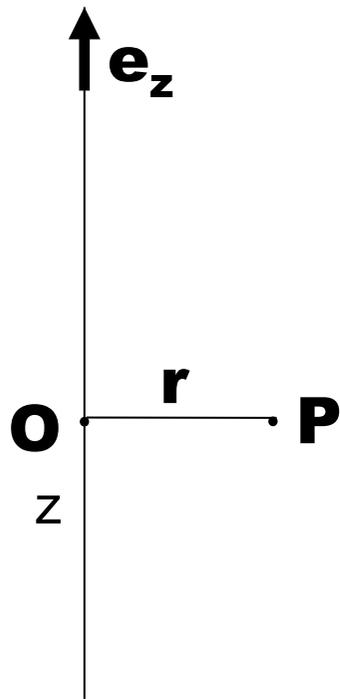

Campo magnetico

- Potenziale vettore
 - Applicazioni della legge di Ampere
 - Discontinuita` del campo magnetico attraverso uno strato di corrente superficiale
 - Doppio strato di corrente superficiale
 - Espansione multipolare del potenziale vettore
-

Esempio: potenziale vettore del campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente

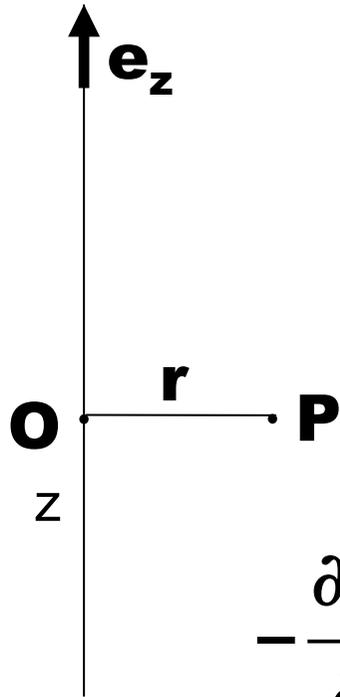


$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

In coordinate cilindriche

$$B_\varphi = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

Tilo rettilineo percorso da corrente



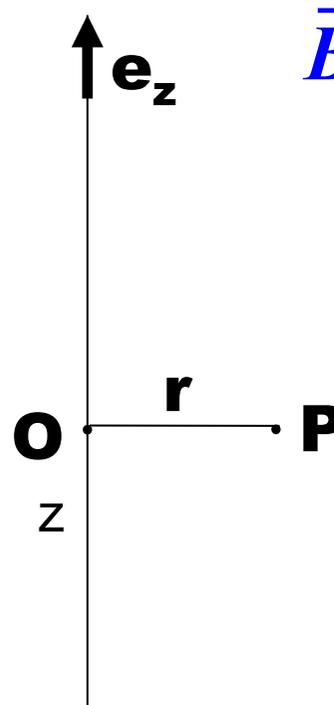
$$B_\varphi = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

Prendendo $\vec{A} = A(r)\vec{e}_z$

$$-\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \Rightarrow A(r) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r = -\frac{\mu_0 i}{\pi} \ln r^2$$

Esempio: filo rettilineo percorso da corrente

- Abbiamo visto che



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{-\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y}{x^2 + y^2}$$

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 i}{\pi} \ln(x^2 + y^2) \vec{e}_z$$

a meno di un campo con rotore nullo
singolare all'infinito e nell'origine

Esempio: solenoide rettilineo indefinito

- Campo magnetico diretto lungo l'asse del solenoide
- **Fuori** dal solenoide

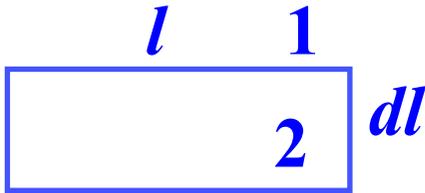
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$$

all'infinito il campo
tende a zero

$$\vec{B} = \text{cost} = 0$$

Esempio: solenoide rettilineo indefinito

- Solo componente assiale
- Fuori dal solenoide $\vec{B} = \text{cost} = 0$

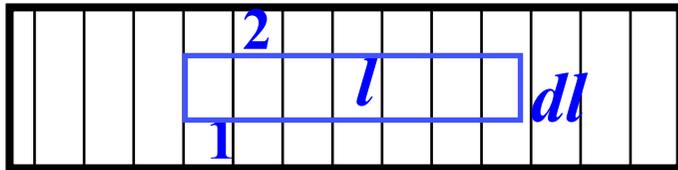


Non c'è corrente concatenata per cui la circuitazione è nulla



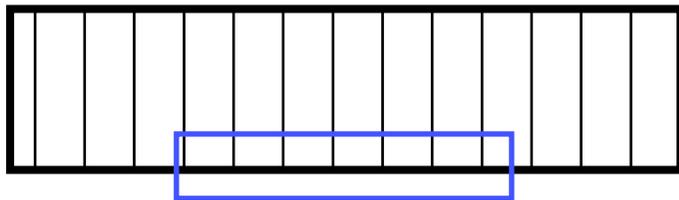
$$B_1 l - B_2 l = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2$$

Esempio: solenoide rettilineo indefinito



$$B_1 l - B_2 l = 0$$

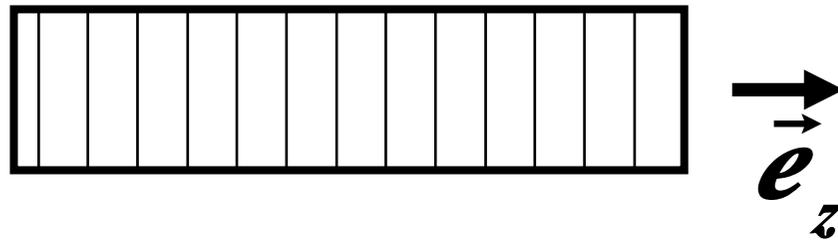
$\Rightarrow B_1 = B_2$ Campo uniforme all' interno



$$B_{\text{int}} l = \mu_0 \sum_{k \text{ conc}} i_k = \mu_0 n l i$$

$$B_{\text{int}} = \mu_0 n i$$

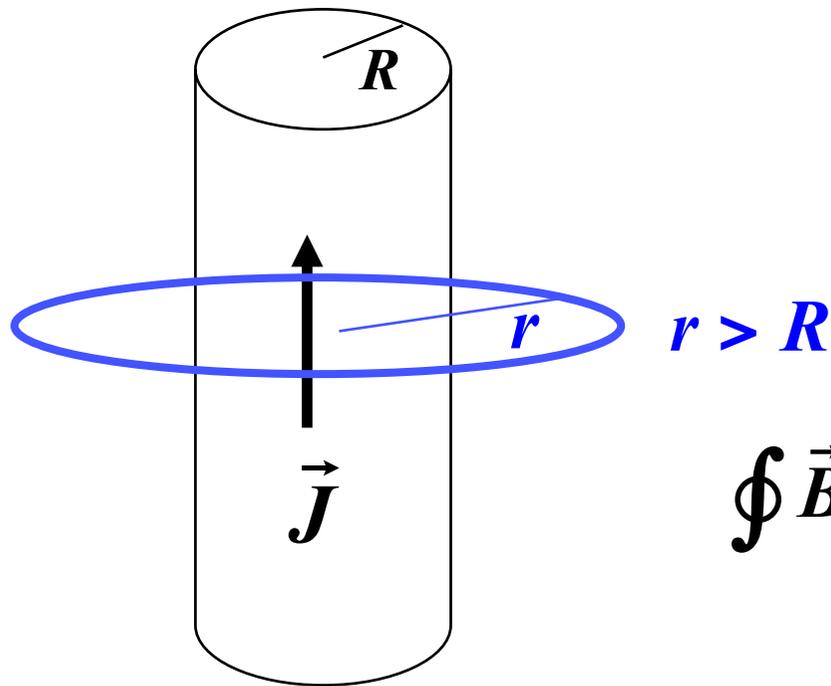
Discontinuita` del campo del solenoide rettilineo indefinito



$$\vec{B}_{\text{est}} - \vec{B}_{\text{int}} = 0 - \mu_0 i n \vec{e}_z$$

$$\Delta \vec{B} = \pm \mu_0 i n \vec{e}_z$$

Esempio: cilindro percorso da una corrente i omogenea



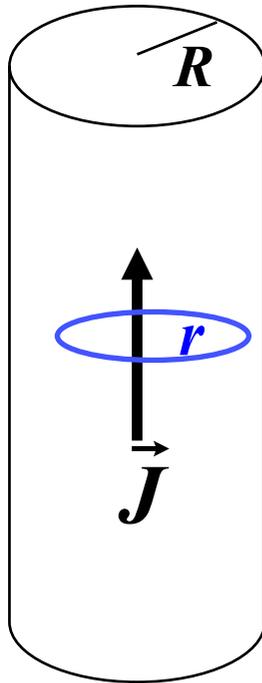
lunghezza indefinita

$$J = \frac{i}{\pi R^2}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 i$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Esempio: cilindro percorso da una corrente i omogenea



lunghezza indefinita

$$J = \frac{i}{\pi R^2}$$

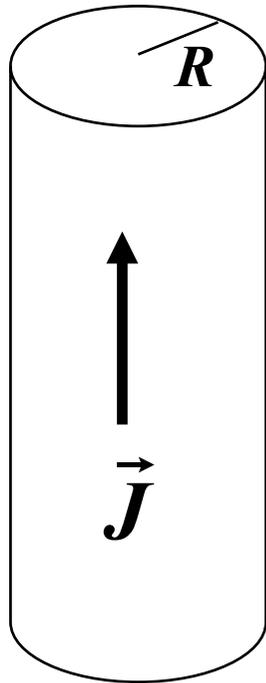
$r < R$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 i_{\text{conc}}$$

$$i_{\text{conc}} = J \pi r^2 = \frac{i}{\pi R^2} \pi r^2 = i \frac{r^2}{R^2}$$

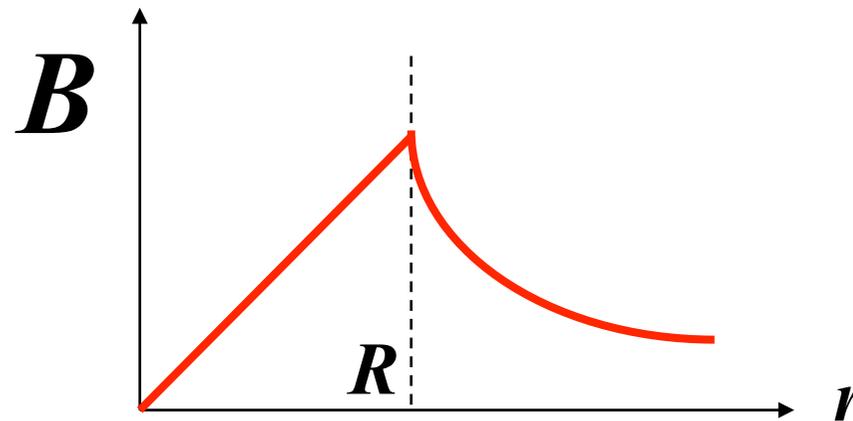
$$2\pi r B(r) = i \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}$$

Esempio: cilindro percorso da una corrente i omogenea

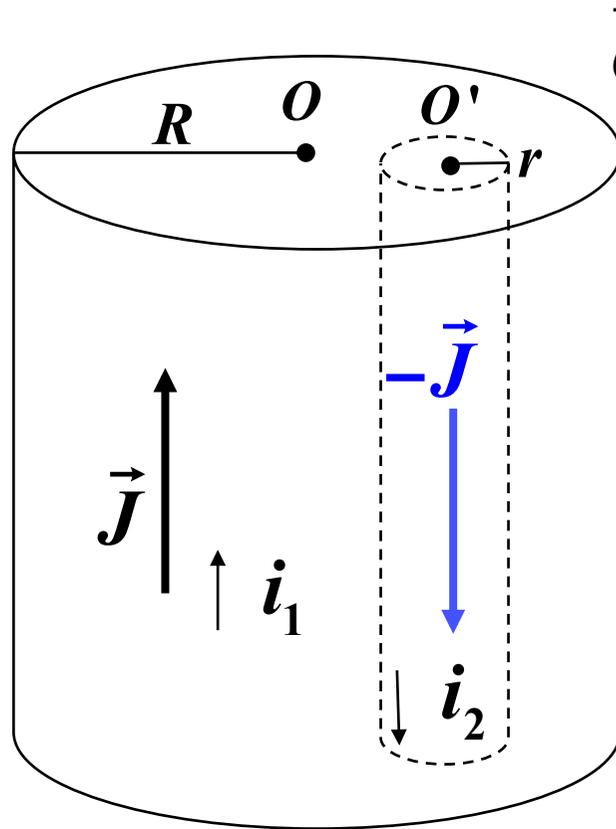


lunghezza indefinita

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2} & r \leq R \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$



Esempio: cilindro indefinito con foro interno cilindrico

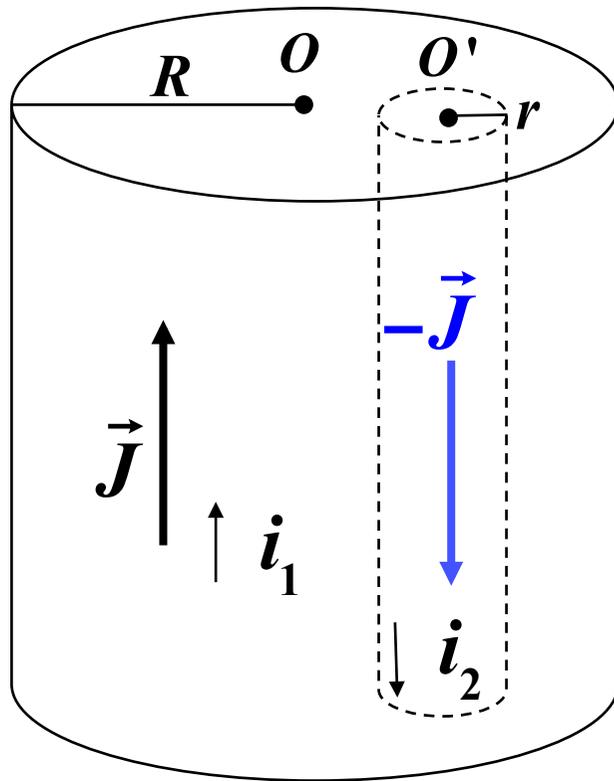


$\overline{OO'} = d$ Campo asse cavita` ?

$$J = \frac{i}{A} = \frac{i}{\pi R^2 - \pi r^2}$$

$$\uparrow i_1 = \pi R^2 J \quad \downarrow i_2 = \pi r^2 J$$

Esempio: cilindro indefinito con foro interno cilindrico



$$\overline{OO'} = d$$

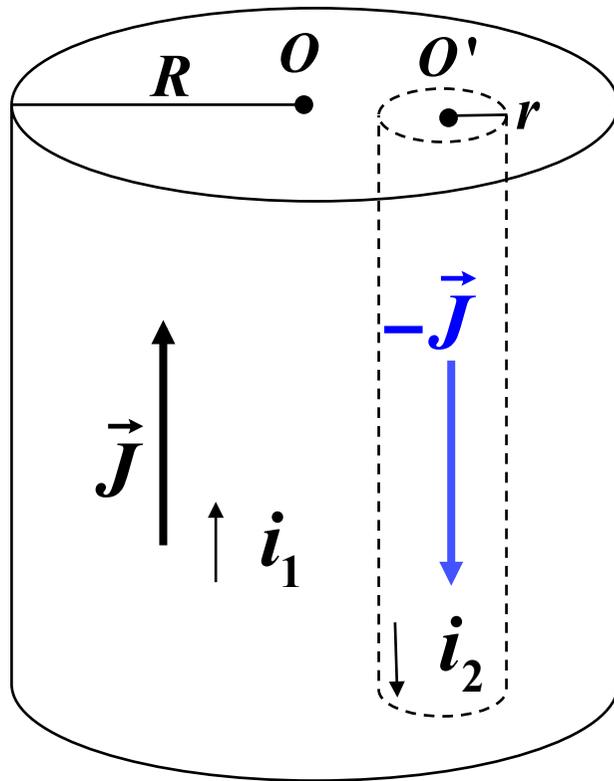
$$\uparrow i_1 = \pi R^2 J \quad \downarrow i_2 = \pi r^2 J$$

$\downarrow i_2$ non contribuisce

$$\uparrow i_1 \quad B = \frac{\mu_0 i_1 \overline{OO'}}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 i_1 d}{2\pi R^2}$$

$$= \frac{\mu_0 \cancel{\pi R^2} J d}{2\pi \cancel{R^2}} = \frac{\mu_0 \cancel{\pi} \cancel{R^2} J d}{2\pi \cancel{R^2} - \pi r^2} d$$

Esempio: cilindro indefinito con foro interno cilindrico



$$\overline{OO'} = d$$

$$\uparrow i_1 = \pi R^2 J \quad \downarrow i_2 = \pi r^2 J$$

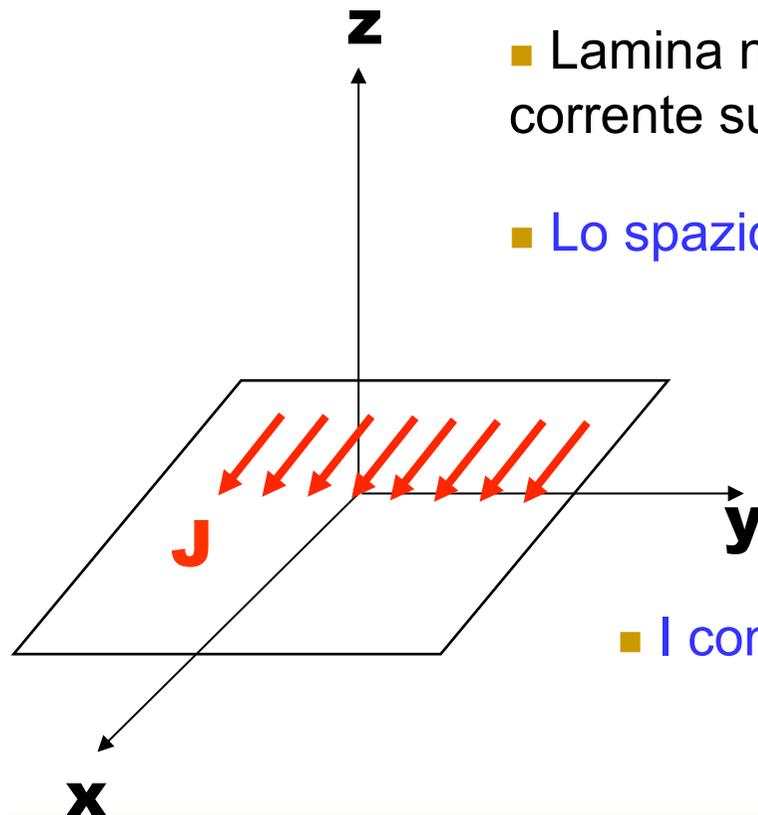
$$\downarrow i_2 \text{ non contribuisce}$$

$$\uparrow i_1 \quad B = \frac{\mu_0 i_1 \overline{OO'}}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 i_1 d}{2\pi R^2}$$

$$= \frac{\mu_0 \cancel{\pi R^2} J d}{2\pi \cancel{R^2}} = \frac{\mu_0 i d}{2\pi (R^2 - r^2)}$$

Discontinuita` del campo B

- In certe situazioni il campo magnetico non e` rappresentabile da una funzione vettoriale derivabile



- Lamina nel piano xy percorsa da una corrente superficiale omogena $\vec{J} = J\vec{e}_y$

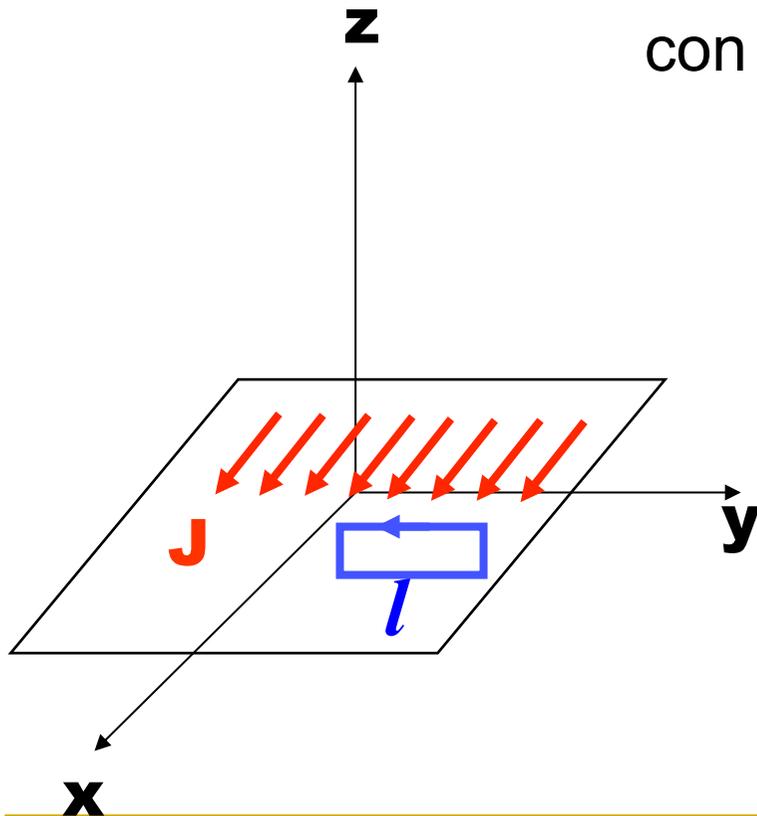
- Lo spazio e` diviso in 2 regioni, $z > 0$ e $z < 0$

- Biot e Savart: **B** perpendicolare alle correnti $\Rightarrow B_x = 0$

- I contributi lungo z da $y > 0$ e $y < 0$ si elidono $\Rightarrow B_z = 0$

Discontinuita` del campo B

- Unica componente diversa da zero: B_y
 - Circuitazione lungo un rettangolo con lato l che taglia la corrente

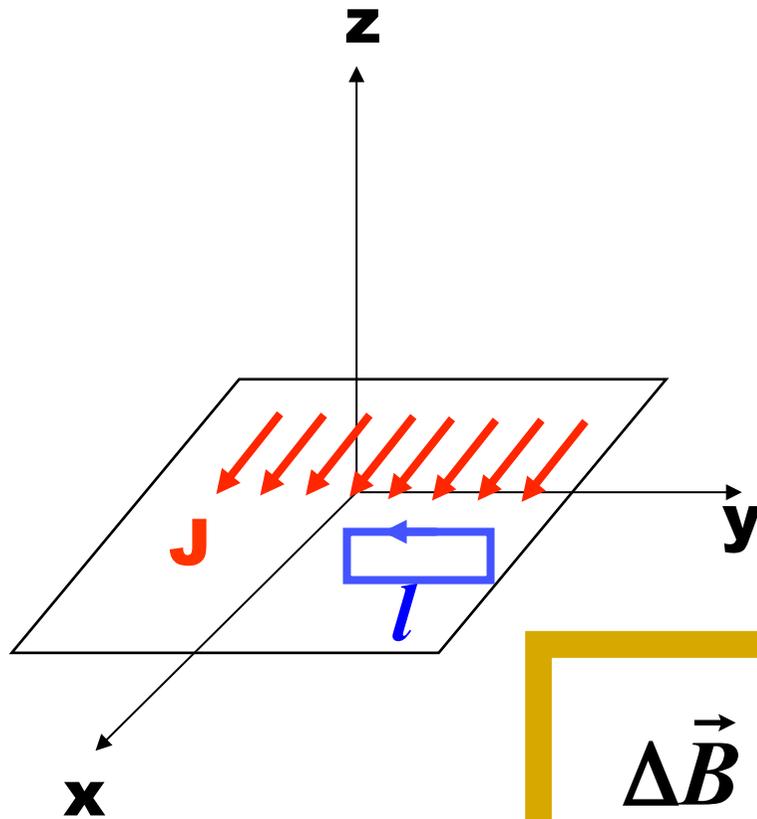


$$Bl + (-B)(-l) = \mu_0 J l$$

$$2Bl = \mu_0 J l$$

$$B = \frac{\mu_0 J}{2}$$

Discontinuita` del campo B

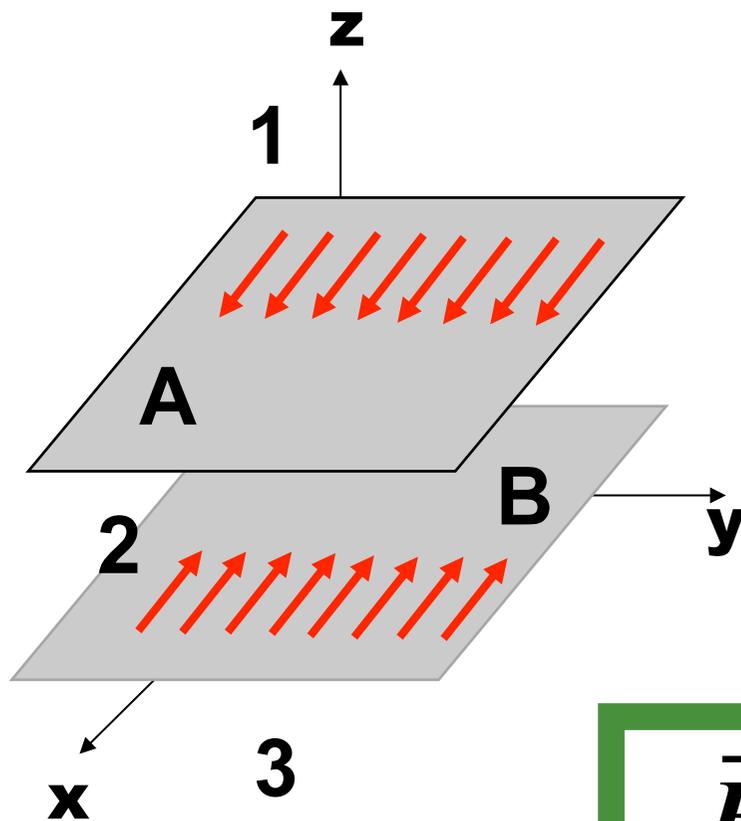


$$\vec{B}(z_+) = -\frac{\mu_0 J}{2} \vec{e}_y$$

$$\vec{B}(z_-) = \frac{\mu_0 J}{2} \vec{e}_y$$

$$\Delta \vec{B} = \vec{B}(z_+) - \vec{B}(z_-) = \mu_0 J \vec{e}_y$$

Esempio: doppio strato



Le due lamine danno contributi di segno opposto al campo

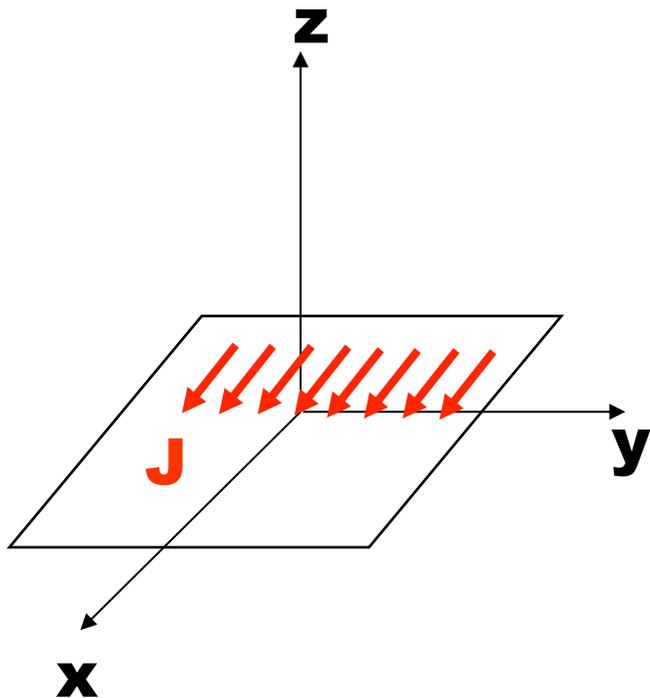
$$\vec{B}_{1,3}(A) = -\vec{B}_{1,3}(B) \Rightarrow \vec{B}_{1,3} = 0$$

$$\Delta \vec{B} = \overset{=0}{\vec{B}_1} - \vec{B}_2 = -\mu_0 \vec{J} e_y$$

$$\vec{B}_2 = -\Delta \vec{B} = \mu_0 \vec{J} e_y$$

Discontinuita` del campo B

- Lamina nel piano xy percorsa da una corrente superficiale omogenea $\vec{J} = J\vec{e}_x$



- Lo spazio e` diviso in 2 regioni, $z>0$ e $z<0$

$$\Delta\vec{B} = \vec{B}(z_+) - \vec{B}(z_-) = \mu_0 J\vec{e}_y$$

Discontinuita` della componente **tangenziale** del campo magnetico

Nel caso di una distribuzione superficiale di carica elettrica la discontinuita` e` nella componente **normale** del campo elettrico

Espansione multipolare

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\int \vec{J}(\vec{r}') dV' \rightarrow i \oint_C dl'$$

Circuito chiuso

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Espansione multipolare

- Corrente in un circuito chiuso di dimensioni lineari d
- Potenziale vettore a grande distanza $r \gg d$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \vec{r}' \cdot \vec{\nabla}' \left. \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} + \dots = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} d\vec{r}' = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \oint_C \vec{e}_r \cdot \vec{r}' d\vec{r}'$$

Espansione multipolare

$$\oint_C f d\vec{r} = - \int_{\Sigma_C} \vec{\nabla} f \times \vec{n} dA$$

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \oint_C \vec{e}_r \cdot \vec{r}' d\vec{r}'$$

$$= - \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \int_{\Sigma} \vec{\nabla}' (\vec{e}_r \cdot \vec{r}') \times \vec{n} dA$$

$$= - \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \vec{e}_r \times \int_{\Sigma} \vec{n} dA = - \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \vec{e}_r \times \vec{m}$$

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \vec{m} \times \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$