi c} \right)^2 \frac{V_{SO}}{ar} \frac{e^{(r-R)/a}}{(1 + e^{(r-R)/a})^2} \vec{l} \cdot \vec{\sigma}, \quad (3.3)$$

e δV è una correzione che ha origine dagli accoppiamenti vibrazionali della particella:

$$\delta V = 16\alpha e^{2(r-R)/a} / (1 + e^{(r-R)/a})^4 \quad (3.4)$$

dove $R \approx r_0 A^{1/3}$.

Tali accoppiamenti vibrazionali sono molto importanti per stati di bassa energia ma possono essere trascurati per energie più elevate. Infatti, usando il modello collettivo di Bohr e Mottelson per le ampiezze di transizione tra stati di zero e un fonone, i calcoli di tali accoppiamenti porterebbero all'espressione data nell'Eq.(3.4). Quindi tale modello descrive una singola particella sottoposta ad un potenziale al cui interno sono però contenuti anche accoppiamenti collettivi, sebbene una trattazione più realistica debba comunque tenere conto di una sistema di tre corpi in interazione.

Le energie del continuo possono essere fissate variando il parametro α nel potenziale. Cambiando tale valore nella correzione δV nell'Eq.(3.4), risulta inoltre possibile avvicinare lo stato $2s$ alla soglia e vedere l'effetto sullo spettro nel continuo (Rif.[13, 15, 16]).

I parametri di V_{WS} per l'interazione $n-{}^9Li$ sono riportati nella Tabella 3.1; i potenziali corrispondenti ai differenti valori di α sono quindi mostrati in Fig. (3.1) attraverso le linee tratteggiate, quella più lunga rappresenta lo stato $2s$ e quella tratteggiata più corta è per lo stato $1p_{1/2}$.

V_0	r_0	a	V_{so}	a_{so}
(MeV)	(fm)	(fm)	(MeV)	(fm)
-39.83	1.27	0.75	7.07	0.75

Tabella 3.1: Parametri del potenziale di Wood-Saxon e di spin-orbita.

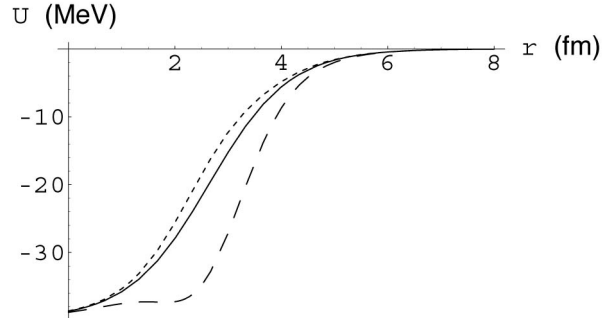


Figura 3.1: La linea continua rappresenta il potenziale di Wood-Saxon. Le due linee tratteggiate rappresentano il potenziale di Wood-Saxon più la correzione del termine di superficie in accordo con l'Eq.(3.2) per lo stato con $l = 0$ (linea tratteggiata lunga, $\alpha = -10.0$) e $l = 1$ (linea tratteggiata corta, $\alpha = 3.3$).

ϵ_i (MeV)	l_i	j_i	C_i ($\text{fm}^{-1/2}$)	C^2S
-0.3	0	1/2	0.76	0.31
-0.3	1	1/2	0.24	0.45

Tabella 3.2: Costanti di normalizzazione asintotica C_i ($\text{fm}^{-1/2}$) per le funzioni d'onda nello stato iniziale del neutrone legato. I fattori spettroscopici sperimentali sono stati presi dal Rif.[22]. V_0 è stato fissato per dare una energia di separazione pari a 0.3MeV (Rif.[23]). Inoltre: $r_0 = 1.27\text{fm}$, $a = 0.75\text{fm}$ e $V_{so} = 5.25\text{MeV}$.

3.3 ^{10}Li : Trasferimento al continuo

Una delle caratteristiche di tale trattazione è la possibilità di usare in maniera consistente una differente interazione core - neutrone (diversi parametri per il potenziale) per ogni differente energia del sistema in esame. E ciò risulta particolarmente importante per nuclei come il ^{10}Li , che posseggono stati di bassa energia con $l = 0$ e $l = 1$, entro un intervallo di circa 0.5MeV dalla soglia e che possono essere riprodotti solo usando due potenziali molto diversi tra loro. In particolare, una delle sfide della Fisica Nucleare è lo studio delle interazioni efficaci nucleone - nucleo, la maggior parte delle quali, dipende dal momento angolare e dall'energia.

Per studiare reazioni di trasferimento al continuo, consistenti in un singolo neutrone appartenente al bersaglio che viene trasformato in seguito alla frammentazione dello stesso bersaglio in proiettile con valori continui di energia, è possibile prendere come esempi¹ reazioni del tipo: $^9\text{Li}(X, X-1)^{10}\text{Li}$ a 2A MeV per tre bersagli d , ^9Be e ^{13}C .

Per il ^{13}C il trasferimento di un neutrone dallo stato iniziale $p_{1/2}$ allo

¹Rif.[15]

Target	d	^9Be	^{13}C
ϵ_i (MeV)	-2.22	-1.66	-4.95
l_i	0	1	1
j_i	1/2	3/2	1/2
C_i ($\text{fm}^{-1/2}$)	0.95	0.68	1.88

Tabella 3.3: Bersagli e parametri per lo stato iniziale del neutrone legato.

	ϵ_{res} (MeV)	Γ (MeV)	a_s (fm)	α (MeV)
$2s_{1/2}$			323	-12.5
			-17.20	-10.0
$1p_{1/2}$	0.595	0.48		3.3
$2s_{1/2}$			-17.2	-10.0
$1p_{1/2}$	0.63	0.35		3.3
$1d_{5/2}$	1.55	0.18		-9.8

Tabella 3.4: Nella prima parte della tabella: lunghezza di scattering per lo stato s , energia e larghezza dello stato p non legato e parametro di intensità per la correzione al potenziale δV utilizzati nella sezione 3.3. Nella seconda parte: oltre ai parametri per lo stato s , vengono riportati i valori per le risonanze p e d nel ^{10}Li ottenuto attraverso la reazione di frammentazione.

stato finale $p_{1/2}$ appartenente al ^{10}Li , è una transizione che non prevede il cosiddetto "spin-flip"², si va da uno stato in cui $j_i = l_i + 1/2$ ad uno in cui $j_f = l_f + 1/2$; mentre il trasferimento ad uno stato $s_{1/2}$ risulta essere una transizione di tipo "spin-flip". Anche il ^{14}N potrebbe essere un buon

²Transizione da uno stato in cui a causa dell'energia di eccitazione, lo spin di una particella risulta allineato allo spin di un altro sistema, per poi effettuare una rotazione di tale spin portandosi ad energie più basse.

bersaglio poiché ha un neutrone di valenza nello stato $p_{1/2}$, ma la sezione d'urto totale è più piccola di quella del ^{13}C in quanto è più grande il valore dell'energia di separazione (10.55 MeV). Per un bersaglio di *deutone* lo stato iniziale è all'ottanta per cento uno stato $s_{1/2}$ mentre per il ^9Be è uno stato $p_{3/2}$, ma per entrambi il trasferimento allo stato $2s$ è una transizione di tipo "spin-flip", mentre è molto più favorito un trasferimento ad uno stato $p_{1/2}$. Per questi tre bersagli viene assunto un fattore spettroscopico unitario³.

Le larghezze degli stati dipendono dal meccanismo della reazione, ma la "vera" larghezza di risonanza può essere ottenuta dalla variazione dello sfasamento vicino all'energia di risonanza, in accordo con $\left. \frac{d\delta_j}{d\epsilon_f} \right|_{\epsilon_{res}} = \frac{2}{\Gamma}$, una volta fissata l'energia di risonanza (Rif.[21]). Usando tale formula è stato ottenuto per lo stato p nel ^{10}Li con $\epsilon_{res} = 0.595 \text{ MeV}$ il seguente valore per la larghezza di risonanza: $\Gamma = 0.48 \text{ MeV}$.

Per uno stato s finale c'è una probabilità di popolazione più grande se si è in presenza di una transizione di "spin-flip" attivata ad esempio da un bersaglio di carbonio. Una particolarità dello scattering di una particella neutra a basse energie per un'onda parziale $l = 0$ è l'assenza della barriera centrifuga; questo implica che l'energia e la larghezza dello stato s sono difficili da definire. Si studia quindi la dipendenza dall'energia dello sfasamento per diversi potenziali (Tabella 3.1) e per ogni singolo caso si determina il valore della lunghezza di scattering (Tabella 3.5).

Analizzando tali risultati per diversi potenziali e per diversi valori di a_s ⁴, essi appaiono essere consistenti con il Rif.[24] e con la ben nota teoria di diffusione per particelle neutre a basse energie. Nonostante la difficoltà nel cercare sperimentalmente l'energia e la "natura" di stati s debolmente legati o semplicemente non legati in nuclei esotici, si mostra che il valore assoluto della sezione d'urto giusto alla soglia insieme alla funzione spettrale, deter-

³Appendice A, A.2.2

⁴Vedi Appendice C.

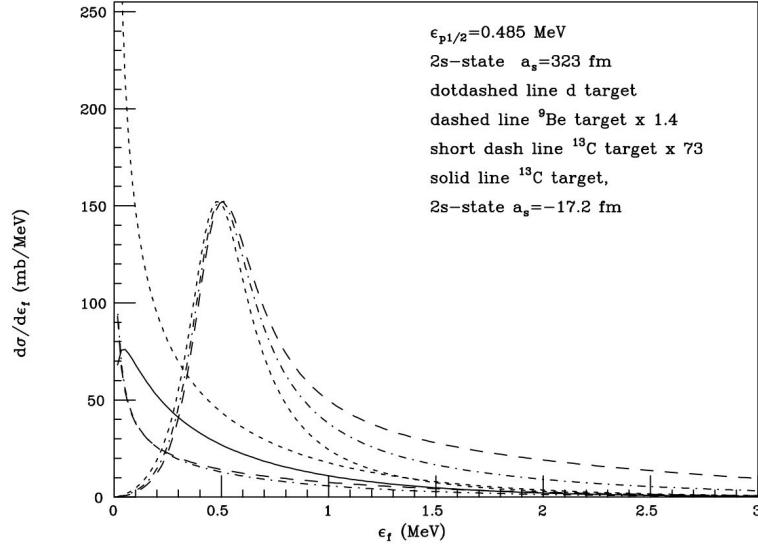


Figura 3.2: Spettro di energia relativa per il sistema $n - ^9\text{Li}$ per il trasferimento agli stati s e p nel continuo del ^{10}Li dati in Tabella 3.4. Le linee tratteggiate con il punto sono le sezioni d'urto totali per il trasferimento da un bersaglio di deutone, quelle tratteggiate sono per un bersaglio di ^9Be , e le linee tratteggiate più piccole sono per un bersaglio di ^{13}C . Le sezioni d'urto per il Be e per il C sono state rinormalizzate rispetto a quella per il deutone attraverso i fattori riportati in figura. La linea continua è la sezione d'urto di trasferimento da un bersaglio di C al secondo stato s dato in Tabella 3.4.

minano la lunghezza di scattering dello stato.

Nel ^{10}Li valori della lunghezza di scattering maggiori di $|a_s| \sim 20 \text{ fm}$, porterebbero ad un andamento divergente di $\sigma(\epsilon_f)$ per $\epsilon_f \rightarrow 0$. Il valore assoluto di a_s può essere determinato dallo spettro sperimentale⁵ così da

⁵Si faccia riferimento al commento all'espressione (2.6) a pag. 26.

	V_0 (MeV)	α (MeV)	a_s (fm)
(1)	-39.83	-4.0	-2.4
(2)	-	-10.0	-17.2
(3)	-	-12.2	-318
(4)	-	-13.5	45.1
(5)	-	-15.0	21.4
(6)	-42.80	-13.3	12.9

Tabella 3.5: Valori per il potenziale nello stato s nell'Eq.(3.2) e corrispondenti lunghezze di scattering.

fissare i parametri dell'interazione $n - {}^9\text{Li}$. É così possibile definire *stati virtuali* quegli stati per cui $|a_s|$ tende all'infinito, il che porta ad un andamento divergente della sezione d'urto per energie finali prossime allo zero.

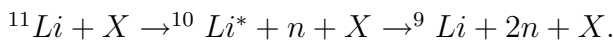
É importante sottolineare che strutture risonanti viste nel continuo per basse energie possono essere indicatori di stati s debolmente legati così come di stati s non legati; si ricorre quindi a misure complementari per risolvere le eventuali ambiguità. Ad esempio, se ci si aspetta che lo stato s sia lo stato fondamentale, misurazioni della massa del nucleo determinano se è uno stato legato o non legato. In particolare, per il ^{10}Li sappiamo che è uno stato non legato.

Se gli esperimenti di trasferimento al continuo potessero misurare con sufficiente accuratezza (risoluzione in energia) le funzioni di distribuzioni energetiche per gli stati s e p del ^{10}Li , tale teoria riuscirebbe a fissare con precisione l'energia dello stato p e la lunghezza di scattering dello stato s .

3.4 ^{10}Li : Frammentazione del proiettile

Adottando le notazioni ed il formalismo introdotti nella sezione 3.2, in tale trattazione del nucleo di ^{10}Li vengono considerati quali possibili stati finali solo quelli forniti dalle funzioni d'onda parziali s , p e d calcolate nel potenziale avente i parametri riportati in Tabella 3.1 e considerando la correzione δV (Eq.(3.4)), per differenti valori di α . Nella parte inferiore della Tabella 3.4 vengono riportate le energie e le larghezze degli stati $1p_{1/2}$ e $1d_{5/2}$ ed i valori corrispondenti di α . Si noti come i valori di α per lo stato s e per lo stato d siano simili: ciò implica che è stato adottato il medesimo potenziale. Inoltre l'ampiezza per l'interazione delta - forme⁶, $v_2 = -8625 \text{ MeV fm}^3$, è stata ottenuta imponendo che questa interazione dia lo stesso integrale di volume di un potenziale di Wood-Saxon per un sistema $n - ^{12}\text{C}$ con $V_0 = -50.5 \text{ MeV}$, $r_0 = 2.9 \text{ fm}$ e il parametro di diffusività $a = 0.75 \text{ fm}$.

Similmente alla trattazione attraverso reazioni di trasferimento al continuo, qui viene studiato lo spettro di energia relativa del sistema $n - ^9\text{Li}$, ma la differenza sta nel processo di formazione di tale sistema che viene adesso trattato quale eccitazione inelastica al continuo. Infatti, in tale tipo di reazioni un neutrone in uno stato legato del ^{11}Li passa ad uno stato non legato del ^{10}Li a seguito di una eccitazione inelastica causata dall'interazione con il bersaglio; inoltre viene assunto che un altro neutrone venga emesso attraverso una reazione di *stripping* del proiettile e quindi trascurato in eventuali rivelazioni di coincidenza con il core:



Nel caso dello stato virtuale del ^{10}Li , il valore della lunghezza di scattering è grande abbastanza da giustificare l'uso della formula per l'approssimazione adiabatica, Eq.(2.33), ovvero lo stato in esame risulta essere abbastanza vicino alla soglia. Inoltre viene verificato che il range effettivo della formula

⁶Sezione 2.4

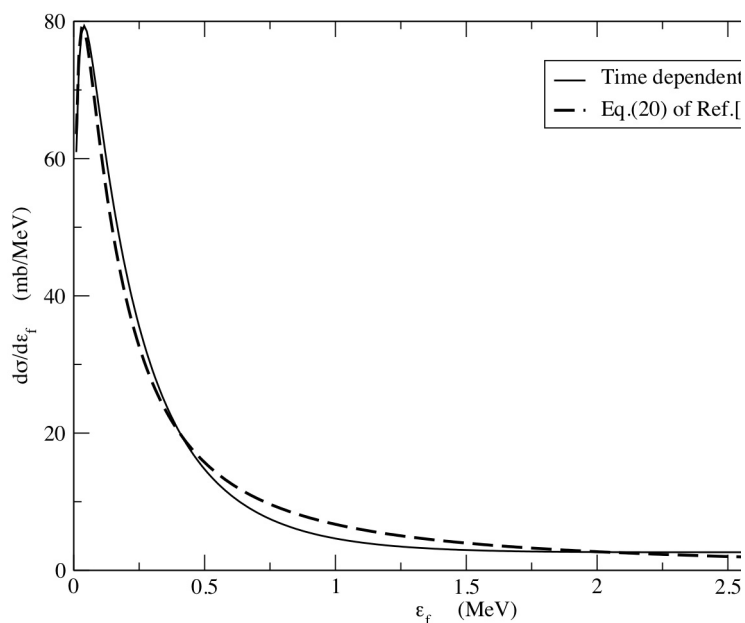


Figura 3.3: Paragone tra la transizione da stato s a s descritta attraverso il formalismo introdotto (curva continua) e attraverso la formula per l'approssimazione adiabatica. Entrambi i calcoli usano lo sfasamento esatto.

(Rif.[13]) da in questo caso un buon fit per lo *sfasamento esatto*⁷: usando l'espressione (2.33) ne risulta dal grafico in Fig.(3.3) un ottimo accordo tra l'approssimazione adiabatica e i calcoli riportati.

I parametri ottenuti dal fit sono: $a_s = -14.8 \text{ fm}$, $r_e = 7.5 \text{ fm}$. Da notare la differenza rispetto al valore di a_s ottenuto da $a_s = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\delta_0}{k}$ fornito in

⁷ottenuto risolvendo numericamente l'equazione di *Schrödinger* con le Eq.(3.2), (3.4)

Tabella 3.4, dove $a_s = -17.2 \text{ fm}$.

Risulta inoltre verificabile la validità del valore di r_e ottenuto al fit, consistente con i parametri del potenziale adottato⁸, il quale infatti risulta trascurabile e tende a zero per $r > r_e = 7.5 \text{ fm}$, come predetto per l'applicabilità della teoria a range effettivo.

Dalla Fig.(3.4) è possibile evincere che la popolazione delle risonanze nel continuo è dominata dai contributi dello stato s iniziale, mentre le transizioni $p \rightarrow p$ o $p \rightarrow d$ non risultano larghe abbastanza da spiegare lo spettro sperimentale. Ciò è particolarmente evidente per uno stato di risonanza d , la cui presenza è necessaria per spiegare la "coda" nello spettro sperimentale ma la cui intensità non può essere giustificata da una transizione $d \rightarrow d$ che avrebbe un'ampiezza molto piccola.

Quindi l'intensità delle risonanze al continuo di un nucleo figlio non riflette direttamente l'occupazione degli stati legati di medesimo momento angolare nel nucleo genitore, differentemente da come comunemente era ritenuto per reazioni di breakup di nuclei con alone di due neutroni.

Nel caso del ^{11}Li i due neutroni sono nello stesso stato per ogni componente della funzione d'onda iniziale. Quindi, visto che le funzioni d'onda p e d hanno code meno pronunciate, la probabilità di stripping di uno dei due neutroni⁹ porterà ad una diminuzione del valore assoluto dei picchi a causa delle transizioni tra questi stati, rispetto ai picchi dovuti alla transizione dalla componente s legata. Tale effetto viene però trascurato. D'altra parte le sezioni d'urto totali dovrebbero essere moltiplicate per un fattore due per tenere conto del fatto che i dati sperimentali non distinguono i due neutroni nel continuo.

⁸Equazioni (3.2),(3.4)

⁹Come discusso nel Rif.[13]

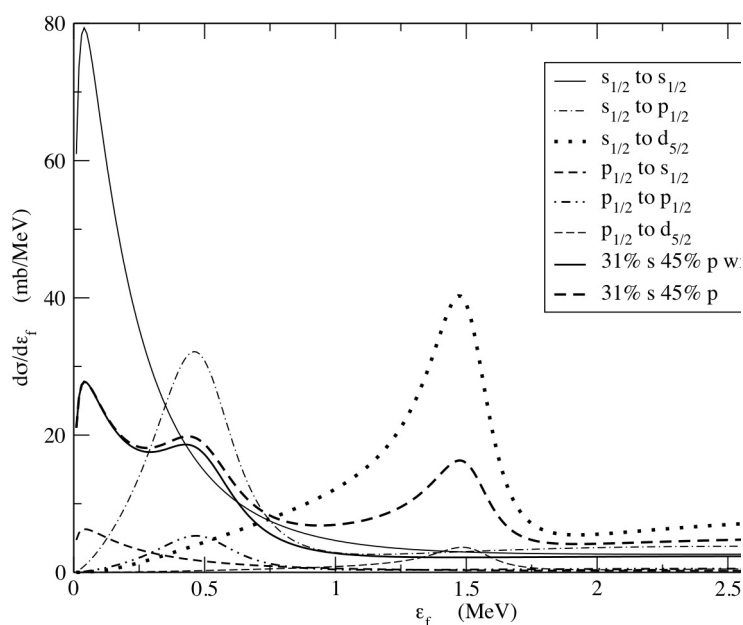


Figura 3.4: Transizioni individuali, dalle componenti degli stati iniziali legati s e p , prese con fattori spettroscopici unitari, agli stati non legati s , p e d come indicato. La linea tratteggiata spessa è la somma di tutte le transizioni, incluso i fattori spettroscopici per le componenti degli stati iniziali, mentre la linea continua spessa non include le transizioni allo stato d di risonanza.

In questa sezione è stato analizzato lo spettro continuo di energia del ^{10}Li ottenuto dalla frammentazione del ^{11}Li applicando il modello descritto nel secondo capitolo, sezione 2.4. I fattori spettroscopici iniziali per il ^{11}Li sono abbastanza noti sperimentalmente, quindi sono stati analizzati i valori as-

soluti delle sezioni d'urto ricavati attraverso il modello introdotto. A causa della vicinanza alla soglia dello stato s virtuale, per il ^{10}Li è giustificato l'utilizzo della formula (2.33) per l'approssimazione adiabatica e l'approssimazione di range effettivo per lo sfasamento. Infine lo stato di risonanza d intorno a 1.5 MeV non gioca un ruolo basilare nella composizione dello stato fondamentale del ^{11}Li ma è un importante costituente dei suoi stati eccitati.

Conclusioni

Nella prima parte di questo lavoro, sono state fornite informazioni sulla natura dei nuclei esotici, la loro collocazione lungo il diagramma di Segrè ed in particolare sono stati trattati tra quelli esotici i nuclei con alone: l'alone nucleare è un fenomeno che si verifica in sistemi per i quali un eccesso di neutroni (nella maggior parte dei casi) porta il sistema stesso alla soglia di instabilità e di conseguenza permette che uno o più neutroni aventi una piccola energia di separazione, possano formare una regione spaziale di bassa densità di materia rispetto a quella popolata dai nucleoni più fortemente legati.

Inoltre i nuclei instabili (all'incirca 6000) risultano essere numericamente superiori rispetto ai nuclei stabili (circa 300), conseguentemente la "fisica" che si può trarre dal loro studio può essere ricca di informazioni e quindi fonte di nuove scoperte ed applicazioni.

Dal punto di vista sperimentale, è stato evidenziato l'utilizzo di fasci di ioni radioattivi per investigare la "terra incognita" (Fig.(1.1)) attraverso le due diverse tecniche ISOL e In - Flight.

Tra i nuclei con alone, ci si è soffermati con più attenzione sui cosiddetti sistemi borromeiani, sistemi di tre corpi in interazione i cui sotto - sistemi di due corpi risultano non legati. Un esempio tra i più trattati e studiati è il ^{11}Li del quale viene fornita una descrizione più particolareggiata nel terzo capitolo attraverso i metodi del trasferimento al continuo e della frammentazione del proiettile.

Nel secondo capitolo è stato messo in evidenza che, in generale, sia nella trattazione attraverso la frammentazione del proiettile che in quella attraverso il trasferimento al continuo, l'interazione neutrone - core che si cerca di determinare, appare nella reazione quale interazione dello "stato finale" e quindi informazioni affidabili su questo tipo di interazione e sui valori dei suoi parametri possono essere estratti solo se la reazione principale viene tenuta perfettamente sotto controllo da un punto di vista della teoria della reazione.

Entrambi i modelli si basano su un'ampiezza di transizione calcolata attraverso una teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo e lo stato finale viene descritto attraverso una matrice S derivante da un modello ottico. E ciò può essere considerata un'evoluzione rispetto ai modelli teorici della matrice R o dell'approssimazione adiabatica. Uno dei vantaggi consiste nel fatto che risulta possibile descrivere gli effetti di eccitazione del core attraverso la parte immaginaria del potenziale ottico neutrone - core.

Un paragone tra il formalismo del modello della frammentazione e quello del trasferimento al continuo mostra che in principio la frammentazione del proiettile non riflette direttamente le proprietà di risonanza del sistema neutrone - core perché il meccanismo della reazione induce una fase extra rispetto allo sfasamento che si otterrebbe con la cosiddetta approssimazione energetica "on - shell", che descriverebbe uno scattering di particella libera. Pur tuttavia, tali effetti di distorsione risultano essere trascurabili almeno in casi come il ^{10}Li ed altri che non sono stati discussi in questo lavoro (cfr. Rif.[13, 14]).

E così risulta possibile studiare reazioni di breakup di un neutrone ma anche la prima fase del breakup di due neutroni per un nucleo borromeo.

L'esempio applicativo del ^{10}Li mostra la sostanziale somiglianza delle trattazioni attraverso il trasferimento al continuo ed attraverso la frammentazione del proiettile: in reazioni di quest'ultimo tipo, si può riscontrare una

conferma del fatto che, a parte la transizione da stato s a stato s , l'eccitazione di risonanze con $l > 0$ nel continuo di nuclei non legati, è un effetto dello stato finale dovuto all'interazione core - neutrone, piuttosto che ad un processo nel quale una componente legata della funzione d'onda nello stato iniziale diventi improvvisamente non legata, cioè le transizioni più favorite sono quelle a partire da uno stato s , piuttosto che quelle con $l_i = l_f$.

Quello a cui si mira, in futuro, è il costruire una teoria completamente dipendente dal tempo di un breakup di due neutroni, incorporando appropriatamente l'ordinamento temporale nell'emissione dei neutroni stessi (il cosiddetto *time - ordering*). In questo modo si spera di chiarire la questione del meccanismo di emissione sequenziale rispetto a quello di emissione simultanea impliciti nella formazione di stati di risonanza core - neutrone in reazioni come $^{11}\text{Li} + X \rightarrow ^{10}\text{Li} \rightarrow ^9\text{Li} + 2n$ oppure $^{14}\text{Be} + X \rightarrow ^{13}\text{Be}^* + n + X \rightarrow ^{12}\text{Be} + 2n + X$ od ancora $^{14}\text{B} + X \rightarrow ^{13}\text{Be}^* + p + X \rightarrow ^{12}\text{Be} + n + p + X$.

Appendice A

Richiami di Meccanica Quantistica

A.1 Autofunzioni in un potenziale centrale

Se ci troviamo in un caso in cui il potenziale dipende solo dalla coordinata radiale, l'equazione di *Schrödinger* indipendente dal tempo

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (\text{A.1})$$

può essere risolta ponendo

$$\psi(\vec{r}) = R(r)\Phi(\theta, \phi). \quad (\text{A.2})$$

La soluzione della parte angolare dell'equazione la si può esprimere in termini di funzioni armoniche sferiche

$$\Phi(\theta, \phi) = Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (\text{A.3})$$

mentre l'equazione radiale è data da

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Consideriamo il caso di una particella libera ($V = 0$). Qui, l'Eq.(A.1) ha come soluzione onde piane nella base in cui l'impulso è diagonale; tuttavia nella base in cui il momento angolare risulta ben definito, le soluzioni della (A.1) sono fondamentali nello studio di processi di diffusione e forniscono il punto di partenza per analizzare i problemi di stati legati in potenziali a simmetria centrale. Ponendo $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$ e $l = 0$, l'equazione avrà in $r = 0$ una soluzione regolare, $R = A \frac{\sin kr}{r}$, ed una singolare, $R = A' \frac{\cos kr}{r}$. La costante di normalizzazione A viene calcolata senza difficoltà e risulta $A = 2$.

Come soluzione nel caso in cui $l \neq 0$ si ottiene la seguente relazione ricorsiva:

$$\eta'_l = r\eta_{l+1}, \quad (\text{A.5})$$

dove $R_l = r^l \eta_l$. Le soluzioni regolari, corrispondenti a onde sferiche libere, delle funzioni radiali sono

$$R_l = N_l r^l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \frac{\sin kr}{r}. \quad (\text{A.6})$$

Analogamente per le soluzioni singolari,

$$Q_l = N_l r^l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \frac{\cos kr}{r}. \quad (\text{A.7})$$

La costante di normalizzazione può essere fissata considerando il loro andamento asintotico, con il risultato, $N_l = (-)^l 2/k^l$.

Per studiare il comportamento vicino a $r = 0$ di R_l , conviene introdurre la variabile $\xi \equiv r^2$: infatti,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \frac{\sin kr}{r} &= \left(2 \frac{d}{d\xi} \right)^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} k^{2n+1} \xi^n \\ &= \frac{k^{2l+1} (-)^l}{(2l+1)!!} + O(r^2), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

per cui

$$R_l \cong \frac{2k^{2l+1}r^l}{(2l+1)!!} 1 + O(r^2). \quad (\text{A.9})$$

Le onde sferiche libere si possono esprimere in termini di *funzioni di Bessel sferiche* j_l , n_l , che a loro volta sono *funzioni di Bessel* di ordine semi-intero:

$$R_{k,l} = \sqrt{\frac{2\pi k}{r}} J_{l+1/2}(kr) = 2kj_l(kr), \quad (\text{A.10})$$

$$Q_{k,l} = \sqrt{\frac{2\pi k}{r}} N_{l+1/2}(kr) = 2kn_l(kr). \quad (\text{A.11})$$

$J_\nu(z)$ e $N_\nu(z)$ sono le due soluzioni indipendenti dell'equazione di Bessel, dove $J_\nu(z)$ è quella regolare a $z = 0$ (vedi Rif.[19], pag. 256).

Le funzioni sferiche di Bessel sono funzioni elementari e possono trovarsi tabulate in un qualunque testo di meccanica quantistica, [19, 20]:

$$j_l(x) = (-)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}; \quad n_l = -(-)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x}. \quad (\text{A.12})$$

L'andamento vicino a $x = 0$ di queste funzioni è

$$j_l(x) \sim \frac{x^l}{(2l+1)!!}; \quad n_l \sim \frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}, \quad (\text{A.13})$$

mentre il comportamento asintotico ($x \rightarrow \infty$) è

$$j_l(x) \sim \frac{1}{x} \cos \left(x - \frac{(l+1)\pi}{2} \right); \quad n_l \sim \frac{1}{x} \sin \left(x - \frac{(l+1)\pi}{2} \right). \quad (\text{A.14})$$

In determinati casi risulta conveniente utilizzare le funzioni sferiche di *Hankel*, definite come ¹

$$h_l^{(1)}(x) \equiv j_l(x) + in_l(x); \quad h_l^{(2)}(x) \equiv j_l(x) - in_l(x) \quad (\text{A.15})$$

è il loro comportamento asintotico è

$$h_l^{(1)}(x) \sim \frac{1}{x} e^{i(x - \frac{(l+1)\pi}{2})}; \quad h_l^{(2)}(x) \sim \frac{1}{x} e^{-i(x - \frac{(l+1)\pi}{2})}. \quad (\text{A.16})$$

Le funzioni radiali corrispondenti sono

$$R_{k,l}^{(1)} = 2kh_l^{(1)}(kr); \quad R_{k,l}^{(2)} = 2kh_l^{(-)}(kr) \quad (\text{A.17})$$

e hanno il seguente andamento asintotico

$$R_{k,l}^{(1)} \sim \frac{1}{kr} e^{i(kr - \frac{(l+1)\pi}{2})}; \quad R_{k,l}^{(2)} \sim \frac{1}{kr} e^{-i(kr - \frac{(l+1)\pi}{2})} : \quad (\text{A.18})$$

e sono onde sferiche che si espandono ($R^{(1)}$) o si contraggono col tempo ($R^{(2)}$), infatti per verificarlo basta introdurre il fattore $e^{-iEt/\hbar}$.

Sia le onde piane, sia quelle sferiche costituiscono un set completo di funzioni: naturalmente le une possono essere sviluppate in termini delle altre.

Utilizzando i risultati precedenti e ritornando alla forma della funzione d'onda (A.2), vogliamo ora esprimerla in termini di onde sferiche libere corrispondenti infatti a stati stazionari $|\psi_{k,l,m}^{(0)}\rangle$ di particella libera di ben definito momento angolare. Queste saranno autofunzioni di H_0 , L^2 e L_z , e saranno espresse come

$$\psi_{k,l,m}^{(0)} = \sqrt{\frac{2k^2}{\pi}} j_l(kr) Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (\text{A.19})$$

¹Per descrivere gli stati legati di un sistema ($\epsilon < 0$), tali funzioni si presenteranno ad argomento complesso.

e il loro comportamento asintotico

$$\psi_{k,l,m}^{(0)} \sim_{r \rightarrow \infty} -\sqrt{\frac{2k^2}{\pi}} Y_{l,m}(\theta, \phi) \frac{e^{-ikr} e^{il\frac{\pi}{2}} - e^{ikr} e^{-il\frac{\pi}{2}}}{2ikr}. \quad (\text{A.20})$$

quindi all'infinito, $\psi_{k,l,m}^{(0)}$ è il risultato di una *sovrapposizione* di un'onda in entrata e^{-ikr}/r e di una in uscita e^{ikr}/r le cui ampiezza differiscono per uno sfasamento pari a $l\pi$.

A.2 Funzioni d'onda per l generici

Se ci troviamo in presenza di una transizione quantistica (fenomeni di trasferimento o frammentazione), in accordo con il Rif.[9], la funzione d'onda dello stato iniziale legato può esprimersi tramite la seguente approssimazione asintotica

$$\psi_i(\vec{r}) \approx -C_i i^{l_i} \gamma h_{l_i}^{(1)}(i\gamma r) Y_{l_i, m_i}(\theta, \phi). \quad (\text{A.21})$$

dove $h_l^{(1)}$ sono le funzioni di Hankel di argomento complesso definite in via generale precedentemente (e più dettagliatamente pag. 498, Rif.[17]); mentre $\gamma^2 = -\frac{2m\epsilon_i}{\hbar^2}$. Se lo stato finale risulta anch'esso uno stato legato, l'Eq.(A.21) risulta adatta a descriverlo; mentre per uno stato finale non legato, quindi nel continuo, dove $\epsilon_f > 0$, è necessario sostituire l'espressione (A.21) con una funzione d'onda di scattering con appropriate condizioni al contorno:

$$\psi_f(\vec{r}) \approx C_f k \frac{i}{2} (h_{l_f}^{(-)}(kr) - S_{l_f} h_{l_f}^{(+)}(kr)) Y_{l_f, m_f}(\theta, \phi). \quad (\text{A.22})$$

dove $h_l^{(\pm)}$ sono le funzioni di Hankel ad argomento reale che, in accordo con Rif.[17], possono anche essere scritte come $h_l^{(1)} \equiv -ih_l^{(+)}$ e $h_l^{(2)} \equiv -ih_l^{(-)}$; infine $k^2 = \frac{2m\epsilon_f}{\hbar^2}$. All'interno di S_{l_f} (matrice di scattering) sono contenute

tutte le informazioni sullo sfasamento tra lo stato iniziale legato e quello finale diffuso ($S_l = e^{2i\delta_l}$).

Infine, come mostrato nel Rif.[9], nel caso di strette risonanze isolate il trattamento attraverso la matrice - S è equivalente al formalismo della matrice - R (matrice di risonanza).

A.2.1 Costante di normalizzazione asintotica

Si vuole qui dare un'espressione per la costante di normalizzazione asintotica per uno stato legato (Appendice A, Rif.[9]).

Nel caso di uno stato legato la funzione d'onda è

$$\psi_l(\vec{r}) = C \frac{\chi(r)}{r} Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (\text{A.23})$$

dove $\chi(r)$ è una soluzione dell'equazione di *Schrödinger*

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} - \gamma^2\chi = \frac{2m}{\hbar} V(r)\chi \quad (\text{A.24})$$

con condizione al contorno $\chi(0) = 0$. Fuori dal range del potenziale nucleare

$$\frac{\chi(r)}{r} = \frac{\chi_{ext}(r)}{r} = -i^l \gamma r h_l^{(1)}(i\gamma r), \quad r > R \quad (\text{A.25})$$

per una energia dello stato legato pari a $\epsilon = -\gamma^2$. La costante di normalizzazione C nell'Eq.(A.23) è ottenuta da

$$C^2 \int_0^\infty \chi^2(r) dr = 1 \quad (\text{A.26})$$

cosicché

$$C^2 = \left[\int_0^\infty \chi^2(r) dr \right]^{-1}. \quad (\text{A.27})$$

Infine la C_i usata nell'equazione (A.21) sarà data da:

$$C_i = \frac{[C\chi(r)/r]_{numerica}}{\chi_{ext}(r)/r}. \quad (\text{A.28})$$

A.2.2 Fattori Spettroscopici

I fattori spettroscopici vengono spesso definiti in relazione a reazioni di trasferimento e sono legati all'espansione della funzione d'onda per uno specifico stato $\Psi_i(A)$ nel nucleo iniziale con A nucleoni in termini di una somma su un set completo di stati $\Psi_f(A-1)$ nel nucleo finale con $A-1$ nucleoni:

$$\Psi_i(A) = \sum_{f,j} C_{f,j}^i \Psi_f(A-1) \phi_j, \quad (\text{A.29})$$

dove ϕ_j è il set completo di funzioni d'onda di singola particella nel nucleo iniziale. In questa notazione, C è l'ampiezza spettroscopica ed è legata al fattore spettroscopico attraverso la seguente relazione:

$$S_{f,j}^i = (C_{f,j}^i)^2. \quad (\text{A.30})$$

Gli stati di singola particella ϕ_j sono normalizzati a uno. In termini di specifici stati M , il coefficiente C e così il fattore spettroscopico può assumere al massimo il valore dell'unità; può essere zero se gli stati iniziale e finale differiscono nella struttura per più del cambiamento di un nucleone da uno stato di singola particella ad un altro. In generale, i fattori spettroscopici quali usualmente definiti in fisica nucleare, includono la somma sui valori m di singola particella e il massimo valore raggiungibile corrisponde a quello massimo di degenerazione per m , $(2j+1)$, ovvero il numero massimo di protoni o neutroni che può essere contenuto in uno stato di singola particella j . Quindi, in un certo senso, i fattori spettroscopici sono legati al numero di occupazione di uno stato, dipendente dalla degenerazione in spin, e alla probabilità stessa di occupazione.

Appendice B

Teoria perturbativa dipendente dal tempo

Uno dei metodi di approssimazione di particolare importanza è la *teoria delle perturbazioni*: se nella formulazione del problema è possibile individuare un parametro adimensionale reale $\lambda < 1$ e se si conosce la soluzione per $\lambda = 0$, allora la soluzione del problema si presenta quale soluzione approssimata in serie di potenze di λ .

Il problema per interazioni con campi esterni che dipendono esplicitamente dal tempo,

$$H(t) = H_0 + W(t) \tag{B.1}$$

dove

$$W(t) = \lambda \widehat{W}(t) \tag{B.2}$$

prevede che l'energia del sistema sottoposto a tali potenziali esterni non si conservi, e ciò fa sì che *transizioni quantistiche tra i diversi livelli* siano possibili.

Il sistema in questione si evolve secondo l'equazione di *Schrödinger* dipendente dal tempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = [H_0 + \lambda \widehat{W}(t)] |\Psi(t)\rangle \quad (\text{B.3})$$

$|\Psi(t)\rangle$ è la soluzione di un'equazione differenziale al prim'ordine che corrisponde alla condizione iniziale $|\Psi(t=0)\rangle = |\varphi_i\rangle$ dove $|\varphi_i\rangle$ è l'autostato di H_0 iniziale con autovalore ϵ_i .

Indicando con $c_n(t)$ le componenti del ket $|\Psi(t)\rangle$ nella base $\{|\varphi_n\rangle\}$:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\varphi_n\rangle, \quad (\text{B.4})$$

dove

$$c_n(t) = \langle \varphi_n | \Psi(t) \rangle. \quad (\text{B.5})$$

$\widehat{W}_{nk}(t)$ è l'elemento di matrice dell'osservabile $\widehat{W}(t)$ nella stessa base:

$$\langle \varphi_n | \widehat{W}(t) | \varphi_k \rangle = \widehat{W}_{nk}(t), \quad (\text{B.6})$$

H_0 è rappresentata nella base $\{|\varphi_i\rangle\}$ da una matrice diagonale:

$$\langle \varphi_n | H_0 | \varphi_k \rangle = \epsilon_n \delta_{nk}. \quad (\text{B.7})$$

Adesso, proiettando tutti e due i membri dell'Eq.(B.3) su $|\varphi_n\rangle$ e utilizzando $\sum_k |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k| = 1$, otteniamo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_n(t) = \epsilon_n c_n(t) + \sum_k \lambda \widehat{W}_{nk}(t) c_k(t) \quad (\text{B.8})$$

Quando la perturbazione è nulla, le equazioni differenziali (B.8) non risultano più accoppiate e la loro soluzione risulta molto semplice:

$$c_n(t) = b_n e^{-i\epsilon_n t/\hbar} \quad (\text{B.9})$$

dove b_n è una costante che dipende dalle condizioni iniziali.

Se ora $\lambda \widehat{W}(t)$ non è zero ma rimane comunque più piccolo di H_0 perché $\lambda < 1$,

ci si può aspettare che le soluzioni (B.9) siano molto simili a quelle cercate dell'Eq.(B.8). Effettuando la sostituzione $c_n(t) = b_n(t)e^{-i\epsilon_n t/\hbar}$ e moltiplicando poi ambo i membri dell'equazione ottenuta per $e^{i\epsilon_n t/\hbar}$ ed infine introducendo la frequenza angolare di Bohr $\omega_{nk} = (\epsilon_n - \epsilon_k)/\hbar$, otteniamo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} b_n(t) = \lambda \sum_k e^{-i\omega_{nk}t} \widehat{W}_{nk}(t) b_k(t). \quad (\text{B.10})$$

Questo sistema di equazioni è rigorosamente equivalente all'Eq.(B.3) e in generale non possiamo trovarne una soluzione esatta. Dato che il parametro λ risulta minore di 1 è possibile espandere in serie di potenze di λ sperando che tale serie sia rapidamente convergente se λ è sufficientemente piccolo. Quindi:

$$b_n(t) = b_n^{(0)}(t) + \lambda b_n^{(1)}(t) + \lambda^2 b_n^{(2)}(t) + \dots \quad (\text{B.11})$$

e inserendo lo sviluppo nella (B.10) e ponendo uguali i coefficienti di λ^r :

(i) $r = 0$: $i\hbar \frac{d}{dt} b_n^{(0)}(t) = 0$ visto che il termine destro della (2.47) ha a fattor comune λ . Questa relazione esprime il fatto che $b_n^{(0)}$ non dipende da t , così se $\lambda = 0$ $b_n(t)$ si riduce ad una costante.

$$\text{(ii) } r \neq 0 : i\hbar \frac{d}{dt} b_n^{(r)}(t) = \sum_k e^{-i\omega_{nk}t} \widehat{W}_{nk}(t) b_k^{(r-1)}(t).$$

Così attraverso la soluzione di ordine zero determinata attraverso la (i) e le condizioni iniziali, la soluzione ricorsiva (ii) ci fornisce una soluzione al prim'ordine e se

$$b_n^{(0)} = 1, \quad b_k^{(0)} = 0, \quad k \neq n, \quad (\text{B.12})$$

allora:

$$b_{nk}^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int^t dt' e^{-i\omega_{nk}t'} \widehat{W}_{nk}(t'). \quad (\text{B.13})$$

Se la perturbazione è assente sia per $t \rightarrow -\infty$ sia per $t \rightarrow \infty$, assunzione verificata per interazioni a corto raggio come quella nucleare, ha senso parlare di probabilità totale per la transizione $i \rightarrow f$, dove i è lo stato iniziale (a $t = -\infty$), f quello finale. L'*ampiezza di transizione*, al prim'ordine del termine perturbativo è data dalla formula (B.13),

$$A_{fi}^{(1)}(\infty) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega_{fi}t} \widehat{W}_{fi}, \quad (\text{B.14})$$

e la probabilità di trovare il sistema nello stato f è

$$P_{i \rightarrow f} = \left| A_{fi}^{(1)}(\infty) \right|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega_{fi}t} \widehat{W}_{fi} \right|^2. \quad (\text{B.15})$$

Appendice C

Lunghezza di scattering

L'originaria formula di Fermi per la lunghezza di scattering prevedeva che questa fosse definita come

$$a_s = \pm \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \delta_0}{k}, \quad (\text{C.1})$$

la scelta del segno è arbitraria, ma convenzionalmente si è adottato il segno meno. Andando ad analizzare la sezione d'urto di diffusione per basse energie, definita quindi nel caso speciale di $l = 0$ nel quale la sezione d'urto differenziale $d\sigma/d\Omega$ risulta essere costante, si ha che:

$$\begin{aligned} \sigma &= 4\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \\ &= \frac{4\pi \sin^2 \delta_0}{k^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

ed è così possibile ottenere un'espressione per la sezione d'urto di diffusione per basse energie definita in funzione della lunghezza di scattering introdotta:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma = 4\pi a_s^2. \quad (\text{C.3})$$

Sebbene la lunghezza di scattering abbia le dimensioni di una lunghezza, si rivela essere un parametro che rappresenta l'intensità dello scattering, non il

suo *range*.

Le equazioni fornite finora, risultano valide solo per lo scattering di particelle incidenti a bassa energia e per $l = 0$. La restrizione $l = 0$ richiede energie inferiori ai 20 MeV, mentre le altre approssimazioni di bassa energia richiedono valori massimi dell'ordine del keV. Quindi aumentando l'energia della particella incidente, l'Eq.(C.3) verrebbe violata molto prima di raggiungere energie paragonabili ai 20 MeV. Si avrebbe perciò sempre uno scattering per $l = 0$, ma per tali valori energetici ($\sim 1 \text{ MeV}$) equazioni come la (C.1) non sarebbero più valide.

Questo caso viene tipicamente trattato nell'*approssimazione di range effettivo*, nella quale si prende

$$k \cot \delta_0 = \frac{1}{a_s} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \dots \quad (\text{C.4})$$

e dove i termini contenenti potenze più grandi in k sono trascurati. La quantità a_s è la lunghezza di scattering precedentemente definita (ed infatti tale equazione nel limite per $k \rightarrow 0$ si riduce alla (C.1)), mentre la quantità r_e è il parametro che fornisce il *range effettivo*. Uno dei vantaggi di tale rappresentazione è che a_s e r_e caratterizzano il potenziale nucleare indipendentemente dalla sua forma; sarebbe quindi possibile prendere anche un potenziale a buca quadra e dedurre valori identici per a_s e r_e dalle analisi delle sezioni d'urto sperimentali, rispetto ad un calcolo effettuato in un potenziale tipo Wood - Saxon.

Bibliografia

- [1] **The EURISOL Report**. A feasibility study for a European Isotope-Separation-On-Line radioactive ion beam facility, Co-ordinated by Prof. Jean Vervier. Report to the European Commission. EUROPEAN COMMISSION CONTRACT No. HPRI-CT-1999-500001. Edited by John Cornell. Published by GANIL B.P. 55027, 14076 Caen cedex 5, France. December 2003.
- [2] I. Tanihata et al. Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 2676.
- [3] I. Tanihata et al. Phys. Lett. 206 (1988) 592.
- [4] P.G. Hansen and B. Jonson Europhys. Lett. 4 (1987) 409.
- [5] T. Kobayashi et al. Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 2599.
- [6] T. Kobayashi et al. Phys. Lett. B 232 (1989) 1.
- [7] M.V. Zhukov et al. Phys. Rep. 231 (1993) 151.
- [8] P.G. Hansen et al. Annu. Rev. Part. Sci. (1995) 591.
- [9] A. Bonaccorso and D.M. Brink, Phys. Rev. **C38** (1988) 1776.
- [10] A. Bonaccorso and D.M. Brink, Phys. Rev. **C43** (1991) 299.
- [11] A. Bonaccorso, Phys. Rev. **C60** (1999) 054604.
- [12] A. Bonaccorso and D.M. Brink, Phys. Rev. **C44** (1991) 1559.

-
- [13] G. Blanchon, A. Bonaccorso, D.M. Brink, A. García-Camacho, N. Vinh Mau. Nucl. Phys. **A784** (2007) 49-78.
- [14] G. Blanchon, Ph.D. Thesis, "Reaction and Structure Models for Nuclei Far from Stability", University of Pisa (2008).
- [15] G. Blanchon, A. Bonaccorso, N. Vinh Mau, Nucl. Phys. **A739** (2004) 259.
- [16] G. Blanchon, A. Bonaccorso, D.M. Brink, N. Vinh Mau, Nucl. Phys. **A791** (2007) 303.
- [17] A. Messiah, "Quantum Mechanics", Dover Publications (1999).
- [18] B.M. Young et al., Phys. Rev. **C49** (1994) 279.
- [19] K. Konishi e G.Paffuti, "Meccanica Quantistica: nuova introduzione", Edizioni PLUS, Univ. di Pisa (2005).
- [20] C. Cohen-Tannoudji, "Quantum Mechanics", Vol.2, WILEY-VHC (2006).
- [21] C.J. Joachain, "Quantum Collision Theory", North-Holland, Amsterdam-Oxford, 1975.
- [22] S.N. Ershov, et al., Phys. Rev. **C70** (2004) 054608.
- [23] <http://nucldata.nuclear.lu.se/database/masses/>.
- [24] S. Pita, Thesis University Paris 6, 2000, IPN Orsay IPNO-T-00-11.
- [25] K. Krane, "Introductory Nuclear Physics", Wiley Ed. (1988).
- [26] J. Margueron, A. Bonaccorso and D. M. Brink, Nucl. Phys. **A703** (2002) 105.
- [27] J. Margueron, A. Bonaccorso and D. M. Brink, Nucl. Phys. **A 720** (2003) 337.

Ringraziamenti

Siamo così giunti alla parte dei ringraziamenti...

Ciò che è d'obbligo è ringraziare le persone che mi hanno permesso di arrivare fino a questo traguardo, le persone che mi hanno cresciuto, fatto crescere, amato e protetto.

I primi ai quali si pensa sono i genitori, anche solo per il ruolo che hanno avuto nel generare la sottoscritta ma poi la mente si sofferma sulle singole responsabilità, sui singoli meriti e sui ricordi, e ci vorrebbe una tesi a sé stante per questo... Voglio però ringraziarli, in maniera diversa perché diversi sono loro stessi ed il mio rapporto con loro.

Grazie papà. Grazie mamma.

Un grazie a mia sorella Roberta (Sbob!), per tutte le volte in cui tornando da Bologna trovavo il frigo vuoto ma sopperiva l'affetto sincero espresso senza parole e i panni stirati sul letto. A Isa, perché fortunatamente non c'è bisogno di perdersi in tortuosi discorsi e perché nonostante i momenti difficili è comunque riuscita a starci accanto, facendosi aiutare "ultimamente" da quello scricciolo di mio fratello Lorenzo.

E poi ci sono gli amici: alla mia coinquilina, alla mia compagna di avventure filosofiche, alla mia amica Stefania un grazie particolare riconducibile a tutte le sere silenziose passate sui libri di questi tre anni, al burrascoso primo anno privo di privacy, alla casetta Galli - Rea, all'angolo zen, a tutti gli insetti sterminati con l'aspirapolvere/reliquiario, ai libri di Cunningham, alle serate in compagnia di qualcuno che ci chiedeva chi fosse Dio, alle cene a

base di minestra, a Keith Jarret, a Love FM e ai discorsi esistenziali. Grazie per tutto quel che abbiamo vissuto insieme in questi anni, dalla maturità alla laurea...

A Laura, che sul mio cellulare resterà per sempre Ghiottolino, perché ti ho visto crescere e perché so che ci sei sempre stata e sempre ci sarai. A Chiara, alle nostre serate da sballo in giro per locali, ai mojito party, alla tua contagiosa voglia di divertirti, alle chiacchierate alla darsena, al Gasoline!! Sebbene qui sarebbero da citare anche Michela e Laura... Karaoke forever!!

Ad Alice, per esserci stata in questa fase di transizione, per essere sempre disponibile. A Michela e ai suoi platelminti, perché vorrei proprio esserci quando vai da Foglietta! Miki, la Torre non l'hanno fatta storta appositamente!! A Valentina, e alla sua smartina nella quale entrano ben quattro persone, vedere per credere!

Alle sere a chiacchierare al Souvenir, alle cene multietniche, alle cene a casa Rea, a tutte le serate insieme, ragazze siete uniche!!

Vi voglio un bene dell'anima!

Un grazie a Lucia, a Davide, a Ester (Sgabaralla!!!) e a Flavio, mitico gruppo studio bolognese. Grazie per avermi fatto fotocopiare i vostri appunti e per il supporto che mi avete fornito in tutto questo tempo. Chi si scorda più Risiko, le ossessioni odontoiatriche di Flavio, gli esperimenti di ottica con Esterina!! In particolare, Lu grazie!! Ce l'abbiamo fatta, siamo grandi!!

Grazie a Daniele, alle sere passate a discutere di Fisica, di politica (?), di decisioni presenti e future, di individualismo, del principio cosmologico, grazie per essermi stato accanto e per essere un amico sul quale potrò sempre contare, anche se distante.

Grazie alla Prof.ssa Bonaccorso, per la pronta e valida assistenza durante l'elaborazione di questa tesi, per la Sua disponibilità e per la possibilità offertami di approfondire tali argomenti.

Grazie al Prof. Bonsignori, il cui corso per me è stato illuminante, e che ci

ha ricordato citando Galileo che "ciò che l'esperienza e il senso ci dimostra, si deve anteporre ad ogni discorso, ancorché esso appaia assai ben fondato". Fortunato Galileo che non era a conoscenza delle magie della Meccanica Quantistica.

Grazie a tutti coloro, indimenticabili ed inconsapevolmente dimenticati, che ho incontrato lungo il mio percorso fin qui, che metaforicamente qui si interrompe e mi porta più lontano, verso nuovi scenari, nuove esperienze che tuttavia spero di condividere con chi mi ha voluto e mi vuole bene.

Infine, grazie Piergiorgio. Grazie perché attraverso te ogni giorno conosco meglio me stessa, perché mi permetti di essere una persona migliore, perché mi hai fatto crescere, perché mi stupisco ogni volta che ti ritrovo al mio fianco, per tutto l'amore che mi doni, per esserci sempre stato, per avermi aspettato, per le prove che abbiamo sostenuto, per tutto il cammino fatto fin qui e per la strada che spero ci aspetti da percorrere insieme, l'uno al fianco dell'altro, sempre pronti a spronarci oltre i nostri limiti, pronti ad imparare, pronti a volare.

E se Prospero, e con egli Shakespeare, avesse avuto ragione? Non saremmo noi "[...] fatti della stessa sostanza di cui sono fatti i sogni, e circondata dal sonno è la nostra breve vita"?