

Università degli Studi di Firenze



Scuola di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Fisica e Astrofisica

**Studio e caratterizzazione di un filtro
trapezoidale per segnali digitalizzati
di rivelatori per fisica nucleare**

**Study and characterization of a
trapezoidal filter for digitized signals
of nuclear physics detectors**

RELATORE

Dott. Gabriele Pasquali

CANDIDATO

Pietro Ottanelli

Anno Accademico 2012/2013

Indice

1	Introduzione e premesse teoriche	1
1.1	Alcune proprietà dei sistemi LTI	1
1.2	Rapporto segnale/rumore nelle misure di energia	2
2	Filtro trapezoidale, rumore e deficit balistico	4
2.1	Il filtro trapezoidale	4
2.2	La <i>trasformata z</i> e le <i>equazioni alle differenze</i>	6
2.3	Algoritmo del formatore e correzione di polo-zero	7
2.4	Il segnale digitalizzato e il rumore di campionamento	8
2.5	Ottimizzazione del rapporto segnale-rumore	9
2.6	Il problema del deficit balistico	10
3	Realizzazione del filtro su ADSP-2189N	12
3.1	Il DSP ADSP-2189N	12
3.1.1	Program e Data Memory	13
3.1.2	Unità di calcolo	13
3.1.3	Data Address Generator	14
3.1.4	Program Sequencer	14
3.2	Descrizione dell'algoritmo	14
3.2.1	Calcolo del fattore di scala	14
3.2.2	Inizializzazione vettori e puntatori	16
3.2.3	Loop principale	17
3.2.4	Generazione dell'output	18
3.3	Ampiezza massima del segnale formato	19
4	Verifica del funzionamento del filtro e determinazione delle condizioni ottimali	20
4.1	Configurazione per le misure di test	20
4.2	Controllo del funzionamento della correzione di polo-zero	21
4.3	Analisi dei dati	22
4.4	Misure del rapporto segnale rumore	23
4.4.1	Considerazioni sugli effetti di bordo	23
4.4.2	Acquisizione ed elaborazione dei dati	23
4.4.3	Risultati ed osservazioni	24
4.5	Misure del deficit balistico	25
4.6	Tempo di esecuzione dell'algoritmo	27
5	Conclusioni	28

1 Introduzione e premesse teoriche

Questa tesi si inserisce nell'ambito delle attività del gruppo III della sezione di Firenze dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare. Il gruppo si occupa da anni di digitalizzazione e elaborazione dei segnali dei rivelatori di particelle. In particolare ha progettato e realizzato delle schede di digitalizzazione [1] con cui è stato equipaggiato l'apparato GARFIELD installato presso i Laboratori Nazionali di Legnaro [2]. Ciascuno dei circa trecento canali di digitalizzazione di GARFIELD è equipaggiato con un Digital Signal Processor (DSP), un microprocessore ottimizzato per l'elaborazione di segnali digitali. Con questo lavoro si intendeva estendere il numero di algoritmi eseguibili su tale DSP, realizzando un formatore trapezoidale. Questo tipo di algoritmo, infatti, non era ancora presente nel novero delle elaborazioni già realizzate, comprendente, ad esempio, formatori semigaussiani e discriminatori a frazione costante. Nello specifico gli obiettivi della tesi sono:

- la realizzazione in assembler per ADSP21xx [3, 4] dell'algoritmo che esegue la formazione del segnale;
- la previsione delle condizioni ottimali di funzionamento del filtro;
- la verifica sperimentale delle condizioni ottimali di lavoro del filtro per un sistema di uso pratico.

Nelle applicazioni di fisica nucleare, ed in generale in tutti quegli ambiti della fisica in cui è necessario effettuare misure su segnali elettrici, uno dei principali problemi da affrontare è senza dubbio la presenza del rumore elettronico, la sua trasformazione da parte di circuiti elettronici o di algoritmi di elaborazione dei segnali e la sua influenza sulla precisione e sulla affidabilità delle misure che vengono eseguite sui segnali stessi. Questo lavoro di tesi ha riguardato lo sviluppo e la caratterizzazione di un algoritmo numerico per la formazione di segnali digitalizzati di rivelatori. Lo scopo della formazione è ottimizzare il rapporto segnale rumore nella misura dell'ampiezza dei segnali prodotti da preamplificatori di carica, e quindi nella misura dell'energia depositata dalla radiazione ionizzante nel rivelatore.

1.1 Alcune proprietà dei sistemi LTI

Il filtro realizzato per questo lavoro appartiene alla vasta categoria dei sistemi lineari ed invarianti per traslazioni temporali (detti LTI, da Linear Time-Invariant). Un sistema è un dispositivo o un processo che accetta un segnale in ingresso e produce un segnale in uscita elaborando l'ingresso secondo precise regole, che descrivono univocamente il sistema stesso. A sua volta un segnale è costituito dai valori che una variabile dipendente (ad esempio una tensione) assume al variare di una variabile indipendente (ad esempio il tempo)¹. Ambedue le variabili possono essere continue o discrete. In questo lavoro

¹Sono possibili anche segnali funzione di più variabili indipendenti: è il caso, ad esempio, delle immagini, in cui le variabili indipendenti sono le coordinate x e y .

si trattano segnali digitali (ovvero discreti su entrambe le variabili). Si parlerà quindi di segnali e filtri “digitali” per distinguerli da quelli analogici (ovvero continui su entrambe le variabili). Adeguandoci alla notazione più diffusa, si indicherà un segnale digitale con $x[n]$, dove “ x ” è la variabile dipendente ed “ n ” la variabile indipendente. Nel caso il segnale sia ottenuto campionando un segnale analogico $x(t)$ varrà la relazione $x[n] = x(n\tau_{clk})$ dove τ_{clk} è la distanza temporale tra due campioni anche detta periodo di campionamento. I sistemi LTI godono sia della linearità che dell’invarianza per traslazioni temporali. Nello specifico si ha che:

1. se $y_1[n]$ è la risposta del filtro ad $x_1[n]$ e $y_2[n]$ è la risposta ad $x_2[n]$ allora la risposta del filtro ad un segnale del tipo $Ax_1[n] + Bx_2[n]$ (con A e B costanti) risulta essere $Ay_1[n] + By_2[n]$;
2. se $y[n]$ è la risposta ad $x[n]$ allora la risposta ad $x[n - T]$ è $y[n - T]$ (con T intero).

Si può dimostrare che un filtro LTI è completamente caratterizzato dalla sua risposta $h[n]$ ad un segnale a delta di Kronecker definito da

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

Infatti qualunque segnale $x[n]$ può essere scritto nella forma

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n - k] \quad (2)$$

Se il filtro è LTI si può ricavare la risposta al segnale sostituendo la delta di Kronecker con la funzione di risposta del filtro $h[n]$.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n - k] \quad (3)$$

Dunque la risposta ad un segnale $x[n]$ di un filtro LTI altro non è che il prodotto di convoluzione (nel dominio discreto del tempo) del segnale con la funzione di risposta del filtro [5].

Un'altra importante proprietà dei filtri LTI, che verrà utilizzata all'interno di questo lavoro, è legata alla commutatività del prodotto di convoluzione. Se si considera un filtro con funzione di risposta $h[n]$ ed una coppia di segnali $x[n]$ ed $y[n]$, tali che $y[n]$ è la risposta del filtro a $x[n]$, allora preso un qualunque operatore lineare si ottiene il medesimo segnale finale se lo si fa operare su $x[n]$, su $h[n]$ o su $y[n]$.

1.2 Rapporto segnale/rumore nelle misure di energia

Per procedere ad una trattazione di massima dell'effetto del rumore elettronico sulla misura dell'ampiezza dei segnali che ci interessano si può considerare il segnale come composto di due componenti:

$$S[n] = s[n] + r[n] \quad (4)$$

dove con $s[n]$ si indica il segnale puro (senza il rumore) e con $r[n]$ la componente di rumore. Assumendo che il processo che genera il rumore sia stazionario, le medie di insieme possono essere sostituite con le medie sul tempo [6], dunque, in analogia con il caso continuo, si può definire la varianza σ_N^2 della componente di rumore

$$\sigma_N^2 = \lim_{L \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2L} \sum_{k=-L}^L (r[k] - \langle r \rangle)^2 \right) \quad (5)$$

Se si aggiunge l'ipotesi che il rumore sia a media nulla l'equazione (5) diventa

$$\sigma_N^2 = \lim_{L \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2L} \sum_{k=-L}^L (r[k])^2 \right) \quad (6)$$

Per valutare l'effetto del rumore sulla misura si introduce il cosiddetto rapporto segnale rumore o "SNR" (da "Signal-Noise Ratio"). Nelle misure di energia su segnali prodotti da preamplificatori di carica, come per i rivelatori a semiconduttore, la grandezza che si va a misurare è l'ampiezza massima del segnale. Essa è infatti proporzionale all'integrale del segnale di corrente prodotto dal rivelatore. Tale integrale, ovvero la carica prodotta nel rivelatore dal passaggio della particella, è a sua volta proporzionale all'energia depositata nel rivelatore stesso [7]. Definita la varianza del rumore, si può definire il rapporto segnale rumore

$$SNR = \frac{\max\{s[n]\}}{\sigma_N} \quad (7)$$

Nella maggior parte dei casi di interesse pratico non si conosce il segnale $s[n]$ ma solo il segnale $S[n]$ comprensivo del rumore. Spesso però la varianza di rumore si può calcolare in modo teorico, considerando le varie possibili fonti di rumore, e la formula diventa

$$SNR = \frac{\max\{S[n]\}}{\sigma_N} \quad (8)$$

dove si è sostituito il valore incognito $\max\{s[n]\}$ con $\max\{S[n]\}$ che è noto.

Per migliorare la precisione delle misure eseguite sul segnale si cerca di aumentare il più possibile il valore del SNR, in quanto questo valore pone un limite inferiore alla precisione relativa delle misure. Nel caso specifico dell'analisi dei segnali prodotti da rivelatori, l'obiettivo è quello di creare dei filtri digitali che:

- riescano a produrre un segnale di uscita avente un SNR maggiore di quello del segnale in ingresso;
- producano un segnale elaborato affetto il meno possibile da problemi di deficit balistico, un effetto sistematico, dovuto alla durata finita del tempo di raccolta delle cariche nel rivelatore, che verrà discusso in seguito (vedi paragrafo 2.6).

L'effetto di un filtro sul rumore in ingresso può essere trattato in modo approssimativo seguendo un approccio suggerito da Fred Goulding [8]. L'idea è quella di schematizzare le sorgenti di rumore bianco come dei generatori di impulsi a delta con distribuzione random nel tempo² (rumore di tipo DELTA). **Le sorgenti di rumore sono raggruppate in due generatori di rumore bianco nel circuito di ingresso del preamplificatore (un generatore di corrente in parallelo ed uno di tensione in serie).** Il rumore prodotto dal generatore di corrente viene integrato sulla capacità di ingresso (o sulla capacità di reazione nel caso di un preamplificatore di carica) dando in uscita una serie di impulsi a gradino con distribuzione casuale nel tempo (rumore di tipo STEP); il rumore in serie viene semplicemente amplificato producendo un rumore di tipo DELTA. Per esprimere l'effetto di un filtro sul rumore in ingresso si calcola la varianza di ciascuna componente di rumore all'uscita del filtro, trattando le due componenti come indipendenti tra loro. Se indichiamo con $R[n]$ la risposta del filtro ad un gradino unitario è possibile calcolare la varianza della componente di rumore STEP del segnale elaborato

$$\langle STEP^2 \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (STEP[k]R[n-k])^2 = \sigma_{STEP}^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R^2[k] \quad (9)$$

Per il rumore DELTA si ragiona in modo analogo, semplicemente considerando che se $R[n]$ è la risposta del filtro ad un gradino allora $R'[n] = R[n] - R[n-1]$ è la risposta ad una delta di Kronecker³ e si ottiene il risultato seguente

$$\langle DELTA^2 \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (DELTA[k]R'[n-k])^2 = \sigma_{DELTA}^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R'^2[k] \quad (10)$$

2 Filtro trapezoidale, rumore e deficit balistico

2.1 Il filtro trapezoidale

Il formatore trapezoidale è un filtro che trasforma un segnale a gradino $u[n]$ definito da

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

²La generalità di questo approccio è garantita dal teorema di Carson. Per un rumore costituito da una serie di impulsi identici distribuiti casualmente nel tempo con frequenza media ν , ampiezza quadratica media $\langle a^2 \rangle$ ed ampiezza media nulla la densità spettrale è data da:

$$w(\omega) = 2\nu \langle a^2 \rangle |F(\omega)|^2$$

dove $|F(\omega)|^2$ rappresenta lo spettro di potenza del singolo impulso normalizzato. Poiché per un impulso a delta di Kronecker si ha $|F(\omega)|^2 = 1$, il rumore DELTA ipotizzato da Goulding è equivalente a rumore bianco con densità spettrale $2\nu \langle a^2 \rangle$.

³Dal momento che la delta di Kronecker è la derivata discreta del gradino unitario, è sufficiente applicare la proprietà dei filtri LTI vista nel paragrafo 1.1 ed operare con l'operatore di derivazione non sul gradino $u[n]$ ma sulla risposta $R[n]$

in un segnale trapezoidale. Un formatore trapezoidale è un'estensione di quello triangolare, che risulta essere il formatore ottimale in presenza del solo rumore in serie (di tipo DELTA) [9]. Alla forma triangolare si aggiunge solitamente una parte piatta (flat-top) trasformandola in un trapezio, con lo scopo di ridurre l'eventuale deficit balistico [10, 11] dovuto al tempo di salita finito del segnale di ingresso. È possibile dimostrare che al fine di ottimizzare le prestazioni del filtro è consigliabile che la risposta sia un trapezio isoscele, ovvero che i tempi di salita e di discesa siano uguali [8]. Se dunque si indica con N il tempo di salita (in campioni) del trapezio (rise-time) e con M il tempo di permanenza sul massimo (flat-top) è possibile scrivere la risposta $R[n]$ ad un gradino unitario $u[n]$:

$$R[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n + 1 & 0 \leq n < N \\ N & N \leq n < N + M \\ 2N + M - n - 1 & N + M \leq n < 2N + M \\ 0 & n \geq 2N + M \end{cases} \quad (12)$$

In seguito sarà utile anche la sua derivata discreta:

$$R'[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & N \leq n < N + M \\ -1 & N + M \leq n < 2N + M \\ 0 & n \geq 2N + M \end{cases} \quad (13)$$

Dall'equazione (12) si osserva immediatamente che il filtro così definito non è normalizzato in ampiezza; il valore dei campioni del flat top vale infatti N per un gradino di ampiezza unitaria in ingresso. Questo effetto di scalatura di solito non rappresenta un problema in quanto nel passaggio da ampiezza a energia è sempre necessaria una procedura di calibrazione, procedura che finirà per tener conto anche di questo effetto. Per capire come il filtro reagisca al rumore di ingresso è sufficiente applicare le equazioni (9) e (10) per ottenere le varianze, all'uscita del filtro, delle due componenti di rumore (STEP e DELTA):

$$\begin{aligned} \langle STEP^2 \rangle &= \sigma_{STEP}^2 \left(2 \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)^2 + \sum_{k=N}^{N+M-1} N^2 \right) = \sigma_{STEP}^2 \left(MN^2 + 2 \sum_{k=1}^N k^2 \right) \\ &= \sigma_{STEP}^2 \left(MN^2 + \frac{N(2N^2 + 3N + 1)}{3} \right) \approx \sigma_{STEP}^2 \left(MN^2 + \frac{2N^3}{3} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\langle DELTA^2 \rangle = \sigma_{DELTA}^2 \left(2 \sum_{k=0}^{N-1} 1 \right) = 2N \sigma_{DELTA}^2 \quad (15)$$

2.2 La trasformata z e le equazioni alle differenze

Dato che per ricavare l'equazione che rappresenta il filtro trapezoidale si farà ricorso alla cosiddetta *trasformata z* di un segnale discreto, si è ritenuto opportuno riportarne qui la definizione ed alcune utili proprietà [5]. In analogia con la trasformata di Laplace per funzioni reali a valori reali si definisce la cosiddetta *trasformata z* per sequenze discrete nel dominio del tempo

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \quad (16)$$

Dove z è una variabile complessa, $h[n]$ è una sequenza discreta nel tempo e $H(z)$ la sua *trasformata z* . Ad esempio la *trasformata z* di una delta di Kronecker vale identicamente 1, quella del gradino unitario è

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (17)$$

e quella di un esponenziale unilaterale $e[n] = u[n]a^n$ è

$$E(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (18)$$

Queste trasformate di sequenze elementari saranno utili in seguito.

La *trasformata z* gode delle stesse proprietà della trasformata di Laplace, in particolare se $g[n] = h[n - N]$ (ovvero se $g[n]$ è una copia ritardata di $h[n]$) si ottiene

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n - k]z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n-k} = z^{-k}H(z) \quad (19)$$

Inoltre la *trasformata z* del prodotto di convoluzione di due sequenze è uguale al prodotto delle loro trasformate. Queste proprietà risultano molto importanti per la realizzazione di un'ampia classe di filtri digitali LTI. Si tratta infatti di quei filtri che possono essere descritti da una cosiddetta *equazione alle differenze finite a coefficienti costanti* del tipo

$$\sum_{k=0}^A \alpha_k y[n - k] = \sum_{h=0}^B \beta_h x[n - h] \quad (20)$$

dove $x[n]$ è il segnale di ingresso, $y[n]$ il segnale di uscita, α_k e β_h i coefficienti che rappresentano il filtro.

Se si considerano le *trasformate z* dei due membri si ottiene

$$Y(z) \sum_{k=0}^A \alpha_k z^{-k} = X(z) \sum_{h=0}^B \beta_h z^{-h} \quad (21)$$

dove si è sfruttata, per il passaggio dalla (20) alla (21), la linearità della *trasformata- z* . Indicando con $h[n]$ la funzione di risposta del filtro si ha che $y[n] = h[n] * x[n]$ dunque nel

dominio delle *trasformate* z

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^B \beta_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^A \alpha_k z^{-k}} \quad (22)$$

Ne consegue che, se riusciamo a scrivere la *trasformata* z di un sistema LTI nella forma (22), possiamo immediatamente trovare i coefficienti con cui realizzare il sistema attraverso la (20).

2.3 Algoritmo del formatore e correzione di polo-zero

Per poter realizzare il filtro trapezoidale che ci interessa si deve per prima cosa ricavare l'*equazione alle differenze finite* che ne regola il comportamento. Per dedurre tale equazione si ricorre al seguente metodo: partendo da $R'[n]$, risposta del filtro ad una delta di Kronecker, la si deriva (con una derivata discreta) per ottenere una funzione relativamente semplice:

$$R''[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, n = 2N + M \\ -1 & n = N, n = N + M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (23)$$

Si può dunque costruire un formatore trapezoidale applicando in sequenza un filtro con funzione di risposta $R''[n]$ ed un integratore, che esegue l'operazione inversa della derivata ed ha come funzione di risposta il gradino unitario $u[n]$. Moltiplicando tra loro le *trasformate* z delle due funzioni di risposta si ottiene

$$H_{trap}(z) = R''(z) * U(z) = \frac{1 - z^{-N} - z^{-(N+M)} + z^{-(2N+M)}}{1 - z^{-1}} \quad (24)$$

dove con $R''(z)$ si è indicata la *trasformata* z di $R''[n]$. Per confronto con le equazioni (20) e (22), si deduce che **l'equazione alle differenze finite del filtro è la seguente⁴:**

$$y[n] = y[n - 1] + x[n] - x[n - N] - x[n - N - M] + x[n - 2N - M] \quad (25)$$

Il filtro così costruito trasforma un segnale a gradino perfetto in un trapezio; tuttavia il segnale da analizzare (l'uscita digitalizzata di un preamplificatore di carica) non è di solito un gradino perfetto, ma presenta un decadimento esponenziale, dovuto alla resistenza posta di solito in parallelo al condensatore di reazione [6]. Per adattare il filtro in modo che trasformi un esponenziale in un trapezio è necessario applicare una correzione di polo-zero, ovvero aggiungere un termine che trasformi l'esponenziale in un gradino. Nuovamente è

⁴L'*equazione alle differenze finite* realizza il filtro in modo detto "ricorsivo", ovvero l'uscita è calcolata impiegando valori di uscite precedenti. Questo non è il solo modo di calcolare il filtro. Trattandosi di un filtro a risposta limitata nel tempo, è possibile calcolarlo come prodotto di convoluzione dell'ingresso con la sua risposta. Il problema di quest'ultimo metodo è l'elevato numero di calcoli per campione e l'elevata occupazione di memoria necessaria nel caso di una risposta costituita da molti campioni.

possibile eseguire il calcolo con le *trasformate* z per trovare la trasformata del sistema “correttivo” a partire dalle trasformate del gradino e dell’esponenziale.

$$H_{pzc}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{\frac{1}{1-z^{-1}}}{\frac{1}{1-az^{-1}}} = \frac{1-az^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (26)$$

Possiamo dunque applicare in successione la correzione ed il filtro trapezoidale, cosa che equivale a moltiplicare le *trasformate* z per ottenere la *trasformata* z del sistema complessivo:

$$H(z) = H_{pzc}(z)H_{trap}(z) = \frac{1-az^{-1}}{1-z^{-1}} \frac{(1-z^{-N}-z^{-(N+M)}+z^{-(2N+M)})}{1-z^{-1}} \quad (27)$$

Ed ottenere, per semplice confronto con la (20) e la (22), i coefficienti della seguente equazione:

$$y[n] = 2y[n-1] - y[n-2] + (x[n] - x[n-N] - x[n-N-M] + x[n-2N-M]) - a(x[n-1] - x[n-N-1] - x[n-N-M-1] + x[n-2N-M-1]) \quad (28)$$

Ovviamente la costante a va determinata di volta in volta adattandola alle caratteristiche del circuito di lettura del segnale. Nominalmente, se la “coda esponenziale” del segnale del preamplificatore è caratterizzata da una costante di tempo τ , si ha

$$a = e^{-\frac{\tau_{clk}}{\tau}} \quad (29)$$

oppure $a = e^{-\frac{1}{\hat{\tau}}}$ dove $\hat{\tau}$ è la costante di decadimento in campioni.

2.4 Il segnale digitalizzato e il rumore di campionamento

Nel caso del trattamento analogico dei segnali, il rumore STEP e il rumore DELTA introdotti da Goulding (ed eventualmente il rumore detto “in eccesso” o “1/f”, che in questo lavoro non consideriamo) sono sufficienti a definire completamente il problema. Nel caso di segnali digitalizzati, invece, occorre considerare che la digitalizzazione inevitabilmente aggiunge del rumore al segnale digitalizzato.

Il passaggio da una variabile continua (come la tensione) ad una variabile discreta (il valore fornito dall’ADC) introduce un rumore legato all’arrotondamento dei valori. Questo rumore (detto “di quantizzazione”) influisce sul bit meno significativo dell’ADC. Si può verificare che il rumore di quantizzazione (Q_n) ha una varianza pari a

$$\sigma_{Q_n}^2 = \frac{FS^2}{12 * 4^B} \quad (30)$$

dove con FS si indica il fondoscala picco-picco dell’ADC e con B il numero di bit dell’ADC [5]. Quest’ultimo valore è corretto solo assumendo che l’ADC non aggiunga nessun altro

tipo di rumore al segnale prima di digitalizzarlo. In realtà le varie componenti elettroniche dell'ADC ed i comportamenti “non ideali” (come le non linearità) tendono ad aggiungere del rumore al segnale. Ad esempio, se supponiamo di convertire un segnale analogico di ampiezza costante, il segnale digitalizzato presenterà delle fluttuazioni non legate al rumore di quantizzazione ma ad altre cause come il rumore introdotto dai vari stadi analogici. L'entità complessiva delle fluttuazioni di rumore introdotte sul segnale dall'ADC può essere quantificata dagli ENOB (Effective Number Of Bits), che rappresentano il numero di bit effettivi dell'ADC: a causa del rumore introdotto dall'ADC, infatti, i bit il cui valore è inferiore alle fluttuazioni di rumore perdono di significatività. In analogia con la trattazione del rumore di quantizzazione si usa definire la varianza del rumore introdotto dall'ADC mediante la relazione:

$$\sigma_{ADC}^2 = \frac{1}{12 \cdot 4^{ENOB}} = \frac{1}{12} \left(\sigma_n^2 + \frac{1}{4^B} \right) \quad (31)$$

dove ENOB è un numero di bit “efficace” (con $ENOB < B$). Per gli ADC a campionamento attualmente in commercio e adatti alla digitalizzazione dei segnali in fisica nucleare si ha $ENOB \approx B - 2$

2.5 Ottimizzazione del rapporto segnale-rumore

Assumendo che il filtro mantenga invariata la massima ampiezza del segnale, si possono utilizzare tutte le considerazioni fatte finora per elaborare un modello che permetta di ottimizzare le prestazioni del filtro. Consideriamo un segnale $x[n]$ affetto da rumore di tipo STEP e DELTA tale che

$$\sigma_{STEP}^2 = k\sigma_{DELTA}^2 \quad (32)$$

Poiché le due componenti di rumore sono indipendenti si avrà, per la varianza di rumore su x , σ_x^2 :

$$\sigma_x^2 = \sigma_{STEP}^2 + \sigma_{DELTA}^2 = (1 + k)\sigma_{DELTA}^2 \quad (33)$$

Dal momento che il filtro è lineare le due componenti contribuiscono indipendentemente al rumore in uscita. Dunque ricordando le equazioni (9) e (10) abbiamo per σ_y^2 , varianza del rumore in uscita:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \langle STEP^2 \rangle + \langle DELTA^2 \rangle = \\ &= \left(k \left(MN^2 + \frac{N(2N^2 + 3N + 1)}{3} \right) + 2N \right) \sigma_{DELTA}^2 \end{aligned} \quad (34)$$

Considerando che il segnale formato ha massimo pari ad N , si può esprimere la dipendenza da k , N ed M del SNR del segnale formato. Per semplicità di calcolo si studia l'andamento del reciproco del quadrato del SNR.

$$r^2 = \frac{1}{SNR_{out}^2} = \frac{\sigma_{y[n]}^2}{N^2} = k \left(M + \frac{2N}{3} + 1 + \frac{1}{3N} \right) + \frac{2}{N} = \frac{k(3M + 2N + 3) + \frac{k+6}{N}}{3} \quad (35)$$

Per valutare le condizioni ottimali di lavoro del filtro si deve andare a cercare il minimo di questa quantità. Valutando le derivate parziali di r^2 rispetto a M , N e k si ottengono i seguenti risultati

$$\frac{\partial r^2}{\partial M} = k \quad (36)$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial N} = \frac{2k - \frac{k+6}{N^2}}{3} \quad (37)$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial k} = \frac{3M + 2N + 3 + \frac{1}{N}}{3} \quad (38)$$

Andiamo ad analizzare i vari termini:

- la derivata rispetto a k non interessa in quanto k dipende in generale dal rivelatore e dal circuito di lettura e non è dunque modificabile agendo sulle impostazioni del filtro;
- la derivata rispetto a M si annulla solo se il rumore è esclusivamente di tipo DELTA ($k = 0$). Il valore di r^2 cresce al crescere di M , dunque sembrerebbe utile scegliere M il più piccolo possibile; in realtà, come si vedrà nel paragrafo 2.6, valori piccoli di M portano altri problemi.

In questo ambito, l'unico elemento di interesse è dunque la derivata rispetto ad N .

$$\frac{\partial r^2}{\partial N} = \frac{2k - \frac{k+6}{N^2}}{3} = 0 \quad (39)$$

$$N_{MIN} = \sqrt{\frac{k+6}{2k}} \quad (40)$$

Dunque ci si aspetta, fissate le condizioni sul segnale di ingresso, di trovare una condizione di minimo del SNR per un determinato valore di N (dato dalla (40)) che ci si aspetta essere indipendente da M .

2.6 Il problema del deficit balistico

Quando si misura il massimo di un segnale formato per dedurre informazioni sull'energia, si vorrebbe che il valore misurato fosse proporzionale alla carica prodotta dal passaggio della radiazione ionizzante nel rivelatore, ovvero all'integrale del segnale di corrente prodotto dal rivelatore stesso. Per valutare di quanto il massimo si discosta dal valore previsto si definiscono il deficit balistico:

$$BD = \max\{y[n]\} - \max\{x[n]\} \quad (41)$$

e il deficit balistico relativo

$$RBD = \frac{\max\{y[n]\} - \max\{x[n]\}}{\max\{x[n]\}} \quad (42)$$

Si vuole ora schematizzare il problema e trovare un modello in grado di descrivere la dipendenza del deficit balistico dalle caratteristiche del filtro e del segnale. Per valutare il deficit balistico si considerano tutte le operazioni che vengono eseguite sul segnale di corrente, che indichiamo con $c[n]$ ⁵:

1. il segnale $c[n]$ viene elaborato da un integratore che presenta un decadimento esponenziale con costante di decadimento τ , che lo trasforma in un altro segnale, $x[n]$. L'integratore trasforma una delta di Kronecker in un esponenziale $e[n] = a^n u[n]$ con a dato dall'equazione (29);
2. al segnale $x[n]$ viene applicata la correzione di polo-zero, con costante a , che trasforma l'esponenziale $e[n] = a^n u[n]$ in un gradino unitario $u[n]$. Si ottiene così il segnale $x_{pzc}[n]$;
3. al segnale $x_{pzc}[n]$ viene applicato il filtro trapezoidale senza la correzione di polo-zero, che ha come funzione di risposta la funzione $R'[n]$ definita nell'equazione (13).

L'applicazione in sequenza dell'integratore con decadimento esponenziale con costante di decadimento τ e della correzione di polo-zero è equivalente all'applicazione di un integratore ideale al segnale di corrente. Quindi, assumendo un segnale di corrente con carica totale unitaria, il segnale $x_{pzc}[n]$ presenta un valore massimo pari a 1 ed in generale si avrà:

$$x_{pzc}[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ f[n] & 0 \leq n < T_s \\ 1 & n \geq T_s \end{cases} \quad (43)$$

dove con $f[n]$ si indica la forma del fronte di salita (con $f[T_s] = 1$ ed $f[0] = 0$) e con T_s il tempo di salita del segnale in campioni (che corrisponde alla durata del segnale di corrente). Considerando la funzione di risposta del filtro si calcola il campione n-esimo del segnale prodotto

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{pzc}[k] R'[n-k] = \sum_{k=n-N+1}^n x_{pzc}[k] - \sum_{k=n-2N-M+1}^{n-N-M} x_{pzc}[k] \quad (44)$$

Se ci poniamo nelle condizioni $M > T_s$ e $T_s + N < n < N + M$ si ha che:

- il fronte di salita del segnale convoluisce totalmente con la regione dove $R'[n] = 0$ e dà un contributo nullo al valore di $y[n]$;
- la seconda sommatoria dà anch'essa contributo nullo perché per i valori di k su cui si esegue la somma $x_{pzc}[k] = 0$;

⁵Per eseguire il calcolo si suppone di essere in condizioni di validità del teorema del campionamento e di potere dunque usare $c[n]$ e $c(t)$ indistintamente.

Resta solo il primo termine della (44) che risulta dare un contributo

$$y[n] = \sum_{k=n-N+1}^n x_{pzc}[k] = N = y_0 \quad (45)$$

in quanto per i valori considerati di k si ha $x_{pzc}[k] = 1$. Si può verificare con semplici calcoli (che verranno omessi per questioni di spazio) che per valori di n diversi da quelli considerati si ottengono valori di $y[n]$ minori di y_0 che costituisce dunque il massimo del segnale $y[n]$. In queste condizioni si ottiene quindi un massimo pari a N che, a parte un fattore di scala legato all'integrazione, coincide col massimo del segnale di ingresso. Il deficit balistico risulta quindi eliminabile scegliendo un valore di M maggiore delle durate dei segnali di corrente prodotti dal rivelatore.

Per confronto con le misure che presenteremo nel seguito, non disponendo del segnale di corrente $c[n]$, ma solo dei segnali $x[n]$ ed $y[n]$, si vuole valutare l'andamento della differenza relativa tra i massimi di questi due segnali. Il segnale $x[n]$ è affetto dal deficit balistico introdotto dal preamplificatore di carica e presenta un massimo, x_{max} , che risulta inferiore a quello che si avrebbe con un integratore perfetto⁶, quindi minore del massimo di $y[n]$, y_{max} . Il valore di x_{max} dipende solo dalla durata del segnale di corrente T_s e dalla costante di decadimento del preamplificatore a . Nelle condizioni viste sopra ($M > T_s$) il valore di y_{max} è, a parte il fattore di scala N , uguale a 1 e si ha che

$$RBD = \frac{y_{max} - x_{max}}{x_{max}} = \frac{1}{x_{max}} - 1 \quad (46)$$

è indipendente dai parametri del filtro N e M . Ci si aspetta dunque di osservare che per valori di M maggiori del tempo di salita espresso in campioni, T_s , il valore di RBD sia costante, ovvero che sia indipendente dai parametri del filtro.

3 Realizzazione del filtro su ADSP-2189N

3.1 Il DSP ADSP-2189N

Il DSP in uso sulla nostra scheda [1] è un ADSP-2189N della Analog Devices. Questo modello presenta un'architettura a 16-bit, con una velocità di calcolo di 80 MIPS. La struttura interna del DSP è mostrata in figura 1 e si compone di tre unità di calcolo (ALU, MAC e Barrel Shifter), di due unità di memoria (PROGRAM e DATA MEMORY) e di due unità per il controllo e l'accesso indiretto alla memoria (DAG). In seguito si illustreranno brevemente le funzioni delle diverse unità, per maggiori informazioni si faccia riferimento alla bibliografia [12, 13].

⁶In verità non si tratta di un caso frequente, dato che solitamente si fanno le costanti di decadimento del preamplificatore molto maggiori dei tempi di raccolta della carica. L'effetto è comunque di interesse nei recenti studi del gruppo III dell'INFN sui rivelatori al silicio parzialmente svuotati.

3.1.1 Program e Data Memory

Nella memoria di programma vengono caricate le istruzioni da far eseguire al DSP. Tali programmi utilizzeranno la memoria dati per le variabili ed i dati temporanei necessari per il loro funzionamento. La memoria di programma può anche essere impiegata per immagazzinare variabili, come ad esempio i coefficienti delle *equazioni alle differenze*. L'architettura del "bus dati" del DSP permette di accedere ai dati in memoria di programma (ad esempio un coefficiente) ed a quelli nella memoria dati (ad esempio un campione da elaborare) in uno stesso ciclo di istruzione, velocizzando notevolmente l'elaborazione. Al momento il nostro algoritmo non sfrutta questa possibilità.

FUNCTIONAL BLOCK DIAGRAM

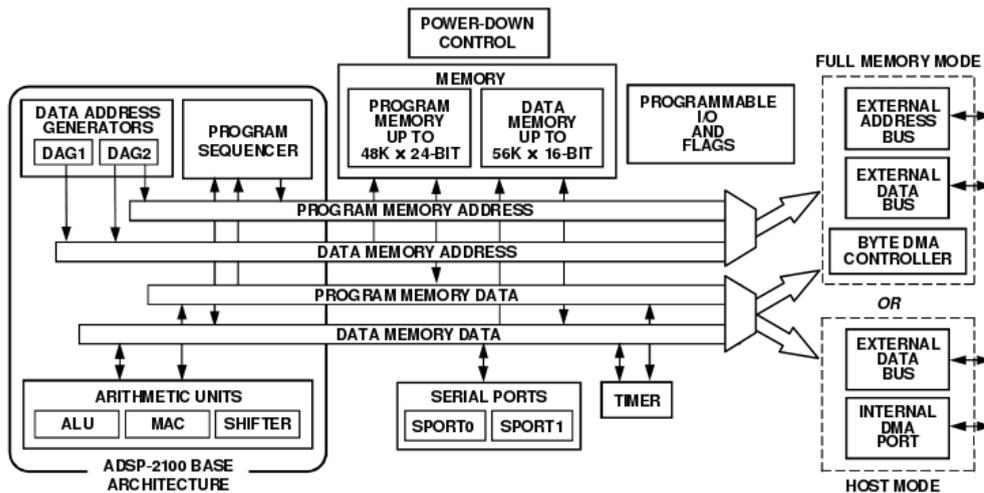


Figura 1: Struttura interna del DSP ADSP 2189-N

3.1.2 Unità di calcolo

Come anticipato le unità di calcolo sono tre:

- la ALU (Arithmetic-Logic Unit) serve per eseguire operazioni di somma e sottrazione tra registri, eventualmente con riporto, e semplici operazioni logiche;
- il MAC (Multiplier-ACcumulator) permette di eseguire il prodotto tra due registri ed aggiungere il risultato del prodotto ad un terzo registro in una sola operazione;
- il Barrel-Shifter serve per eseguire operazioni di scorrimento di bit (logico o aritmetico) dei dati contenuti nei registri.

Nessuna delle tre unità di calcolo può operare direttamente sulle variabili presenti nella Data Memory, dunque prima di ogni operazione è necessario copiare i valori delle variabili necessarie nei registri accessibili dalla specifica unità di calcolo.

3.1.3 Data Address Generator

I due DAG presenti nel DSP servono per l'accesso indiretto alla memoria dati (e di programma) e ciascuno di essi controlla quattro puntatori. Le operazioni di base del DAG sono l'inizializzazione e l'incremento di un puntatore. L'incremento del puntatore può anche essere eseguito insieme alla lettura del dato tramite un'istruzione di post-incremento. Molto utile per la realizzazione di filtri digitali è la gestione automatica di buffer circolari, così che, ad esempio, al termine del calcolo di un campione di uscita il puntatore al vettore dei coefficienti punta automaticamente al primo valore da utilizzare per il calcolo del campione seguente.

3.1.4 Program Sequencer

Questa unità gestisce l'esecuzione del programma sul DSP: il suo ruolo, infatti, è quello di generare gli indirizzi delle istruzioni di programma e controllare il flusso dell'algoritmo. Gestisce, ad esempio, i cicli di istruzioni, le chiamate a subroutine (istruzioni **CALL**) e l'utilizzo dei label (e dunque delle istruzioni **JUMP**, che sono l'equivalente in Assembler del **goto**) all'interno dei programmi.

3.2 Descrizione dell'algoritmo

L'algoritmo del formatore trapezoidale è stato pensato per inserirsi all'interno del programma di elaborazione sviluppato dall'INFN nell'ambito dell'esperimento GARFIELD. Il programma è eseguito, come già anticipato, da un DSP installato a bordo di una scheda di digitalizzazione [1]. Quindi, oltre a realizzare l'algoritmo in Assembler, si è anche provveduto a modificare tale programma in modo da includerlo. Questa operazione è stata facilitata dalla struttura modulare del programma principale, in cui i vari algoritmi di elaborazione presenti vengono richiamati solo se richiesti dallo sperimentatore, il quale può impostare la sequenza di algoritmi da applicare a ciascun segnale prima di dare inizio alla misura. Particolarmente importante ai nostri fini è la presenza nel programma di GARFIELD di un algoritmo di lettura del segnale che legge il segnale dalla memoria FIFO, lo memorizza nella Data Memory del DSP e ne calcola l'ampiezza massima ed il valore medio della linea di base. L'algoritmo del filtro trapezoidale, il cui diagramma di flusso è illustrato sulla sinistra in figura 2, si compone di una serie di passi che verranno descritti nei prossimi paragrafi.

3.2.1 Calcolo del fattore di scala

Il filtro è calcolato in doppia precisione, ovvero genera un segnale di uscita a 32 bit in notazione 1.31⁷. Il calcolo prevede delle moltiplicazioni tra numeri in doppia precisione,

⁷Nelle notazioni 1.n il bit più significativo della parola (lunga n+1 bit) ha valore -1. I bit successivi hanno valenza frazionaria pari a $2^{-1}, 2^{-2}$ fino a 2^{-n} . I numeri rappresentabili in notazione 1.n sono tutti compresi tra -1 (incluso) ed 1 (non rappresentabile)

sempre in notazione 1.31 (dunque tutti inferiori ad 1): è quindi consigliabile far sì che i segnali da elaborare siano il più possibile allineati a “sinistra” (in termini di bit all’interno delle “parole”), in modo tale da non perdere cifre significative nella moltiplicazione, che tende invece a spostare le “parole” verso “destra” portando alla perdita dei bit meno significativi. Tuttavia è altrettanto importante evitare problemi di “overflow” che porterebbero a valutazioni errate dell’ampiezza. Operando in doppia precisione con numeri a 32 bit in notazione 1.31 i bit effettivi a disposizione per il valore dei campioni elaborati sono 31. La procedura per la scalatura automatica consiste nel determinare la posizione del bit più significativo del valore massimo del segnale da elaborare, calcolando poi la differenza rispetto a 31. Determinato il margine di bit a disposizione occorre anche tenere presente:

- il guadagno di un fattore 16 che si applica al segnale per allinearli alla linea di base (che è calcolata in formato 28.4);
- un fattore di guadagno intrinseco del formatore legato al tempo di integrazione (rise-time) del trapezio.

Per il fattore di scala intrinseco si può semplicemente osservare che il filtro somma una serie di campioni pari al numero di campioni, N , contenuto nel suo fronte di salita. Dunque si ha una moltiplicazione per N ovvero un fattore di scala che si assume pari a 2^{S_i} con

$$S_i = \log_2 N \quad (47)$$

Dal momento che è necessario che l’entità dello scorrimento sia intera si prende in realtà il valore $\text{ceil}(S_i)$, ovvero l’intero immediatamente maggiore di S_i . Con questi accorgimenti si ricava il fattore di scala complessivo 2^S con

$$S = 31 - n_{ms}(\text{max}) - 4 - \text{ceil}(S_i) \quad (48)$$

dove $n_{ms}(\text{max})$ rappresenta la posizione del bit più significativo del valore del massimo del segnale in ingresso. In realtà questo fattore di scala è sovrastimato per il semplice fatto che, non potendo eseguire scorrimenti frazionari, si approssima il fattore di scorrimento intrinseco per eccesso; di questo si deve tener conto quando si confrontano risultati ottenuti con valori diversi di N . È poi importante osservare che il fattore di scala appena introdotto è quello che serve per allineare il segnale il più possibile sulla sinistra tenendo conto anche degli effetti intrinseci. Per valutare di quanto il filtro realmente amplifichi il segnale di ingresso si devono aggiungere al valore precedente i contributi dovuti agli effetti intrinseci. Lo scorrimento complessivo vale:

$$S_{tot} = 31 - n_{ms}(\text{max}) \quad (49)$$

che corrisponde ad un fattore di scala di $2^{S_{tot}}$.

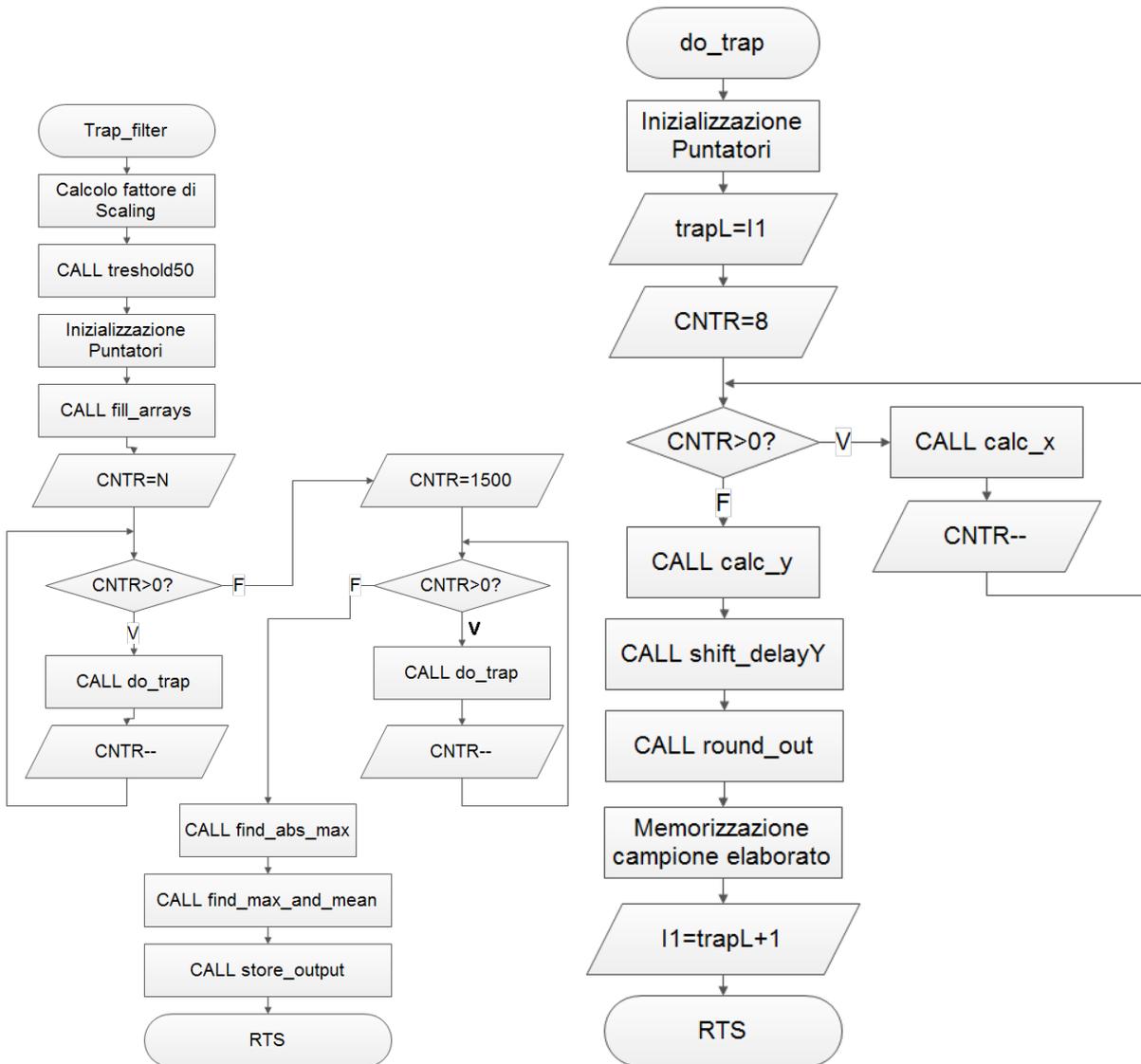


Figura 2: Diagrammi di flusso dell’algoritmo (a sinistra) e della routine principale **do_trap**

3.2.2 Inizializzazione vettori e puntatori

Considerando l’equazione (28) si osserva che il filtro necessita, ad ogni iterazione, di conoscere otto campioni del segnale di ingresso che non sono adiacenti ma sparsi all’interno del segnale in ingresso, oltre agli ultimi due campioni di uscita elaborati. Per andare a leggere i campioni $x[n]$ corretti si ricorre ad una coppia di vettori: un vettore contiene i ritardi dei vari campioni ed un altro i coefficienti per cui tali campioni vanno moltiplicati. Questi due vettori, che restano costanti durante tutta l’esecuzione del filtro, vengono riempiti preliminarmente dalla routine **fill_arrays** in base ai valori impostati di N , M e della costante di tempo a necessaria per la correzione di polo-zero. Inoltre, per facilitare

alcuni controlli, è stata introdotta una routine (**threshold50**) che individua il punto in cui il segnale supera un valore pari a metà del suo valore massimo.

3.2.3 Loop principale

Il nucleo del filtro è senza dubbio costituito dal loop principale, che ad ogni ripetizione calcola un nuovo campione del segnale elaborato eseguendo la routine **do_trap** (in figura 2 a destra), sulla quale daremo qui di seguito alcuni dettagli.

Routine calc_x: La routine legge il ritardo del campione da elaborare e controlla se il campione in questione si trova o meno all'interno del segnale da elaborare. In caso di esito negativo la routine viene interrotta. Il programma legge i campioni in ordine di ritardo crescente e quando una chiamata a **calc_x** fallisce, vengono automaticamente saltate tutte le chiamate successive. Se il campione da leggere si trova all'interno del segnale allora il programma ne legge il valore. Il valore del campione viene moltiplicato per un fattore 16 ed al valore ottenuto viene sottratta la linea di base. Quest'ultima è già stata calcolata, come media di 256 campioni, dall'algoritmo che legge il segnale dalla FIFO ed è stata memorizzata mantenendo 4 bit di valore inferiore ad 1 per ridurre l'errore di troncamento a 1/16. Viene poi eseguita un'ulteriore scalatura con il fattore determinato in precedenza tramite l'equazione (48). Il passo successivo è la lettura del coefficiente e l'aggiunta al risultato parziale del prodotto tra coefficiente e segnale. Dal momento che in notazione 1.31 il numero 1 non è esattamente rappresentabile, ed anche per sveltire l'algoritmo, si esegue un controllo sul coefficiente:

- se è 0 si aggiunge il valore del campione (si sceglie 0 per rappresentare i valori pari a 1, che non è rappresentabile in notazione 1.31)
- altrimenti si ricorre al MAC per calcolare il prodotto del campione per il coefficiente e si somma il risultato del prodotto al dato elaborato.

La routine, almeno in linea di principio, viene eseguita otto volte (una per ogni campione di ingresso che contribuisce all'uscita, equazione (28)) e ad ogni iterazione legge il successivo offset ed il relativo coefficiente.

Routine calc_y: Il contributo delle $y[n]$ viene calcolato in modo più semplice. Gli ultimi due valori elaborati sono memorizzati in una delay-line a 64 bit che viene aggiornata ad ogni iterazione tramite la routine **shiftdelayY**. Tali valori vengono memorizzati prima dell'arrotondamento finale, eseguito dalla routine **round_out**, per evitare perdite di precisione legate alla ricorsività del filtro. Il valore di $y[n - 1]$ viene letto dalla delay-line ed aggiunto due volte al dato elaborato, dopodiché si legge il valore di $y[n - 2]$ e lo si sottrae al dato elaborato.

Fine del ciclo principale: Sommati tutti i contributi il risultato finale , che è in rappresentazione 1.63, viene arrotondato e riportato in notazione 1.31 per poi essere memorizzato nel vettore del segnale elaborato. A questo punto il filtro è pronto per calcolare il campione successivo.

3.2.4 Generazione dell'output

Una volta che il filtro ha finito di elaborare il segnale si procede, almeno in questa fase di studio del programma, a determinare il massimo del segnale elaborato in tre diversi modi:

- si cerca il massimo su tutto il segnale formato;
- si cerca il massimo in una regione limitata del segnale contenente un numero K di campioni;
- si calcola una somma dei campioni nella stessa regione di segnale (per poi dividerla per K ed ottenere la media).

Si vanno quindi a scrivere nell'opportuna locazione di memoria del DSP i dati di uscita utili per le misure successive. Nell'ordine vengono memorizzati:

1. il fattore di scala effettivo S_{tot} , necessario per confrontare il massimo del segnale in ingresso col massimo del segnale elaborato (per misurare il deficit balistico);
2. il massimo del segnale elaborato (a 32 bit) calcolato in una finestra di K campioni;
3. i valori di N ed M (per poter valutare gli andamenti del SNR e del deficit balistico in diverse condizioni);
4. il massimo del segnale in ingresso (a 16 bit);
5. la somma di K campioni del flat top (a 48 bit)⁸;
6. il massimo assoluto del segnale (a 32 bit);
7. la larghezza della finestra K ;
8. la posizione del punto dove il segnale di ingresso supera la soglia del 50% del suo valore massimo;
9. la posizione di inizio della finestra in cui vengono calcolati massimo e media.

⁸Avendo calcolato il fattore di scala del segnale in modo da sfruttare al meglio i bit a disposizione, il massimo del segnale è allineato tutto a "sinistra". Questo fa sì che la somma, anche su pochi campioni, porti ad un overflow. Per ovviare a questo è necessario introdurre una terza "parola" ed aggiungere altri 16 bit ai 32 già presenti.

3.3 Ampiezza massima del segnale formato

Il filtro trapezoidale fornisce, tra i dati elaborati, anche il massimo del segnale elaborato. Questa è di fatto l'informazione di maggior interesse, ed il motivo stesso per cui si è sviluppato il filtro. Dal momento che il segnale di uscita presenta, almeno in linea di principio, un'ampia regione dove mantiene il valore massimo, le modalità di ricerca del massimo possono essere molteplici. Come è stato detto nel paragrafo 3.2.4 i metodi utilizzati per le misure sono tre. Posto $\hat{a} = e^{-\frac{1}{T}}$ sono possibili tre casi (con riferimento all'equazione (29)):

1. se $a < \hat{a}$ il filtro presenta una correzione eccessiva ed il flat-top ha un andamento crescente;
2. se $a > \hat{a}$ il filtro presenta una correzione troppo piccola ed il flat-top ha un andamento decrescente;
3. se $a = \hat{a}$ il filtro produce il segnale corretto⁹ e, escluse le fluttuazioni legate al rumore, il flat-top risulta piatto.

Tenuto conto di questo si possono evidenziare vantaggi e svantaggi dei tre sistemi proposti per la determinazione di ampiezza. Il metodo della somma (ovvero della media) su K campioni ha come pregio quello di ridurre (di un fattore \sqrt{K}) l'errore sulla misura del massimo (e quindi migliorare il valore del SNR), ma risente molto di eventuali discrepanze tra a ed \hat{a} fornendo una misura che a seconda dei casi risulta sovrastimata (se $a < \hat{a}$) o sottostimata (se $a > \hat{a}$). Il metodo del massimo assoluto risente di eventuali sottostime del valore di a ; al contrario è efficace nel caso in cui il valore di a sia sovrastimato. In questo caso, infatti, la decrescita del flat-top non influisce sulla misura (che ne prende il massimo assoluto), tuttavia se la sovrastima fosse eccessiva si avrebbero problemi legati al deficit balistico (vedi segnali in blu e rosso in figura 4). Un altro problema legato a questo metodo deriva dalla presenza di un "overshoot" in corrispondenza del fronte di salita del segnale (vedi figura 4), che porta quindi ad una sovrastima dell'ampiezza massima. Per quel che riguarda la ricerca del massimo su K campioni, a patto che la finestra di K campioni si trovi:

- in prossimità dell'inizio del flat-top, per evitare effetti macroscopici legati ad eventuali discrepanze tra a ed \hat{a} ;
- in una zona del flat-top dove si sia estinta la coda del picco di "overshoot" che introdurrebbe una sovrastima sistematica;

valgono le considerazioni esposte in precedenza per il massimo assoluto.

Il metodo attualmente in uso nell'esperimento GARFIELD per i formatori semigaussiani consiste nel determinare il valore del massimo assoluto del segnale all'interno di un

⁹Si deve tenere conto che il valore di \hat{a} non è sempre rappresentabile esattamente in notazione 1.31, dunque è possibile trovarsi in condizioni tali da non poter eseguire la corretta correzione di polo-zero.

intervallo di campioni limitato in cui ci si aspetta di trovare il massimo del segnale formato. Nell'analisi di segnali formati da un filtro trapezoidale, questo metodo presenta i vantaggi visti sopra. Tuttavia la scelta del massimo su K campioni porta un altro effetto indesiderato: introduce un'“offset” nella misura del massimo. Se infatti si considerano K campioni (x_k) distribuiti (secondo una certa funzione di distribuzione) intorno ad un valore medio ($\langle x \rangle$) e si considera il massimo tra questi campioni (x_{max}) sicuramente sarà $x_{max} \geq \langle x \rangle$. Se ora consideriamo di ripetere l'operazione più volte su più segnali (ovvero su più gruppi di K campioni) si può calcolare la distribuzione di probabilità di x_{max} e stimarne il centroide ($\langle x_{max} \rangle = \Delta max$) e la deviazione standard (σ_{max}). Si può verificare che i valori di Δmax e σ_{max} dipendono solo dal valore di K , che dipende dalle impostazioni del filtro, e dalla funzione di distribuzione degli x_k , che dipende dai parametri N , M e a e dal rumore in ingresso. Una volta che siano fissati questi parametri si ha che:

- l'“offset” $\Delta max - \langle x \rangle$ legato allo spostamento del centroide risulta uguale per tutte le misure, e può dunque essere considerato nella calibrazione del sistema;
- la deviazione standard della distribuzione è la stessa per tutte le misure, ovvero tutte le misure eseguite con questo metodo sono affette, almeno in principio, dallo stesso errore

4 Verifica del funzionamento del filtro e determinazione delle condizioni ottimali

4.1 Configurazione per le misure di test

I segnali da analizzare sono stati prodotti con l'apparato mostrato in figura 3. Utilizzando un Pulse Generator 8007B della HP (un generatore di impulsi con tempi di transizione regolabili) si sono prodotti impulsi unipolari a polarità negativa della durata di circa $100 \mu s$, con tempi di salita di circa 80 ns (per le misure di SNR) o $4 \mu s$ (per le misure del deficit balistico), ed ampiezza di 450 mV . Gli impulsi sono stati applicati all'ingresso “test” di un preamplificatore di carica Tennelec TC-171. Per eseguire le misure in presenza di componenti di rumore sia STEP che DELTA si è collegato all'ingresso “rivelatore” del TC-171 un fotodiodo di tipo p-i-n della Hamamatsu ($1 \times 1 \text{ cm}^2$, $100 \mu m$ di spessore) alimentato a 20 V ed oscurato. Il segnale prodotto dal preamplificatore è, nella configurazione per le misure di SNR, un gradino di tensione con polarità positiva e decadimento esponenziale e presenta un'ampiezza di 250 mV (su 50Ω), un tempo di salita di 80 ns e una costante di decadimento τ di circa $700 \mu s$. Il segnale, inoltre, presenta un “overshoot” di circa il 20% di durata 200 ns . Il segnale viene acquisito dalla scheda di digitalizzazione e, prima della digitalizzazione, amplificato di circa 12 dB (ovvero moltiplicato per 4) in modo che il massimo del segnale digitalizzato si trovi circa a metà della scala dell'ADC (2048 ADU per il nostro ADC a 12bit, corrispondenti ad 1 V picco-picco all'ingresso dell'ADC). I segnali così ottenuti sono stati poi elaborati ed analizzati sul DSP.

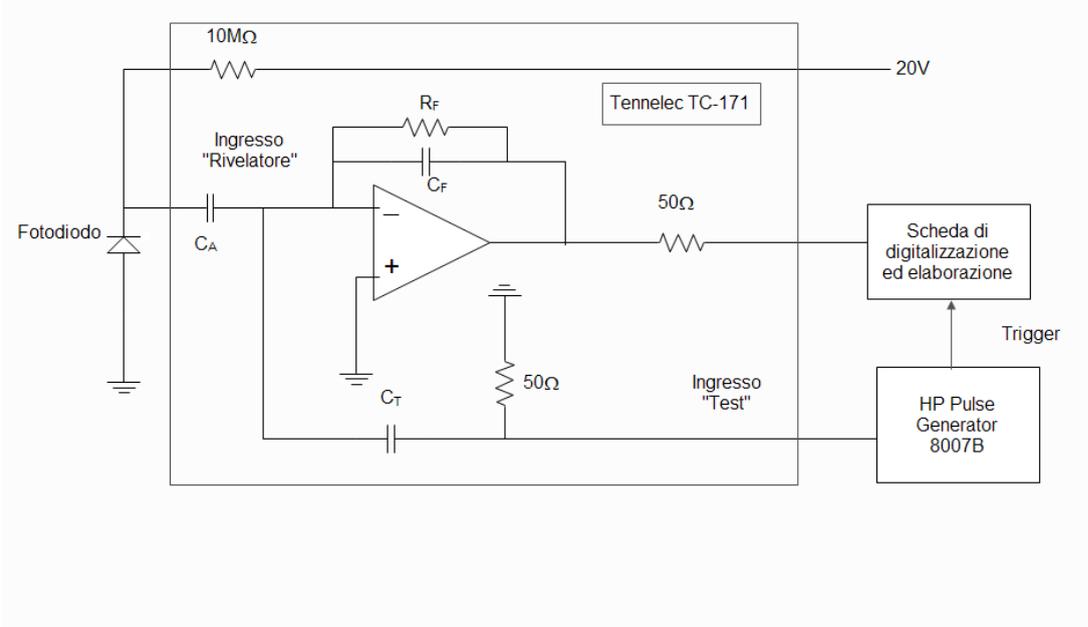


Figura 3: Apparato sperimentale utilizzato per le verifiche del funzionamento dell’algoritmo.

4.2 Controllo del funzionamento della correzione di polo-zero

Prima di procedere con le altre misure abbiamo verificato che il filtro permettesse di applicare correttamente la correzione di polo-zero. Si sono inviati alla scheda due segnali, prodotti nelle medesime condizioni, con una costante di decadimento breve (in modo da esaltare gli effetti della correzione). I due segnali (uno dei quali è riportato, a titolo di esempio, in nero in figura 4) sono stati analizzati dal DSP in due configurazioni diverse. Il primo (in rosso) è il segnale prodotto dal formatore trapezoidale in assenza della correzione di polo-zero ($a = 1$), il secondo (in blu) è il segnale prodotto con la correzione di polo-zero. Il valore della costante a corretto è stato stimato procedendo ad un fit esponenziale sulla coda del segnale in ingresso ed applicando poi l’equazione (29) per ricavare a dalla costante di tempo τ . Osservando i segnali rappresentati in figura 4 si vede che la risposta del filtro è sensibile a variazioni del parametro a e che, in assenza di correzione di polo-zero, il flat-top del trapezio presenta una decrescita esponenziale con la stessa costante di decadimento del segnale. Inoltre si nota, nel segnale in ingresso, un picco di “overshoot” in corrispondenza del fronte di salita; questo picco risulta presente anche nei segnali formati, seppur ridotto in ampiezza e allungato in durata¹⁰. La presenza di questo picco risulta molto importante ai fini della misura in quanto costituisce una possibile fonte di errore sistematico, se non accuratamente considerata.

¹⁰Questi due effetti derivano dal fatto che, trattandosi di un impulso breve, viene notevolmente attenuato dal filtro, che taglia le alte frequenze.

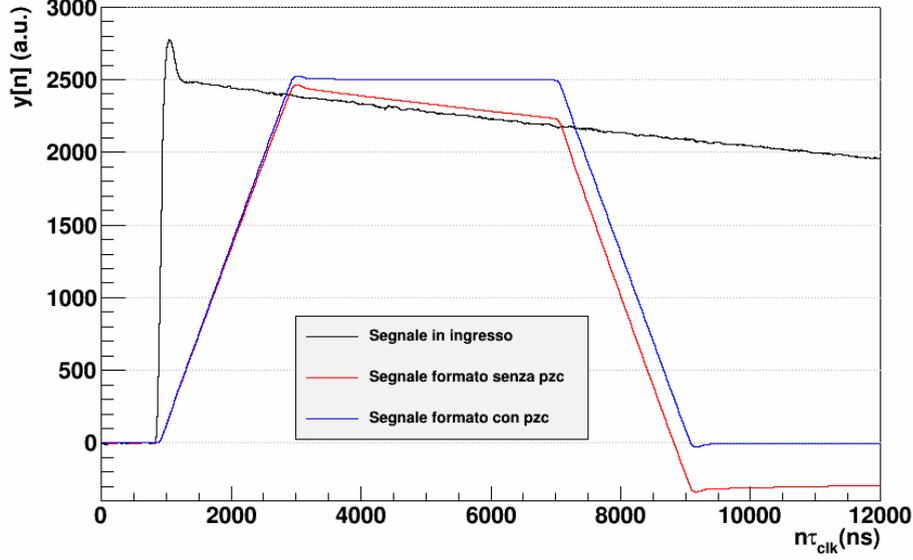


Figura 4: Segnale in ingresso (in nero) e segnali formati corrispondenti. In rosso: segnale formato senza correzione di polo zero. In blu: segnale formato con la correzione di polo zero.

4.3 Analisi dei dati

Per determinare sperimentalmente le condizioni di lavoro ottimali del filtro realizzato si sono misurati il deficit balistico ed il valore di SNR per diverse impostazioni del filtro e per diversi tempi di salita del segnale di ingresso. Un programma realizzato in C++ in ambiente ROOT [14] si occupa di caricare il programma su DSP e di gestire l’acquisizione e l’elaborazione dei segnali. All’interno di ogni “run” di misura si eseguono molteplici acquisizioni ed elaborazioni di segnali nelle medesime condizioni (stessi valori di N ed M , stesso rise-time del segnale) e, per ogni segnale elaborato, si leggono i dati prodotti dall’algoritmo (vedi paragrafo 3.2.4). Eseguite tutte le acquisizioni, si procede poi ad un fit gaussiano delle distribuzioni dei massimi ottenuti (nei tre diversi modi previsti) dai vari segnali per determinarne il valor medio e la deviazione standard. Per poter confrontare tra di loro i dati ottenuti essi vanno riscalati dell’opportuno fattore di scala; ciascun dato, per essere riportato in scala col segnale di ingresso, deve essere moltiplicato per un fattore pari a

$$f_{SCAL} = \frac{N_+}{2^{S_{tot}} N} \quad (50)$$

dove $N_+ = 2^{\text{ceil}(\log_2 N)}$ rappresenta la più piccola potenza di due maggiore o uguale ad N . Questa correzione serve a tener conto del fatto che mentre il fattore di scala calcolato dal DSP e letto dal programma assume un’amplificazione legata all’integrazione pari ad N_+ (per esigenze di calcolo), la reale amplificazione è pari ad N .

4.4 Misure del rapporto segnale rumore

4.4.1 Considerazioni sugli effetti di bordo

Secondo quanto ottenuto nel paragrafo 2.5, equazione (35), il valore di r^2 dipende dai parametri N ed M . Inoltre, fissato M , la posizione del minimo rispetto a variazioni di N è indipendente dal valore di M . Dobbiamo tuttavia tenere conto che l'algoritmo utilizzato assume che il segnale sia nullo nella zona per la quale non sono disponibili campioni. Esiste quindi una fase transitoria in cui la funzione di risposta $R'[n]$ non è completamente "immersa" nel segnale [15]. In particolare se consideriamo un campione di uscita del filtro $y[n_0]$ con $N < n_0 < N + M$, ponendo $n_0 = N + N_1$ possiamo calcolare il rumore presente in questa porzione di segnale applicando le equazioni (9) e (10) tenendo conto che per $n < 0$ si ha $x[n] = 0$. I risultati ottenuti sono

$$\langle DELTA^2 \rangle = N\sigma_{DELTA}^2 \quad (51)$$

$$\langle STEP^2 \rangle = \left(N \frac{2N^2 + 3N + 1}{6} + N^2(N_1) \right) \sigma_{STEP}^2 \quad (52)$$

$$r^2 = \frac{3k(1 + 2N_1) + 2kN + \frac{6+k}{N}}{6} \quad (53)$$

È interessante notare come, in queste condizioni, il valore di r^2 sia indipendente da M . Inoltre si osserva che la posizione del minimo risulta invariata rispetto alle considerazioni fatte in precedenza. Gli andamenti ottenuti con le simulazioni del paragrafo 3.3 restano validi a patto di sostituire la deviazione standard del rumore di uscita, che in tali calcoli veniva ricavata in assenza di effetti di bordo, con la deviazione standard del rumore di uscita calcolata tenendo conto di tali effetti.

4.4.2 Acquisizione ed elaborazione dei dati

Per le misure di test ci siamo sempre posti in modo da soddisfare le condizioni della (53), ovvero nella situazione in cui per i campioni $y[n]$ su cui si media e si cerca il massimo valga la relazione $N < n < N + M$. Lo scopo delle misure illustrate in questo paragrafo è verificare i comportamenti previsti dalle equazioni (40) e (53). In particolare,

- verificare che r^2 presenta un minimo (rispetto a variazioni di N) e che la posizione di tale minimo non dipende da M ;
- verificare che il valore di r^2 non dipende da M nelle condizioni di misura (tenendo conto degli effetti di bordo).

Per eseguire questa verifica sono stati acquisiti vari "run" da 10000 segnali l'uno, per tre differenti valori di M (1792, 2048, 2304). Per ciascuno dei valori di M utilizzati sono stati acquisiti 30 "run" con valori di N compresi tra 128 a 3840 a passi di 128. I dati prodotti da ciascuna acquisizione sono stati analizzati in ambiente ROOT con una macro realizzata

allo scopo. Per ogni “run” si è proceduto ad eseguire un fit gaussiano sulle distribuzioni dei valori dei massimi (calcolati come illustrato nel paragrafo 3.2.4) ed a rappresentare in grafico l’andamento di r in funzione di N . I grafici a), b) e c) di figura 5 riportano l’andamento di r calcolato con i tre differenti metodi per ciascun valore di M . Nel grafico d) sono invece riportati gli andamenti calcolati per i diversi valori di M col metodo del massimo su K campioni (con $K = 100$).

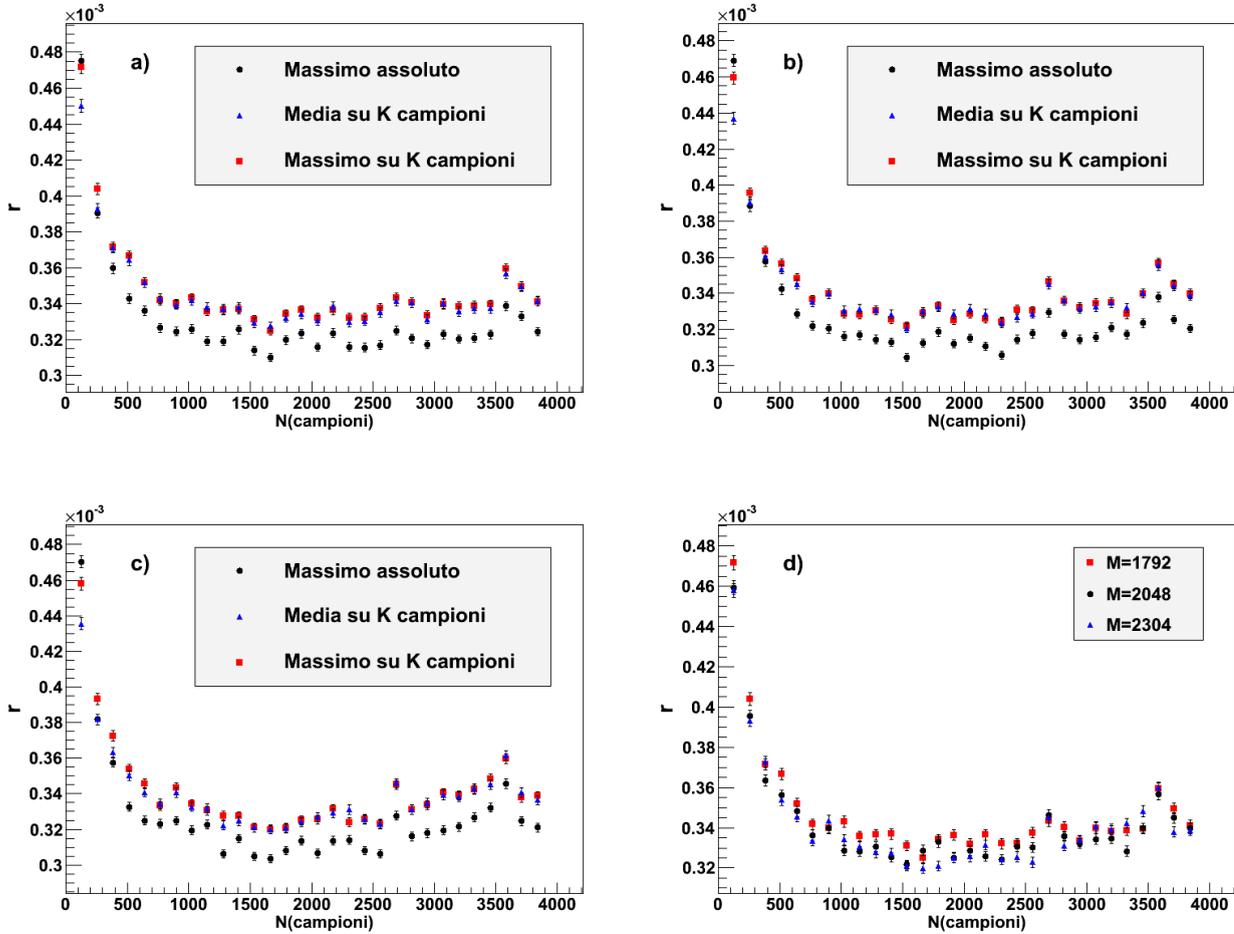


Figura 5: Risultati delle misure di SNR: nei grafici a), b) e c) sono riportati gli andamenti di $r = SNR^{-1}$ calcolati con i tre metodi di misura del massimo proposti, rispettivamente per $M=1792$, $M=2048$, $M=2304$; nel grafico d) è riportato l’andamento di r , calcolato col metodo del massimo su una finestra di 100 campioni, per i tre valori di M

4.4.3 Risultati ed osservazioni

Osservando i grafici in figura 5 si vede la presenza del minimo di r in corrispondenza di un valore di N compreso tra 1500 e 2000 campioni, pari a 12-16 μs . Tale minimo risulta lo stesso in tutti e quattro i grafici ed in particolare:

- dai grafici a), b) e c) si osserva che la posizione del minimo risulta indipendente dal valore di M ;
- dal grafico d) si osserva che, al variare di M , il valore di r non subisce grandi variazioni;
- in linea con la (53) si osserva una rapida crescita di r per valori piccoli di N , legata al termine $\frac{6+k}{N}$;
- il minimo risulta molto appiattito. Ciò è legato al fatto che in questa configurazione si ha prevalenza del rumore DELTA sul rumore STEP ($k \ll 1$)¹¹, anche per effetto del basso numero di ENOB della scheda impiegata ($9.5 < \text{ENOB} < 10$).

Si può quindi dire che il filtro si comporta in linea con le previsioni delle equazioni (40) e (53). Osservando attentamente i grafici si notano anche delle fluttuazioni che sembrano periodiche (in N) nei valori di r . Tali fluttuazioni sono probabilmente dovute al fatto che il filtro forma un segnale limitato nel tempo, ovvero operando in una finestra temporale finita. Poiché la funzione di risposta del filtro ha lunghezza $2N + M$ campioni, esiste una fase transitoria in cui il non tutto segnale convolve con la funzione di risposta. Durante questa fase transitoria potrebbero non essere valide le considerazioni che valgono per un filtro agente da un tempo molto più lungo della sua risposta. Ad esempio, la differenza di fase tra il rumore di bassa frequenza e il segnale formato potrebbe non essere casuale, dando luogo ad un sincronia tra i due che porterebbe delle fluttuazioni sistematiche di r a seconda che il massimo sia ricercato in una zona dove le fluttuazioni di rumore siano più o meno grandi. Questo aspetto non è stato comunque considerato in dettaglio e necessita di ulteriori indagini.

4.5 Misure del deficit balistico

Per quel che riguarda il deficit balistico si cerca di verificare se il sistema si comporta come predetto nel paragrafo 2.6 studiando i valori del massimo per diversi valori dei parametri del filtro, N ed M . Il modello prevede che il valore del massimo non dipenda dai valori di N ed M purché si abbia $M > T_s$. Come accennato in precedenza, non disponendo del segnale di corrente, possiamo solo verificare se il filtro segue il comportamento previsto dall'equazione (43), tenendo conto che all'effetto previsto si va a sommare anche l'eventuale contributo sistematico dovuto al metodo con cui andiamo a trovare il massimo del segnale. Per il test del deficit balistico si sono acquisiti, come per la misura di SNR, vari "run" variando i valori di N ed M . Si è inoltre posto a $4\mu\text{s}$ il tempo di salita del segnale proprio per esaltare gli effetti legati al deficit. Per ogni valore di N (512, 1024, 1536) si è

¹¹Poiché mentre per $N < N_{min}$ il contributo più importante al valore di r è dato da $\langle \text{DELTA}^2 \rangle$, per $N > N_{min}$ diventa più significativo il valore di $\langle \text{STEP}^2 \rangle$. Avendo assunto $k \ll 1$ si ha che $\langle \text{DELTA}^2 \rangle \gg \langle \text{STEP}^2 \rangle$ e dunque le variazioni di r^2 (quindi di r) sono più rapide per $N < N_{min}$ (perché dominate dalle variazioni di $\langle \text{DELTA}^2 \rangle$) e più lente per $N > N_{min}$ (perché dominate dalle variazioni di $\langle \text{STEP}^2 \rangle$)

eseguita una scansione dei valori di M compresi tra 192 e 1024 a passi di 32 e, per ogni acquisizione, si è calcolato il valore medio dell'RBD, utilizzando come y_0 (massimo del segnale formato) il massimo assoluto del segnale formato. Per evitare i problemi legati all'“overshoot” si è preso, come massimo del segnale in ingresso, la media sui primi 50 campioni della zona immediatamente successiva all'“overshoot” stesso.

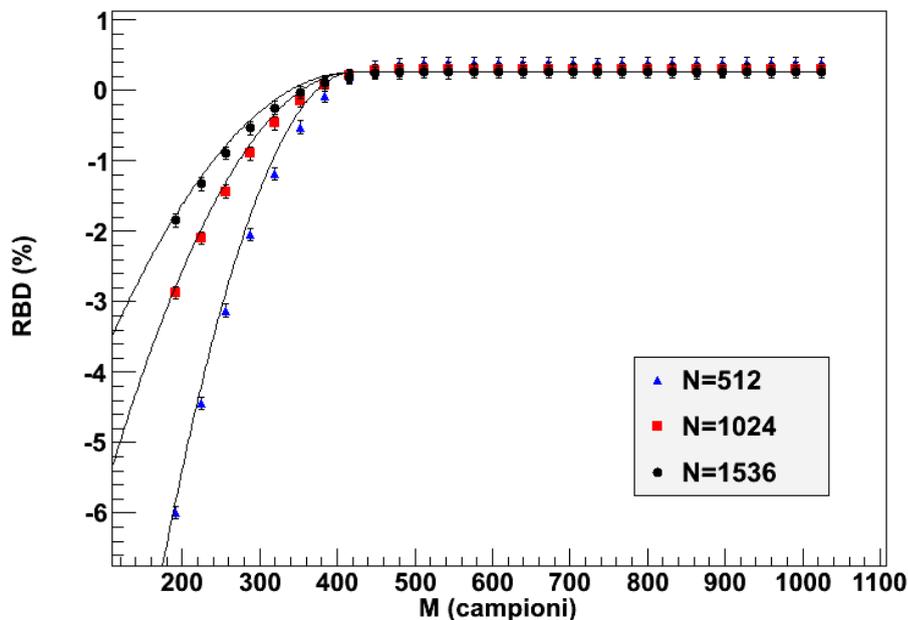


Figura 6: Andamento dell'RBD in funzione di M per tre valori di N . Sono riportate in figura anche le curve ottenute con la simulazione (in nero)

I risultati delle misure sono rappresentati in figura 6 insieme ai dati prodotti da una simulazione in C (curve in nero in figura 6) in cui si è cercato il più possibile di imitare il comportamento del DSP¹². Si osserva che:

- gli andamenti prodotti dalle misure e dalle simulazioni sono tra di loro molto simili;
- in linea con quanto detto nel paragrafo 2.6, per $M > T_s$ il valore del RBD diventa costante ed indipendente da M ed N .

In base ai risultati delle misure eseguite, risulta conveniente ai fini della misura porsi nelle condizioni $M > T_s$, in modo tale che, indipendentemente dal valore di N e di M scelti (purché M soddisfi la condizione), si soddisfino le condizioni di validità dell'equazione (46) e si possano quindi fare misure non affette dal problema del deficit balistico.

¹²Per la simulazione si sono prodotti segnali con una salita lineare di durata simile a quella dei segnali analizzati sul DSP

4.6 Tempo di esecuzione dell'algoritmo

Una problematica che non è stata considerata è quella legata al tempo di esecuzione del filtro. Generalmente, nelle misure di fisica nucleare, si lavora a ritmi superiori ai mille eventi al secondo. Nella realizzazione del filtro non ci siamo preoccupati dell'ottimizzazione del tempo di esecuzione, cercando invece di sfruttare al meglio la precisione del DSP. Il filtro realizzato ha un tempo di esecuzione ($\approx 10\text{ms}$) che lo rende difficilmente utilizzabile ai ritmi di misura tipici di un esperimento. Per velocizzare il filtro si potrebbe ricorrere ad una decimazione del segnale (ad esempio di un fattore 16, che renderebbe l'esecuzione circa 16 volte più rapida). Tale soluzione è già stata utilizzata con successo nei formatori semigaussiani di GARFIELD. Si sfrutta, in questo caso, il fatto che l'informazione di interesse per la misura di energia è contenuta in una banda di frequenza ben più stretta di quella fissata dalla frequenza di campionamento del digitalizzatore.

5 Conclusioni

In base ai risultati delle misure possiamo concludere che le considerazioni di principio formulate per prevedere il comportamento del filtro trapezoidale sono risultate ragionevolmente. Dopo aver controllato, con esito positivo, il funzionamento del filtro e della correzione di polo zero, si è verificata l'esistenza di una condizione ottimale di funzionamento del filtro che, nelle condizioni di test, corrisponde ad un rise-time del trapezio compreso tra 12 e 16 μs . Dal momento che la posizione del minimo di r dipende da k , in diverse configurazioni di misura tale posizione potrà risultare diversa, pur rimanendo indipendente da M . Per quel che riguarda il deficit balistico abbiamo verificato che, con particolari accorgimenti, esso risulta nullo, consentendo quindi misure più accurate.

Il filtro realizzato per questo lavoro di tesi presenta comunque delle criticità che non sono state affrontate, per motivi di tempo, ma costituiranno i primi passi per il proseguimento del lavoro, che potrebbe comprendere:

- introduzione di una decimazione per velocizzare il tempo di esecuzione (par 4.6);
- modifica dell'algoritmo al fine di utilizzare la memoria di programma per alcune variabili (par 3.1.1);
- approfondimento dei problemi legati al metodo di ricerca del massimo (paragrafo 3.3);
- ricerca delle cause delle fluttuazioni nell'andamento del valore di r rispetto ad N (paragrafo 4.4);
- una valutazione dettagliata del tempo di esecuzione, individuando le zone "critiche" del programma;
- esecuzione di misure accurate per evidenziare eventuali comportamenti non lineari del filtro.

In aggiunta a possibili sviluppi del filtro si potrebbero eseguire anche misure su segnali prodotti da rivelatori (e non da pulser) per valutare l'efficacia del filtro in misure su segnali fisici. L'esperienza acquisita nello svolgimento di uesto lavoro di tesi potrebbe impiegata per realizzare un filtro analogo su logica programmabile (FPGA) con la possibilità di operare in modo continuo ed in tempo reale sul segnale in ingresso.

Riferimenti bibliografici

- [1] Pasquali et al.: *A DSP equipped digitizer for online analysis of nuclear detector signals*, Nucl. Instr. and Meth. A 570 (2007) 126-132.
- [2] Bruno et al.: *GARFIELD RCO digital upgrade: A modern set-up for mass and charge identification of HI reaction products*, Eur. Phys. Jour. A 2013 49
- [3] ADSP 218x DSP-Instruction set reference, www.analog.com
- [4] ADSP 218x DSP-Hardware reference, www.analog.com
- [5] A. Oppenheim, W. Schaffer: *Discrete Time Signal Processing 3d ed.*, Prentice Hall Signal Processing, 2008
- [6] G. Poggi: *Appunti sul rumore elettronico*, Università degli studi di Firenze, 2004
- [7] Glenn G. Knoll: *Radiation detection and measurement 3d ed.*, John Wiley & Sons, 2000
- [8] F. Goulding: *Pulse Shaping in Low-Noise nuclear amplifiers*, Nucl. Instr. Meth. 1972 493
- [9] E. Gatti e P.F. Manfredi: *Processing the Signals from Solid-State Detectors in Elementary-Particle Physics*, Rivista del Nuovo Cimento, vol 9 n.1
- [10] B. Loo, F. Goulding, D. Gao: *Ballistic Deficit in Pulse Shaping Amplifiers* IEEE TNS 35-1998-114
- [11] Baldinger, Franzen: *Amplitude measurements in nuclear physics*, Advances in electronics 1956
- [12] DSP ADSP 218x Datasheet, www.analog.com
- [13] F. Giannelli: *Utilizzo di un Digital Signal Processor per l'analisi della forma del segnale generato da un rivelatore di particelle*, Tesi di laurea, Università degli studi di Firenze, A.A. 2000/01
- [14] root.cern.ch
- [15] G. Poggi, L. Bardelli: *Digital-sampling systems in high-resolution and wide dynamic-range energy measurements: Finite time window, baseline effects, and experimental tests*, Nucl. Instr. Meth. A560(2006) 524-538