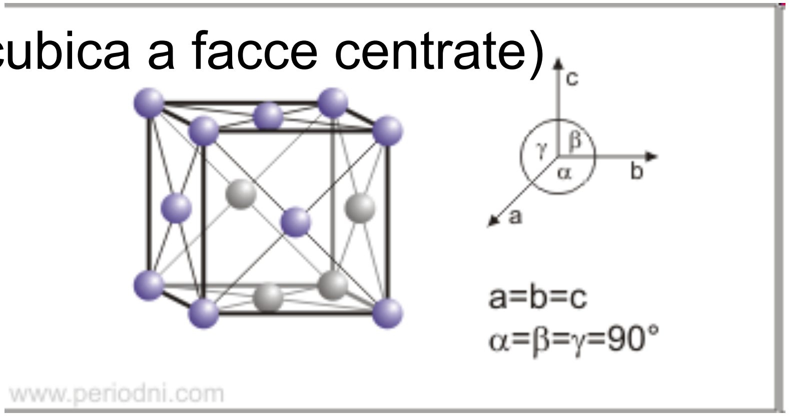
Corrente elettrica (regime stazionario)

- Metalli
- Corrente elettrica
- Legge di Ohm
- Resistori
- Collegamento di resistori
- Generatori di forza elettromotrice

Metalli

- Struttura cristallina: ripetizione di unita` fondamentali
- Ioni “fissi”+elettroni di conduzione

(cubica a facce centrate)



a=3.6151 x 10^{-10} m

Rame: 1 e di conduzione / atomo

ρ= 8.96 g cm^{-3} = 8960 kg m^{-3} (T=20^{0}C)

A=63.55

elettroni conduzione / volume

$$\frac{\rho[g/m^3]}{A} \times N_A = \frac{8960 \times 10^3}{63.55} \times 6 \times 10^{23} \simeq 8.5 \times 10^{28}\ m^{-3}$$

Moto degli elettroni

- Moto disordinato (termico)
- Interazione elettrone-ione ("urto")
- Interazione elettrone-elettrone trascurabile
- "Gas" di elettroni

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} m < v^2 > = \frac{3}{2} k_B T \\ \\ m = 9.1\ 10^{-31}\ \text{kg} \\ k_B = 1.38\ 10^{-23}\ \text{JK}^{-1}\text{mole}^{-1} \end{array}\right\}$$

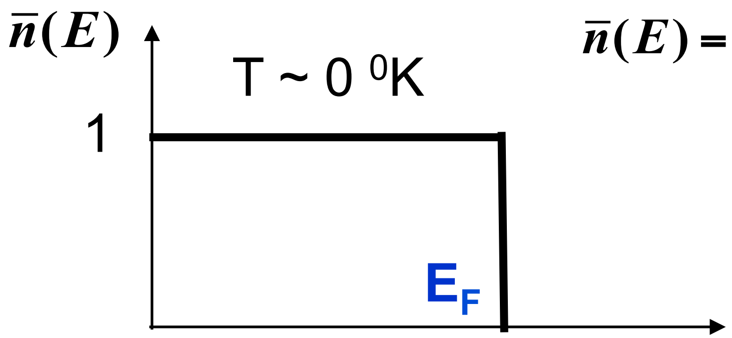
$$\bar{v} \equiv \sqrt{< v^2 >} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{2E_T}{m}}$$

$$\approx \sqrt{\frac{3 \cdot 1.4 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9 \cdot 10^{-31}}} = 1.2 \cdot 10^5\ \text{m/s}$$

sbagliata di ~ 1 ordine di grandezza
(Energia media 2 ordini di grandezza)

Moto degli elettroni

- Necessaria la meccanica quantistica
- Potenziale medio in cui si muovono gli elettroni + principio di esclusione di Pauli
- Energia di Fermi E_F: energie elettroni tra E_{min} ed E_F (E_F = max energia occupata allo zero assoluto)



$$\bar{n}(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1}$$

$$E_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3} \sim 1.7 \text{ eV}$$

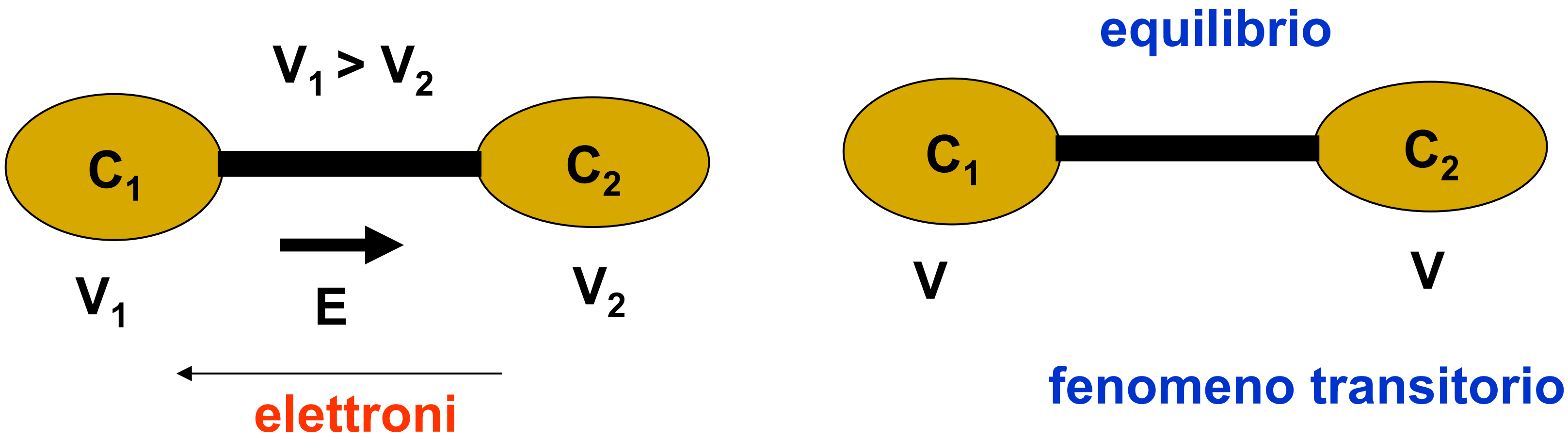
Moto degli elettroni

- Necessaria la meccanica quantistica
- Potenziale medio in cui si muovono gli elettroni + principio di esclusione di Pauli
- Energia di Fermi E_F: energie elettroni tra E_{min} ed E_F (E_F = max energia occupata allo zero assoluto)

$$E_F \sim 50 - 100\ E_{Termica}$$

$$\boxed{V_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} \sim 10^6\ ms^{-1}}$$

Conduzione elettrica nei metalli



corrente elettrica = moto ordinato di elettroni tra i due conduttori in una direzione definita

Per mantenere la corrente elettrica e` necessario un dispositivo in grado di mantenere una differenza di potenziale diversa da zero tra due punti di uno stesso conduttore (o di conduttori a contatto)

Generatore di f.e.m.

Conduzione elettrica

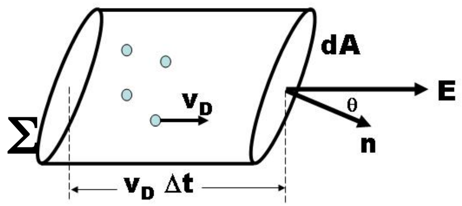
- Nei gas (ionizzati) – portatori $\pm$
- Nei liquidi (soluzioni elettrolitiche) – portatori $\pm$
- Nei semiconduttori - portatori $\pm$
- **Nei metalli**
  - moto dei portatori di carica ostacolato dalle interazioni con il mezzo in cui si muovono (→ **resistenza elettrica**)
- Superconduttivita`

Corrente elettrica

Cariche elettriche in un conduttore in moto sotto l'azione di un campo elettrico. Tracciata una superficie Σ nel conduttore, l'intensita` di corrente **i** e` definita come la quantita` di carica Δq che passa attraverso Σ nel tempo Δt.

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Prendiamo le cariche positive: si muovono con velocita` di deriva $\mathbf{v}_D$



$$\Delta q = n_+ e dV = n_+ e \mathrm{v}_D \, dA \cos\theta \Delta t$$

$$di = n_+ e \mathrm{v}_D \, dA \cos\theta = \vec{J} \cdot \vec{n} dA$$

$$\vec{J} \equiv n_+ e \vec{\mathrm{v}}_D = \rho \vec{\mathrm{v}}_D$$

$$dV = \mathrm{v}_D \Delta t \cdot dA \cos\theta$$

n_+ cariche per unita` di volume

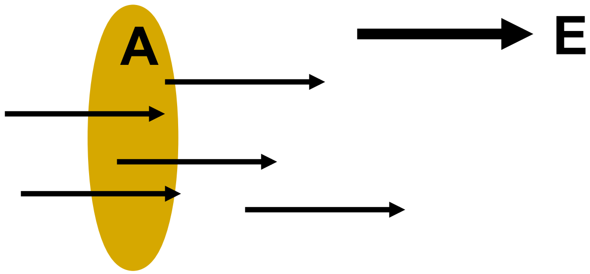
$$\boxed{i = \Phi_\Sigma(\vec{J}) = \int_\Sigma \vec{J} \cdot \vec{n} \, dA}$$

Corrente elettrica

- Densita` di corrente $\vec{J}$

  - Quantita` di carica elettrica che attraversa l'unita` di superficie perpendicolare al moto delle cariche per unita` di tempo

  = Corrente che attraversa l'unita` di superficie perpendicolare al moto delle cariche



$$i = JA \quad (\vec{J} // \vec{n})$$

$$[i] = \frac{[Q]}{T} = \frac{C}{s} = A \qquad [J] = \frac{A}{m^2}$$

Corrente elettrica

- Se sono presenti cariche positive e negative

$$\vec{J} = n_+ e\vec{v}_+ - n_- e\vec{v}_-$$

  - entrambi i termini sono concordi
  - hanno la direzione e verso del campo elettrico

- Su scala macroscopica non si puo` correlare il verso della corrente al segno dei portatori di carica
- Covenzionalmente: corrente=verso delle cariche + (da potenziale > a potenziale <).

Conservazione della carica

Attraverso una **superficie chiusa**

$$i = \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n}\, dA = -\frac{\partial q_{\text{interna}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{\Sigma}} \rho\, dV$$

flusso totale **uscente** dalla superficie

se il flusso uscente e` positivo
la carica interna diminuisce e

$$\frac{\partial q_{\text{interna}}}{\partial t} < 0$$

Teorema della divergenza

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

equazione di continuita`

Regime stazionario

$$\frac{\partial q_{\text{interna}}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0}$$

La densita` di corrente e` solenoidale.

(la corrente puo` dipendere dal tempo, ma la carica che entra per unita` di tempo e` uguale a quella che esce – tempo variab. corrente << d/c)

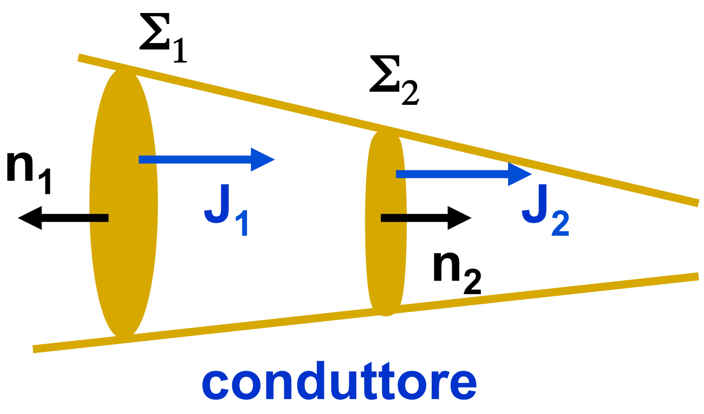
regime stazionario

$$\boxed{\Phi_{\Sigma}(\vec{J}) = \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n}\, dA = 0}$$

superficie chiusa

Regime stazionario

$$\frac{\partial q_{\text{interna}}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0}$$



In un conduttore J differisce da zero solo all'interno

E` nulla la componente ortogonale alla superficie (dalle pareti laterali non esce carica)

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n}\, dA = \oint_{\Sigma_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{n}_1\, dA + \oint_{\Sigma_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{n}_2\, dA = 0$$

$$\oint_{\Sigma_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{n}_1\, dA + \oint_{\Sigma_2} \vec{J}_2 \cdot (-\vec{n}_1)\, dA = 0 \qquad i_1 = i_2$$

La corrente e` la stessa in ogni sezione trasversale

Legge di Ohm

- Gas di elettroni (modello di Drude)
- Moto disordinato (agitazione termica)
- Campo elettrico ➔ moto disordinato + deriva

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{urto}} - \frac{e\vec{E}}{m}t$$

$$<\vec{\mathbf{v}}> \; = \; <\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{urto}}> - \frac{e\vec{E}}{m}<t> \; = \; -\frac{e\vec{E}}{m}\tau \; \equiv \; \vec{\mathbf{v}}_D$$

Legge di Ohm

$$\vec{v}_D = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$$

(simile al moto viscoso)

$$\boxed{\vec{J} = -ne\vec{v}_D = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} = \sigma\vec{E}}$$

Legge di Ohm

conduttivita`

$$\vec{v}_\pm = \pm\frac{e\tau_\pm}{m_\pm}\vec{E}$$

in generale:

$$\vec{J} = ne\vec{v}_+ - ne\vec{v}_- = ne^2\left(\frac{\tau_+}{m_+} + \frac{\tau_-}{m_-}\right)\vec{E}$$

$$\sigma = ne^2\left(\frac{\tau_+}{m_+} + \frac{\tau_-}{m_-}\right)$$

Legge di Ohm

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad \vec{E} = \rho \vec{J}$$

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma}}$$

resistivita`

Potenza spesa dalla forza per mantenere la carica in moto con velocita` $\mathbf{v}_D$

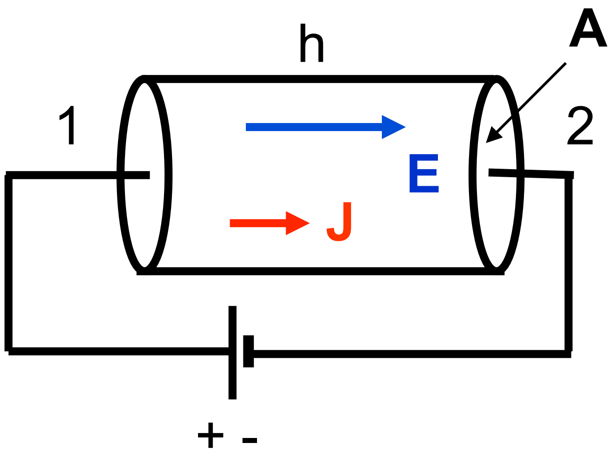
$$P = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{v}}_D = e\vec{E} \cdot \vec{\mathrm{v}}_D$$

per unita` di volume

$$\boxed{\frac{dP}{dV} = ne\vec{E} \cdot \vec{\mathrm{v}}_D = \vec{J} \cdot \vec{E} = \begin{cases} \sigma E^2 \\ \rho J^2 \end{cases}}$$

Energia trasferita agli ioni del reticolo cristallino. Aumento energia interna. Aumento temperatura.

Legge di Ohm



Regime stazionario: $J = \dfrac{i}{A}$

$$V_1 - V_2 = V = Eh = \rho J h = \frac{\rho h}{A} i$$

$$\boxed{V = Ri \qquad R = \frac{\rho h}{A}}$$

$$R = \int_1^2 \frac{\rho\, dh}{A}$$

Resistenza elettrica $1\Omega = \dfrac{1V}{1A}$

$G = \dfrac{1}{R}$ conduttanza

Alcune considerazioni

- Anche in assenza di un campo elettrico (= deriva collettiva) esiste una corrente elettrica fluttuante in modo casuale (fluttuazione statistica del vettore somma delle velocita` degli elettroni)
- Questa corrente fluttuante e` una sorgente di "rumore"
- Pone un limite alla rivelazione di segnali elettrici molto deboli

Limitazioni della legge di Ohm

- Supponiamo il campo elettrico molto intenso, in modo tale che uno ione tra due urti acquisti una velocita` $\mathbf{v} \sim <\mathbf{v}>_{\text{termica}}$
- Il tempo medio tra due urti non e` piu` costante: $\tau=\tau(E)$ – non c'e` piu` linearita`
- Esempio: gas debolmente ionizzato
- Cammino libero medio $\lambda \sim 10^{-8}$ m
- $eE\lambda \sim kT$ ➔ $E \sim kT/e\lambda$ $\quad \dfrac{1.38 \cdot 10^{-24} \cdot 300}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-8}} \approx 0.26 \cdot 10^{6} \ \dfrac{\text{V}}{\text{m}}$

Limitazioni della legge di Ohm

- Se il **campo e` molto intenso** puo` anche variare il numero dei portatori di carica (es. scarica in un gas)
- Alternativamente, se il **campo elettrico varia su una scala temporale molto breve**, paragonabile a τ, la risposta dei portatori sara` come quella di corpi liberi (inerziale)

Legge di Ohm. Effetti termici.

$$\boxed{\rho = \rho_{20^0}\left[1 + \alpha\left(t - 20^0\right)\right]}$$

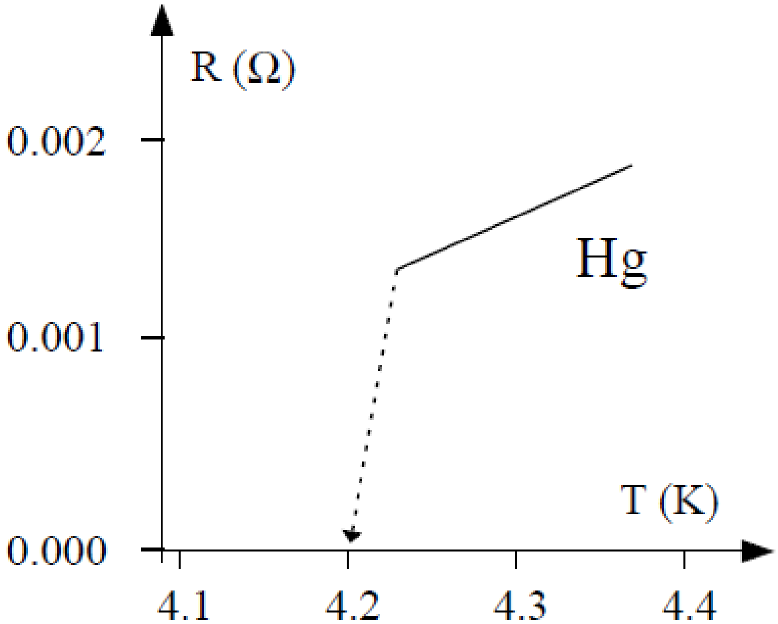
α = coefficiente termico

- $\alpha > 0$ per i metalli puri
- $\alpha < 0$ per C, Ge, Si (nei semiconduttori diminuisce ~ $e^{T/T0}$)
- Normalmente nei metalli: $\rho(T) \rightarrow \rho_0$ per $T \rightarrow 0$
- Superconduttori: $\rho(T) \rightarrow 0$ per $T<T_c$

Resistivita` e coefficiente termico di alcune sostanze

Sostanza	Resistività ($\Omega \times m$)	Coefficiente termico ($^{\circ}C^{-1}$)
Ag	$1.59 \cdot 10^{-8}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$
Cu	$1.67 \cdot 10^{-8}$	$6.8 \cdot 10^{-3}$
Al	$2.65 \cdot 10^{-8}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$
Fe	$9.71 \cdot 10^{-8}$	$6.5 \cdot 10^{-3}$
C (grafite)	$1.38 \cdot 10^{-5}$	$-0.5 \cdot 10^{-3}$
Ge	0.46	$-48 \cdot 10^{-3}$
Si	$2.3 \cdot 10^{3}$	$-75 \cdot 10^{-3}$
Acqua	$2 \cdot 10^{5}$	
Vetro	$10^{10} \div 10^{14}$	

Superconduttori



Omnes, 1911

Mercurio

a T=4.2 K la resistenza R crolla da 0.12 a 10^{-5} Ohm

Alla transizione i campi magnetici non penetrano nel materiale (diamagnetismo perfetto). Fenomeno quantistico. Per spessori sottili i campi magnetici entrano e distruggono localmente la supercoduttivita`.

Effetto Joule

- Potenza spesa per fare circolare una corrente i in un conduttore di sezione A e lunghezza dh

$$dP = \frac{dP}{dV}dV = \frac{\rho i^2}{A^2}A\,dh = \rho\frac{dh}{A}i^2 = (dR)i^2$$

- Integrando su tutta la lunghezza

$$P = i^2\int\rho\frac{dh}{S} = Ri^2$$

$$\boxed{P = Ri^2 = Vi = \frac{V^2}{R}}$$

Effetto Joule

- La potenza dissipata produce un aumento della temperatura del conduttore
- Nell'intervallo di tempo tra t_1 e t_2 viene speso il lavoro

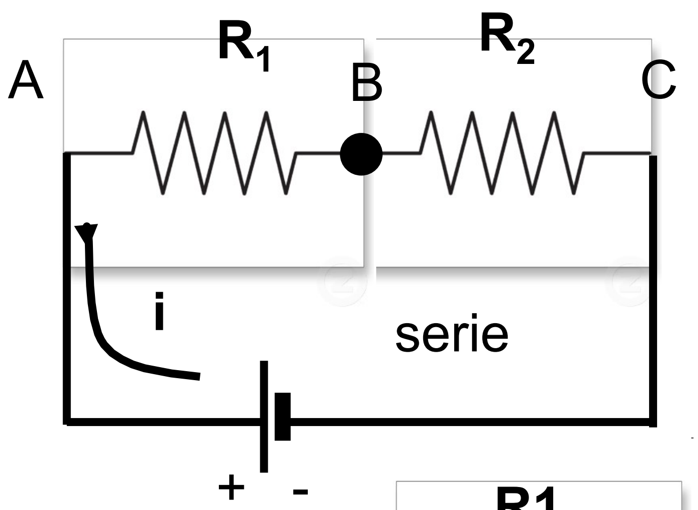
$$W = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2\, dt$$

se la corrente e` costante: $W = Ri^2(t_2 - t_1) = Ri^2 \Delta t$


BLINKY


brest.en.alibaba.com

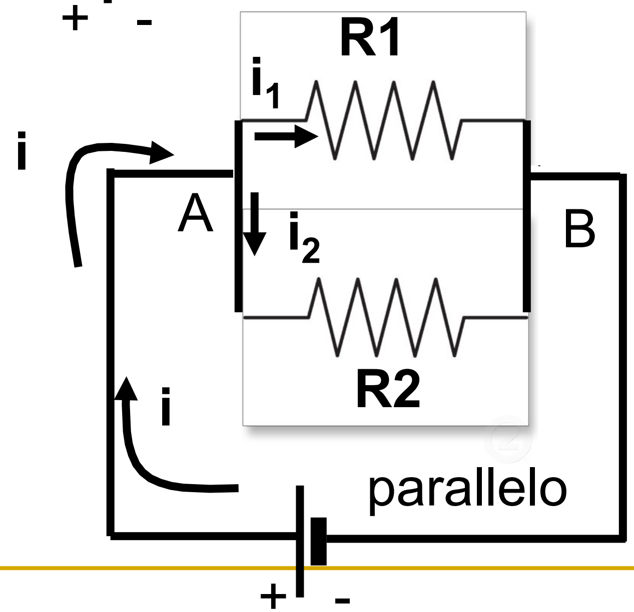
Serie e parallelo di resistori



$$V_A - V_B = R_1 i$$

$$V_B - V_C = R_2 i$$

$$V_A - V_C = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i = R i$$



$$i = i_1 + i_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

$$i = \frac{V}{R}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Collegamento di resistori

- n resistori in serie:

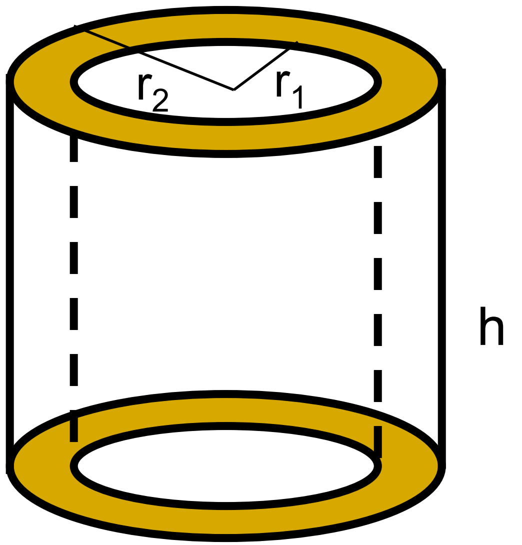
$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

- n resistori in parallelo:

$$\boxed{R^{-1} = \sum_{i=1}^{n} R_i^{-1}}$$

Esempio

- Cilindro di altezza h, raggio r_2 con foro coassiale di raggio r_1: resistenza tra le 2 superficie?



$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Settore cilindrico di raggio r, spessore dr

$$dR = \rho \frac{dr}{A} = \rho \frac{dr}{2\pi r h}$$

Settori in serie ➔ somma delle resistenze

$$R = \int dR = \frac{\rho}{2\pi h} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Esempio

- Tra due sfere di raggi r_1 e r_2 vi e` un fluido con resistivita` ρ. Calcolare la resistenza.

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Settore sferico di raggio r, spessore dr

$$dR = \rho \frac{dr}{A} = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}$$

Settori in serie ➔ somma delle resistenze

$$R = \int dR = \frac{\rho}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Forza elettromotrice

- Legge di Ohm per un conduttore di resistenza R nel tratto AB

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = Ri$$

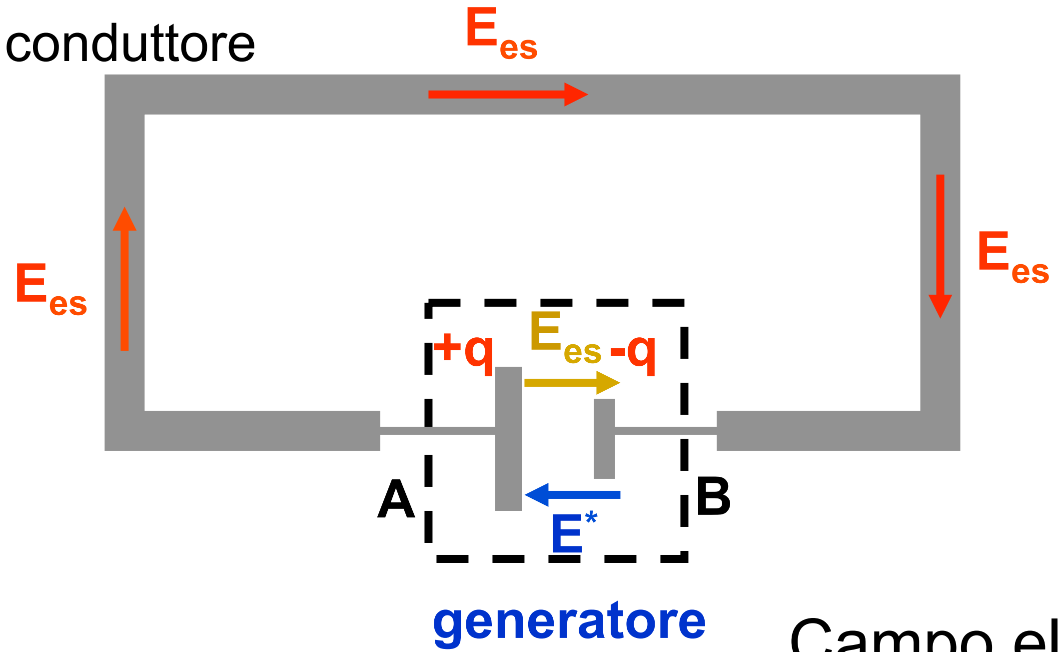
- Per un circuito **chiuso**

resistenza totale

$$f.e.m. = \varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = R_T i \neq 0$$

➡ **non** puo` essere un **campo elettrostatico** a fare circolare le cariche

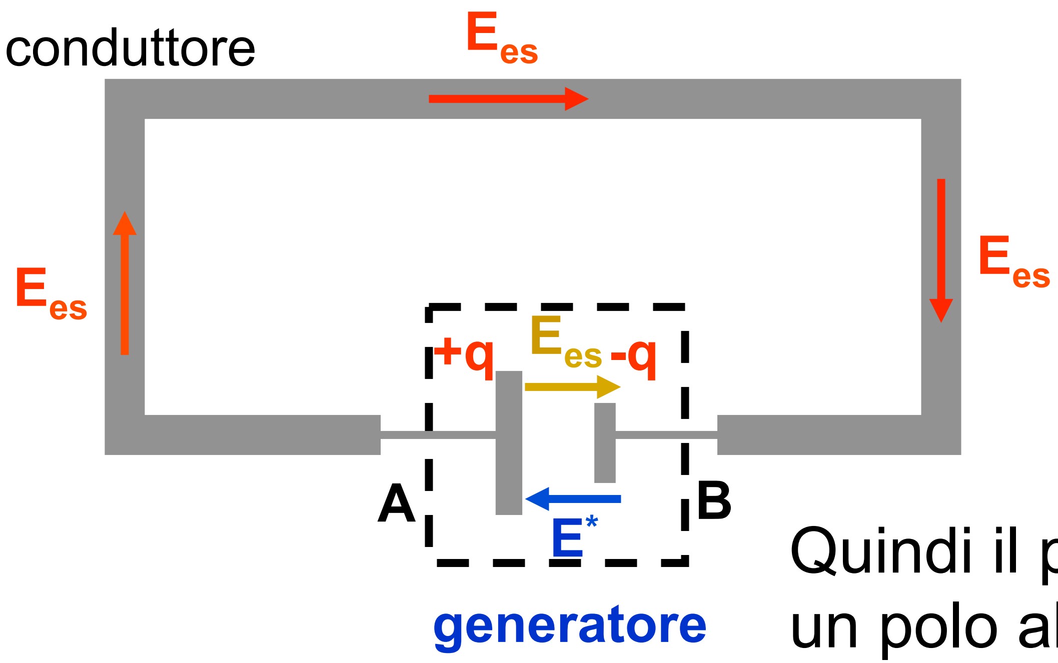
Generatori di f.e.m.



Campo elettrostatico $\mathbf{E}_{es}$ diretto da A a B sia **ext** che **int**

$$\oint \vec{E}_{es} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (\vec{E}_{es} \cdot d\vec{r})_{ext} + \int_B^A (\vec{E}_{es} \cdot d\vec{r})_{int} = 0$$

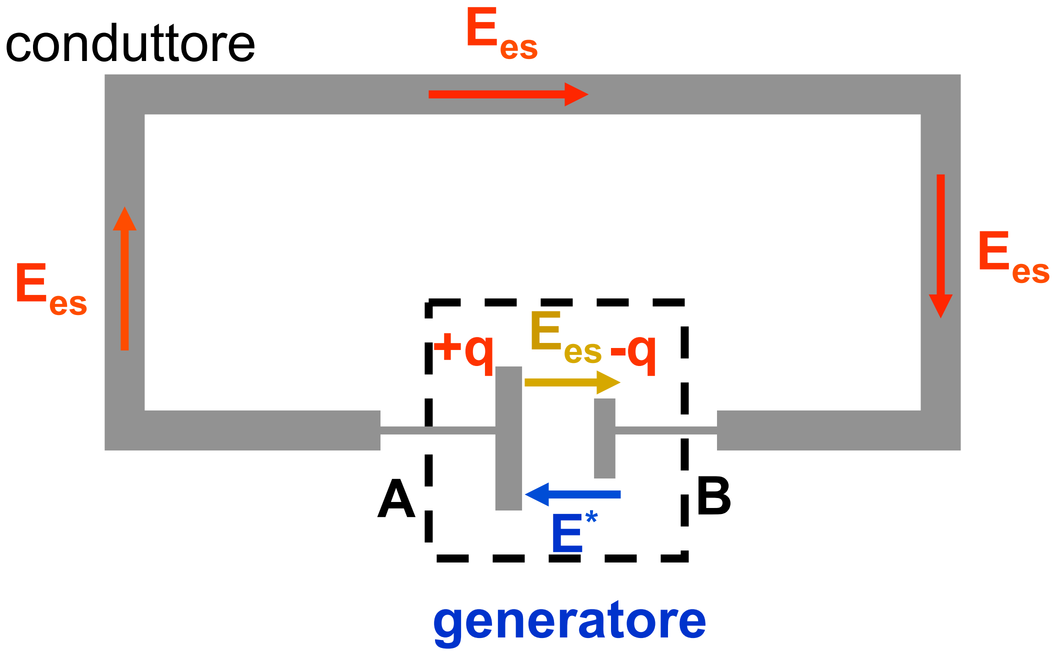
Generatori di f.e.m.



Quindi il passaggio di carica da un polo all'altro **non** puo` avvenire per effetto di $\mathbf{E}_{es}$

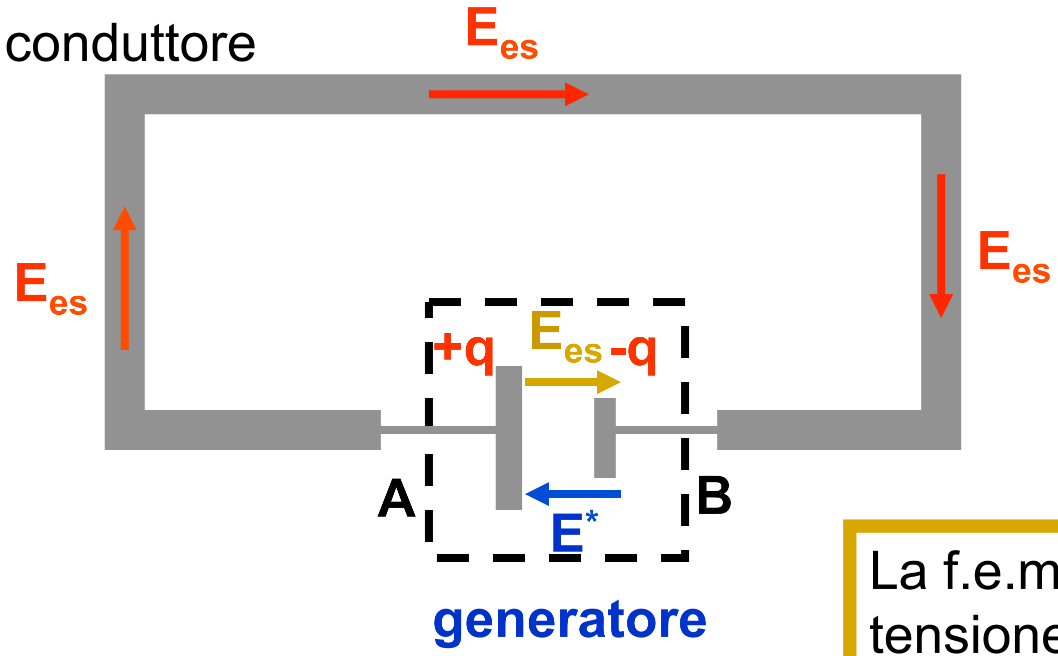
Deve esistere un campo elettromotore di natura non elettrostatica all'interno del generatore: $\mathbf{E}^*$

Generatori di f.e.m.



$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}^* + \vec{E}_{es} & \text{all'interno del generatore} \\ \vec{E}_{es} & \text{all'esterno del generatore} \end{cases}$$

Generatori di f.e.m.



$$\varepsilon = \int_B^A \vec{E}^* \cdot d\vec{r}$$

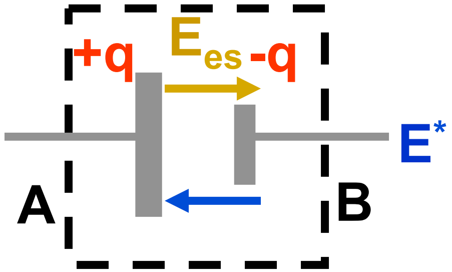
caratteristica del generatore

La f.e.m. di **E** coincide con la tensione del campo elettromotore **E*** calcolata tra B e A

f.e.m.

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}_{es} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \left(\vec{E}_{es} + \vec{E}^*\right) \cdot d\vec{r} = \int_B^A \vec{E}^* \cdot d\vec{r}$$

Generatori di f.e.m.



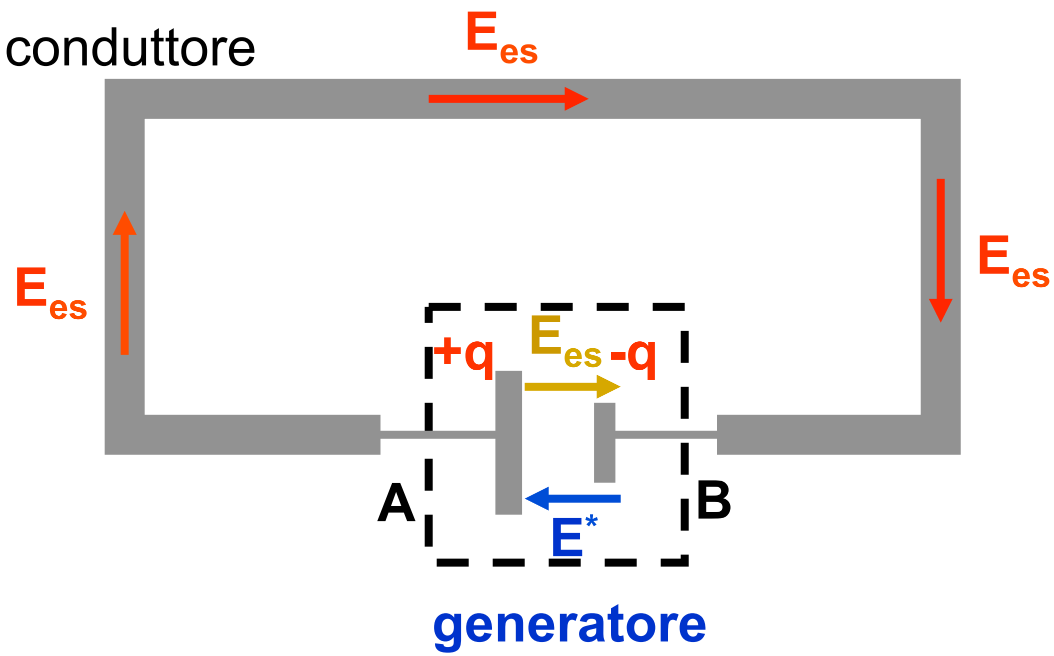
Scollegando il circuito esterno, il campo all' interno del generatore e` nullo (dopo il transiente dello spostamento delle cariche i due campi interni si equilibrano)

$$\int_{B,\mathrm{int}}^{A} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{B,\mathrm{int}}^{A} \left(\vec{E}_{\mathrm{es}} + \vec{E}^*\right)\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \int_{B,\mathrm{int}}^{A} \vec{E}^*\cdot d\vec{r} = -\int_{B}^{A} \vec{E}_{\mathrm{es}}\cdot d\vec{r} = V_A^0 - V_B^0$$

La forza elettromotrice di un generatore e` uguale alla differenza di potenziale ai capi del generatore quando questo non eroga corrente

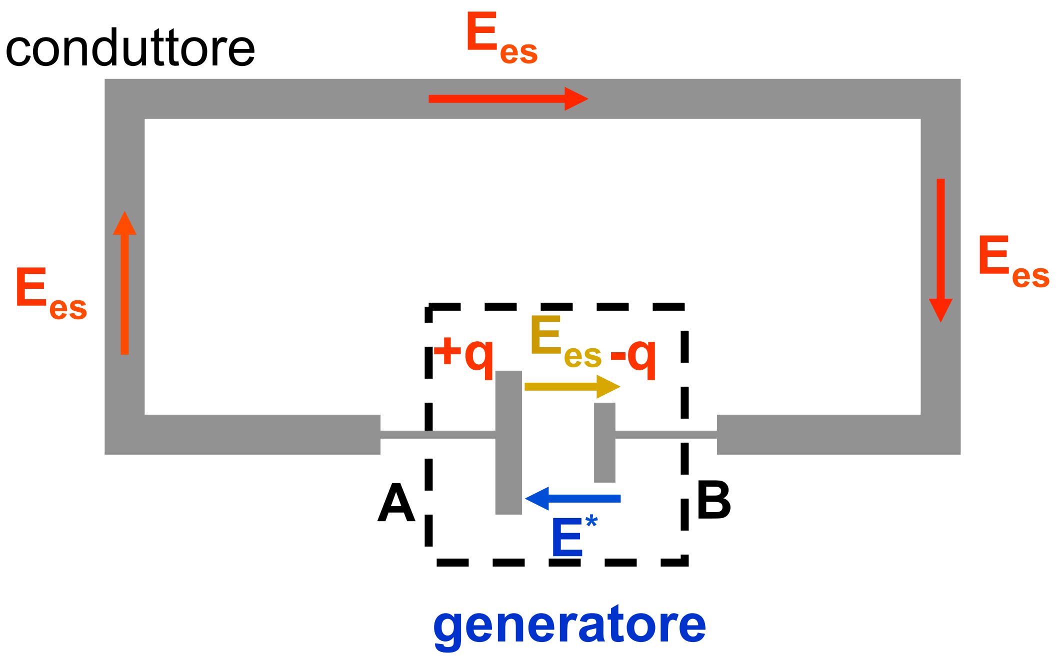
Generatori di f.e.m.



Dentro al generatore una carica dq viene spostata da B verso A da una forza **dF*** che deve vincere la forza elettrostatica $\mathbf{dF}_{es}$=dq$\mathbf{E}_{es}$

$$\vec{E}^* \equiv \frac{d\vec{F}^*}{dq} \qquad |\vec{E}^*| > |\vec{E}_{es}| \Longrightarrow \int_B^A (\vec{E}^* + \vec{E}_{es}) \cdot d\vec{r} > 0$$

Generatori di f.e.m.

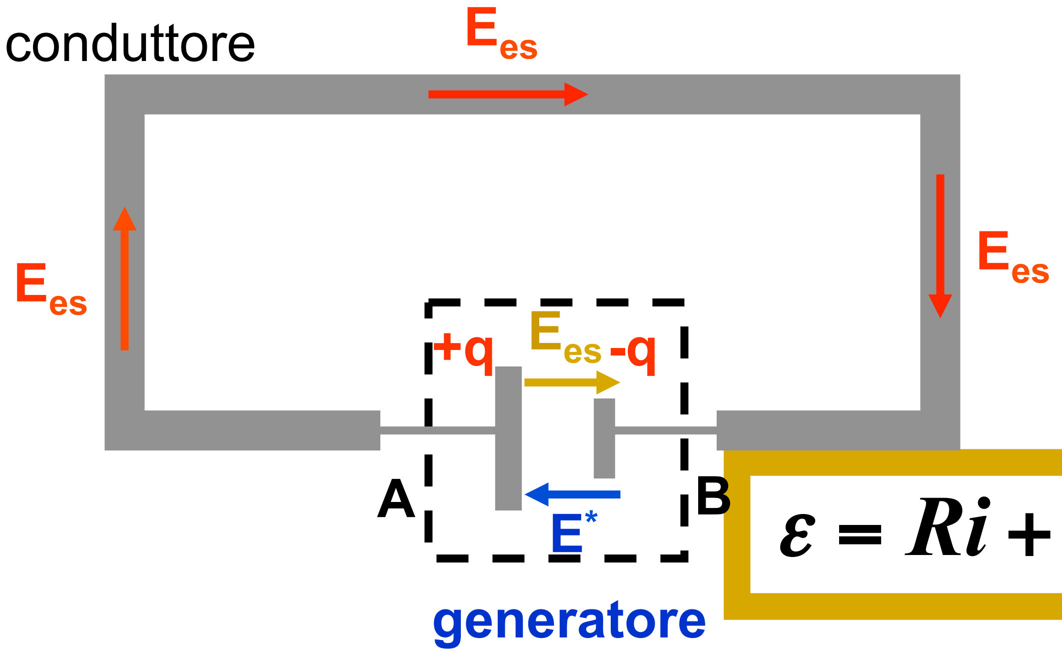


Dentro al generatore circola la stessa corrente i che circola all'esterno

$$\int_B^A (\vec{E}^* + \vec{E}_{es}) \cdot d\vec{r} \equiv ri$$

***r* = resistenza interna del generatore**

Generatori di f.e.m.



$$\varepsilon = Ri + ri = (R + r)i = R_T i$$

La corrente e` data dal rapporto tra la f.e.m. e la resistenza totale

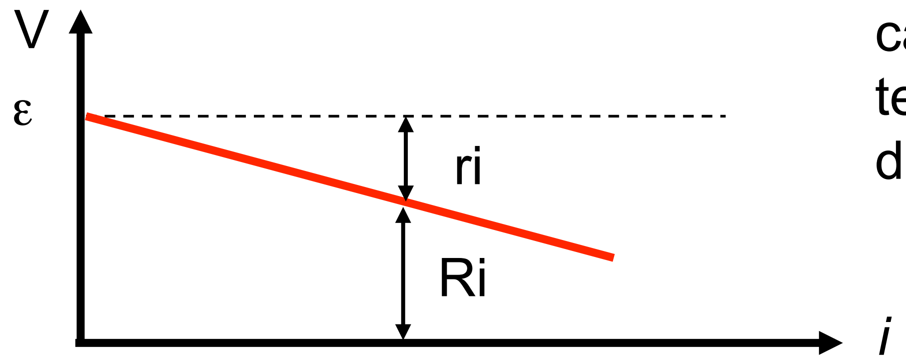
$$V_A - V_B = Ri = \varepsilon - ri$$

Se nel circuito circola corrente la d.d.p. tra i poli A e B e` minore della f.e.m. del generatore

Generatori di f.e.m.

- La f.e.m. e` la somma delle cadute di potenziale (o cadute di tensione) ai capi delle resistenze interna ed esterna

$$\boxed{\varepsilon = Ri + ri = (R + r)i = R_T i}$$



caratteristica
tensione-corrente
di un generatore reale

una pila si “consuma” quando r diventa grande

Esempio

- Un circuito esterno resistivo (resistenza R) e` collegato ad un generatore di f.e.m. ε
- La potenza dissipata nel generatore per effetto Joule e` ri^2 → quanto vale i?

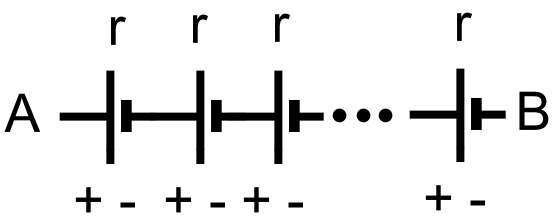
La potenza dissipata e` uguale al lavoro per unita` di tempo del campo elettromotore: $P = \varepsilon i$

Vale anche: $P=(r+R)i^2$

$$i = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

Esempio

- Collegamento in serie di N generatori uguali



A circuito aperto

$$V_A - V_B = N\varepsilon$$

$$r' = Nr$$

La f.e.m. (o tensione) totale e` la somma delle tensioni di ciascun singolo generatore

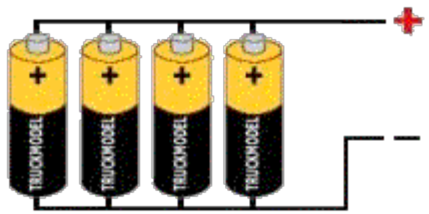
Esempio

- Collegamento in parallelo di N generatori uguali

$$V_A - V_B = \varepsilon$$

A circuito aperto

$$r' = \frac{r}{N}$$



A circuito aperto $V_A - V_B = 1.5\ \mathrm{V}$

- Il generatore parallelo ha resistenza inferiore
- Eroga una corrente piu` elevata
- Puo` sostenere il passaggio di corrente per un tempo N volte maggiore

Esempio

- Una pila di f.e.m. V e resistenza interna r alimenta un circuito resistivo di resistenza R. Per quale valore di R vi e` il massimo trasferimento di potenza dal generatore alla resistenza esterna R?

$$i = \frac{V}{R+r} \qquad\qquad P = Ri^2 = R\frac{V^2}{(R+r)^2}$$

$$\frac{dP}{dR} = V^2\frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} = V^2\frac{r-R}{(r+R)^3}$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \Leftrightarrow r = R \qquad\qquad \frac{dP}{dR}\begin{cases} >0 & R<r \\ <0 & R>r \end{cases}$$

Leggi di Kirchoff

- Equazioni che traducono nei circuiti due risultati fondamentali
  - conservazione della carica elettrica
  - condizione di campo elettrico conservativo
- **Rete elettrica**: serie di **nodi** e **rami**
- **Nodo**: confluenza di tre o piu` **rami** di un circuito
- I rami collegano i nodi. Ci possono essere elementi attivi (es. generatori) e passivi (es. resistori)
- **Maglia**: insieme di rami che formano un circuito chiuso

Leggi di Kirchoff (corrente continua)

- **L'intensita` di corrente che circola in un ramo e` uguale al rapporto tra la d.d.p. (tensione) ai capi del ramo e la resistenza del ramo (incluse le resistenze interne dei generatori)**
- **Legge dei nodi** (**= conservazione della carica elettrica**)
  - in un nodo la somma delle correnti entranti e uscenti (segno opposto) e` nullo

$$\sum_{nodo} i_k = 0$$

N nodi → N-1 condizioni

1 corrente va in almeno 2 nodi

- **Legge delle maglie** (**= il campo elettrico e` conservativo**)
  - la somma delle f.e.m. nell'ordine in cui si susseguono in una maglia (inizio e fine in uno stesso nodo) e` zero → $\left(\oint \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0\right)$.

$$\sum_{maglia} R_k i_k = \sum_{maglia} \varepsilon_k$$

R rami → R-(N-1)=R-N+1 maglie indipendenti

Leggi di Kirchoff (corrente continua)

- **L'intensita` di corrente che circola in un ramo e` uguale al rapporto tra la d.d.p. (tensione) ai capi del ramo e la resistenza del ramo (incluse le resistenze interne dei generatori)**
- **Legge dei nodi** (**= conservazione della carica elettrica**)
  - in un nodo la somma delle correnti entranti e uscenti (segno opposto) e` nullo

$$\sum_{nodo} i_k = 0$$

N nodi → N-1 condizioni

1 corrente va in almeno 2 nodi

- **Legge delle maglie** (**= il campo elettrico e` conservativo**)
  - la somma delle f.e.m. nell'ordine in cui si susseguono in una maglia (inizio e fine in uno stesso nodo) e` zero → $\left(\oint \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0\right)$.

$$\sum_{maglia} V_k = 0$$

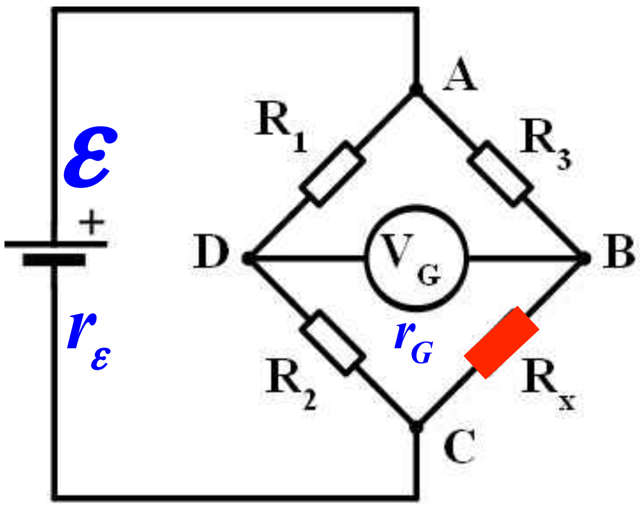
R rami → R-(N-1)=R-N+1 maglie indipendenti

Leggi di Kirchoff

- Si scelgono M maglie indipendenti
- Si associa ad ogni maglia una corrente e un verso di percorrenza (arbitrariamente)
- Si scrivono le M equazioni alle maglie
- Le soluzioni forniscono le correnti incognite
- Se una corrente e` negativa, significa che il suo verso arbitrariamente scelto era opposto a quello effettivo

Esempio: ponte di Wheatstone

- Misura di R_X attraverso $R_{1,2,3}$ e r_ε, r_G



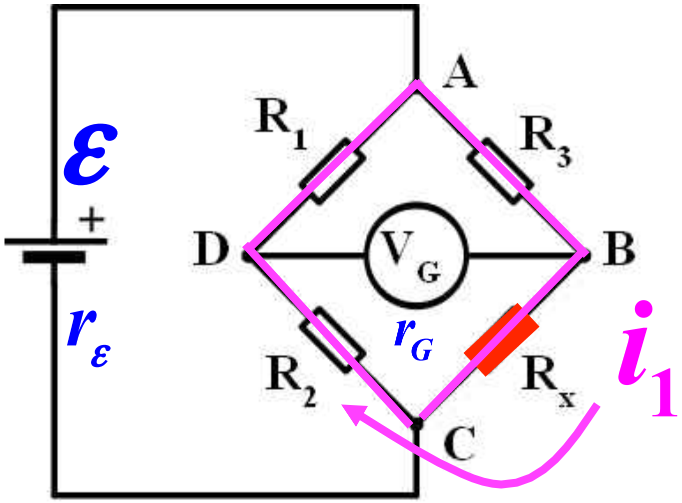
Rami: R=6

Nodi: N=4

➔ **Maglie: M=R-N+1=6-4+1=3**

Esempio: ponte di Wheatstone

- Misura di R_X attraverso $R_{1,2,3}$ e r_ε, r_G



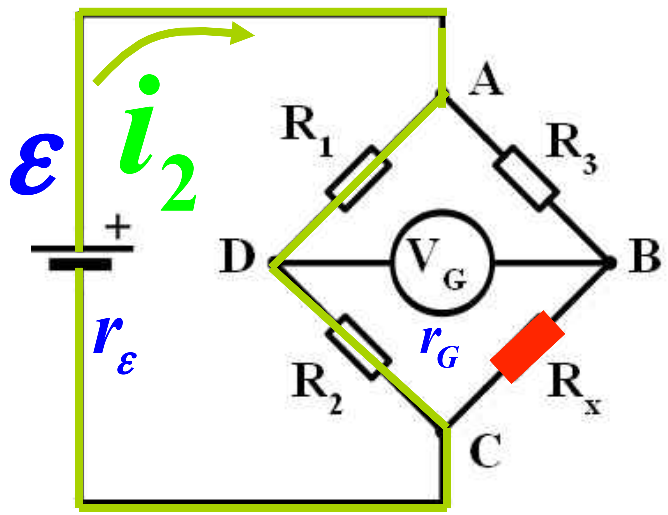
Rami: R=6

Nodi: N=4

➔ Maglie: M=R-N+1=6-4+1=3

Esempio: ponte di Wheatstone

- Misura di R_X attraverso $R_{1,2,3}$ e r_ε, r_G



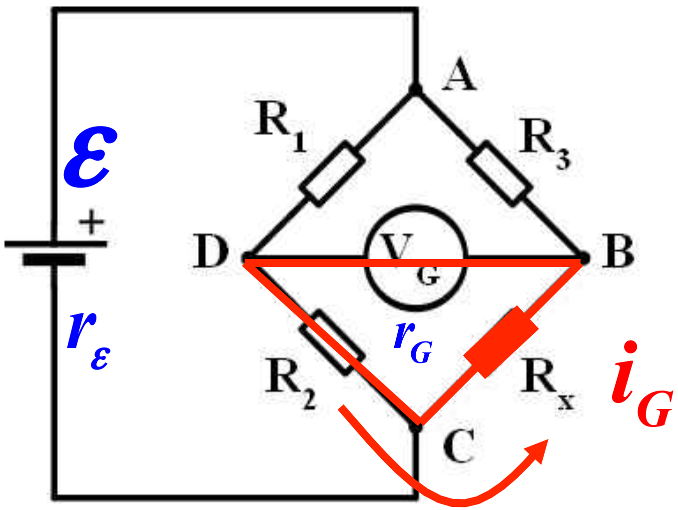
Rami: R=6

Nodi: N=4

➔ Maglie: M=R-N+1=6-4+1=3

Esempio: ponte di Wheatstone

- Misura di R_X attraverso $R_{1,2,3}$ e r_ε, r_G



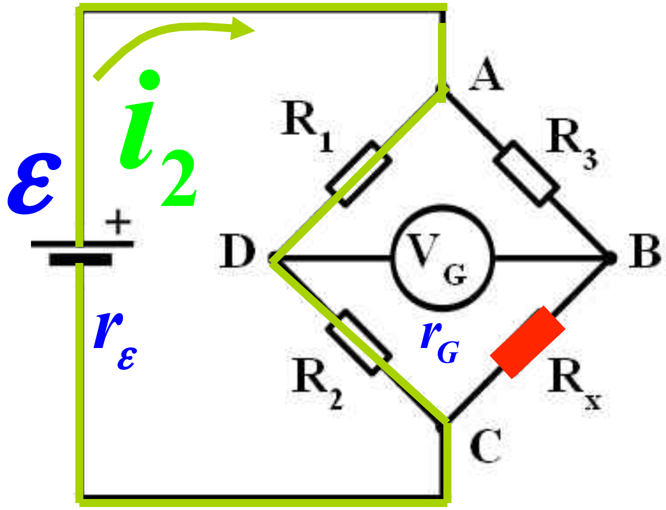
Rami: R=6

Nodi: N=4

➔ Maglie: M=R-N+1=6-4+1=3

Esempio: ponte di Wheatstone

- Misura di R_X attraverso $R_{1,2,3}$ e r_ε, r_G



Rami: R=6

Nodi: N=4

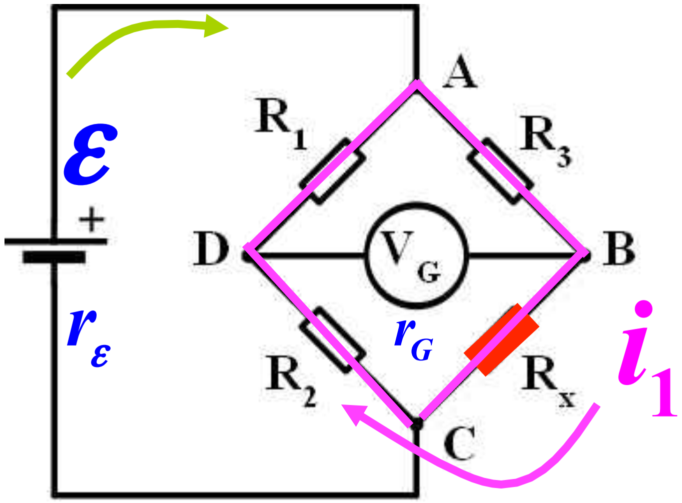
➔ Maglie: M=R-N+1=6-4+1=3

Maglia con il generatore

$$-\varepsilon + (R_1 + R_2 + r_\varepsilon)i_2$$

Esempio: ponte di Wheatstone

- Misura di R_X attraverso $R_{1,2,3}$ e r_ε, r_G



Rami: R=6

Nodi: N=4

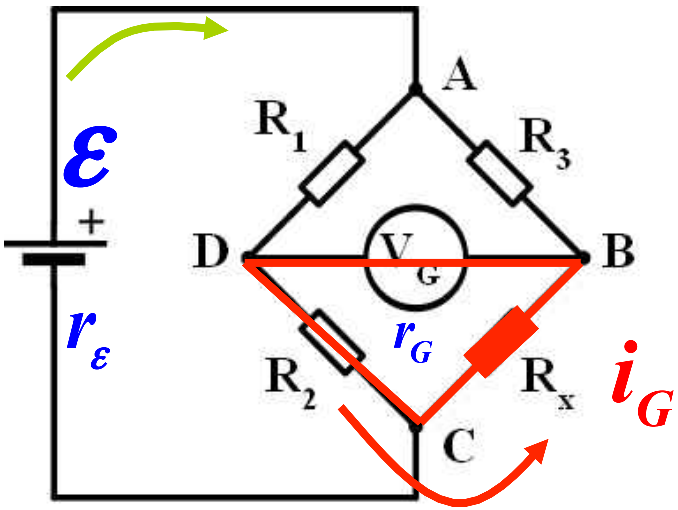
➔ Maglie: M=R-N+1=6-4+1=3

Maglia con il generatore

$$-\varepsilon + (R_1 + R_2 + r_\varepsilon) i_2 - (R_2 + R_1) i_1$$

Esempio: ponte di Wheatstone

- Misura di R_X attraverso $R_{1,2,3}$ e r_ε, r_G



Rami: R=6

Nodi: N=4

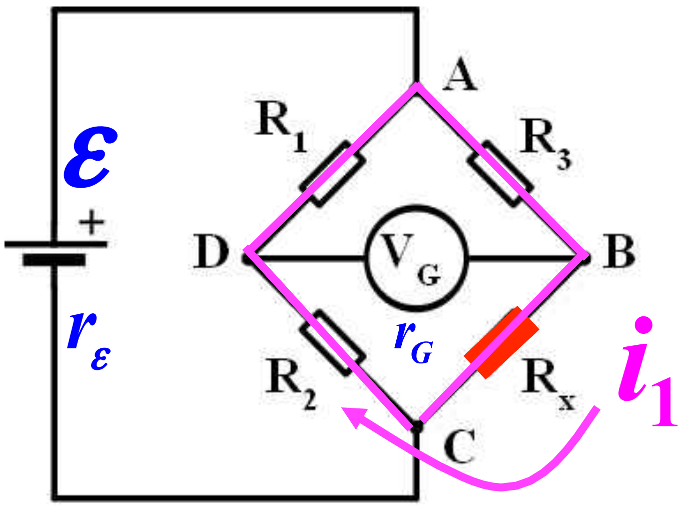
➔ Maglie: M=R-N+1=6-4+1=3

Maglia con il generatore

$$-\varepsilon + (R_1 + R_2 + r_\varepsilon)i_2 - (R_2 + R_1)i_1 + R_2 i_G = 0$$

Esempio: ponte di Wheatstone

- Misura di R_X attraverso $R_{1,2,3}$ e r_ε, r_G



Rami: R=6

Nodi: N=4

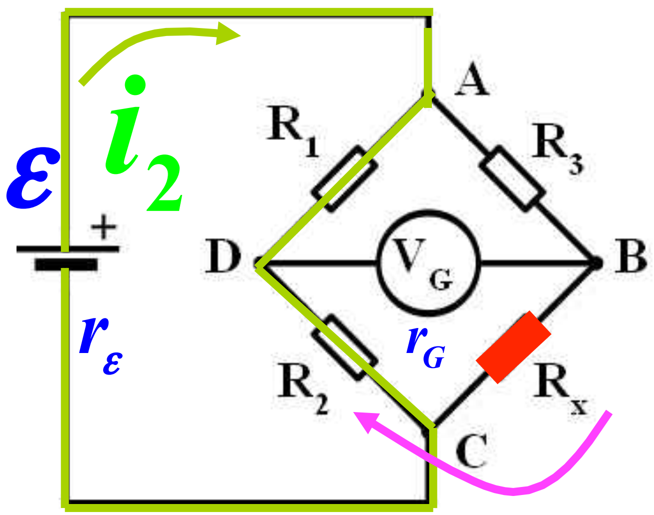
➔ Maglie: M=R-N+1=6-4+1=3

Maglia con le 4 resistenze

$$(R_2 + R_1 + R_3 + R_x)i_1$$

Esempio: ponte di Wheatstone

- Misura di R_X attraverso $R_{1,2,3}$ e r_ε, r_G



Rami: R=6

Nodi: N=4

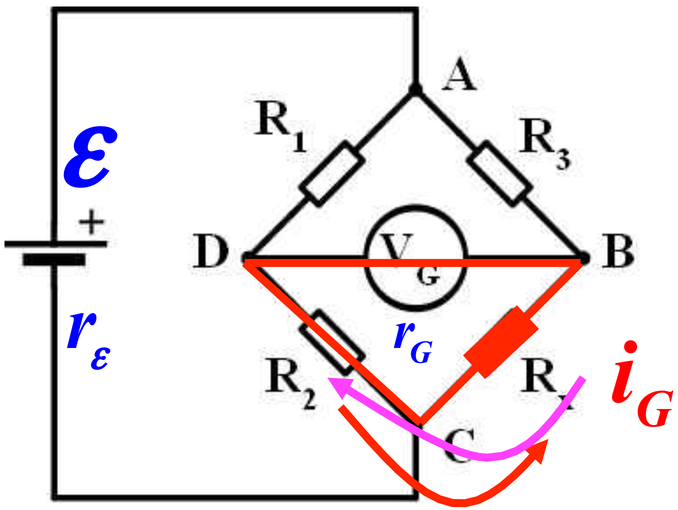
➔ Maglie: M=R-N+1=6-4+1=3

Maglia con le 4 resistenze

$$(R_2 + R_1 + R_3 + R_x)i_1 - (R_1 + R_2)i_2$$

Esempio: ponte di Wheatstone

- Misura di R_X attraverso $R_{1,2,3}$ e r_ε, r_G



Rami: R=6

Nodi: N=4

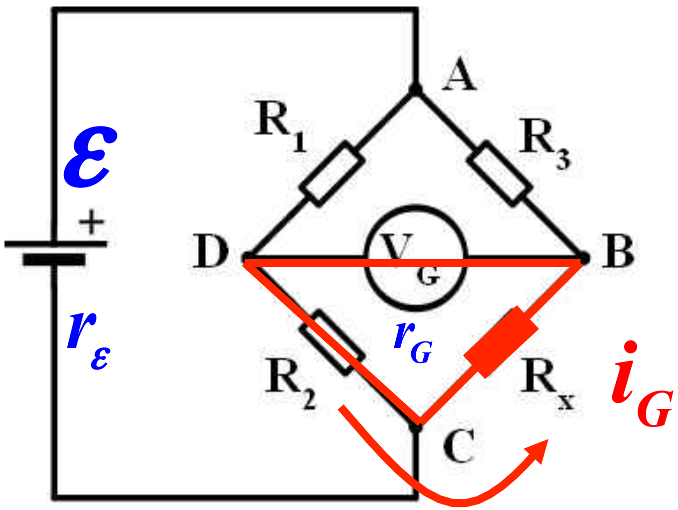
➔ Maglie: M=R-N+1=6-4+1=3

Maglia con le 4 resistenze

$$(R_2+R_1+R_3+R_x)i_1-(R_1+R_2)i_2-(R_2+R_x)i_G=0$$

Esempio: ponte di Wheatstone

- Misura di R_X attraverso $R_{1,2,3}$ e r_ε, r_G



Rami: R=6

Nodi: N=4

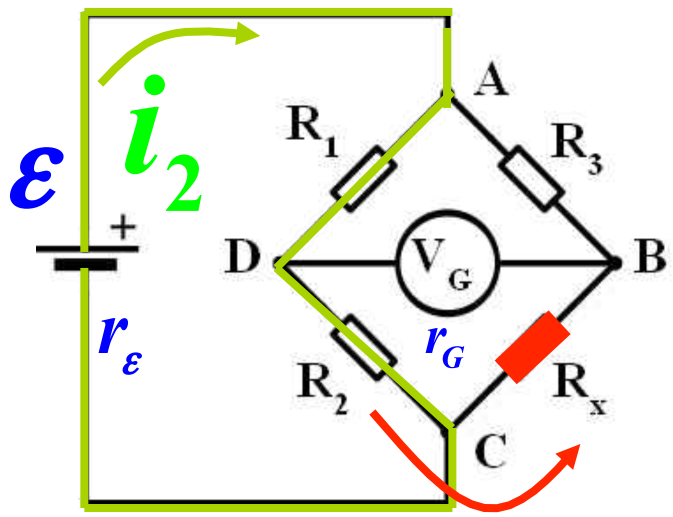
➔ Maglie: M=R-N+1=6-4+1=3

Maglia triangolare

$$(R_2 + R_x + r_G)i_G$$

Esempio: ponte di Wheatstone

- Misura di R_X attraverso $R_{1,2,3}$ e r_ε, r_G



Rami: R=6

Nodi: N=4

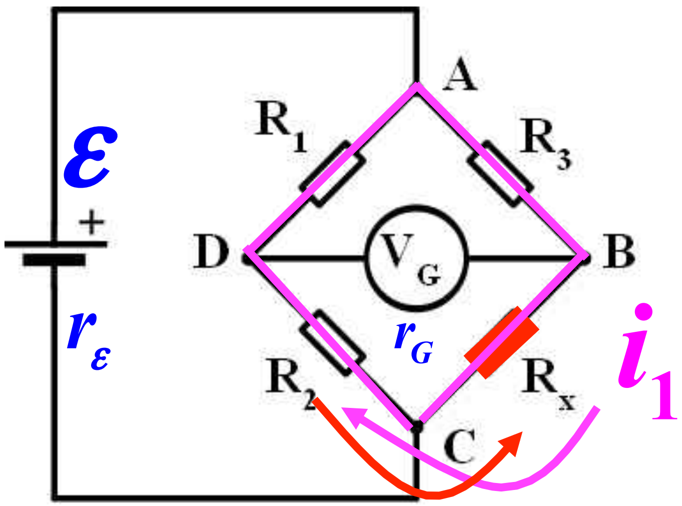
➔ Maglie: M=R-N+1=6-4+1=3

Maglia triangolare

$$(R_2 + R_x + r_G)i_G + R_2 i_2$$

Esempio: ponte di Wheatstone

- Misura di R_X attraverso $R_{1,2,3}$ e r_ε, r_G



Rami: R=6

Nodi: N=4

➔ Maglie: M=R-N+1=6-4+1=3

Maglia triangolare

$$(R_2 + R_x + r_G)i_G + R_2 i_2 - (R_x + R_2)i_1 = 0$$

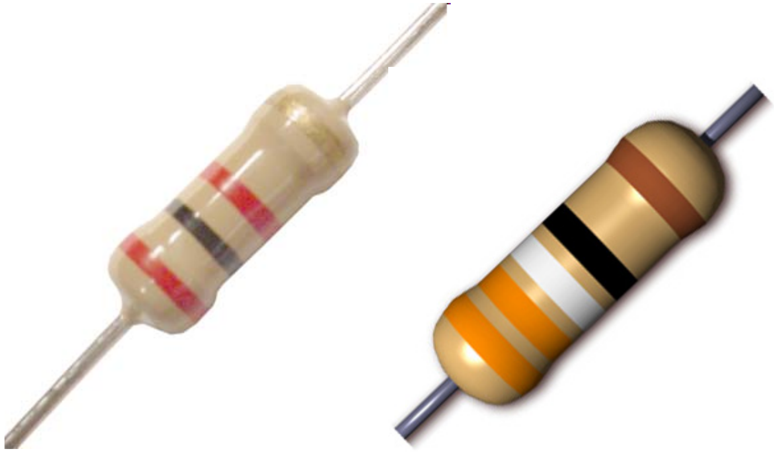
Esempio: ponte di Wheatstone

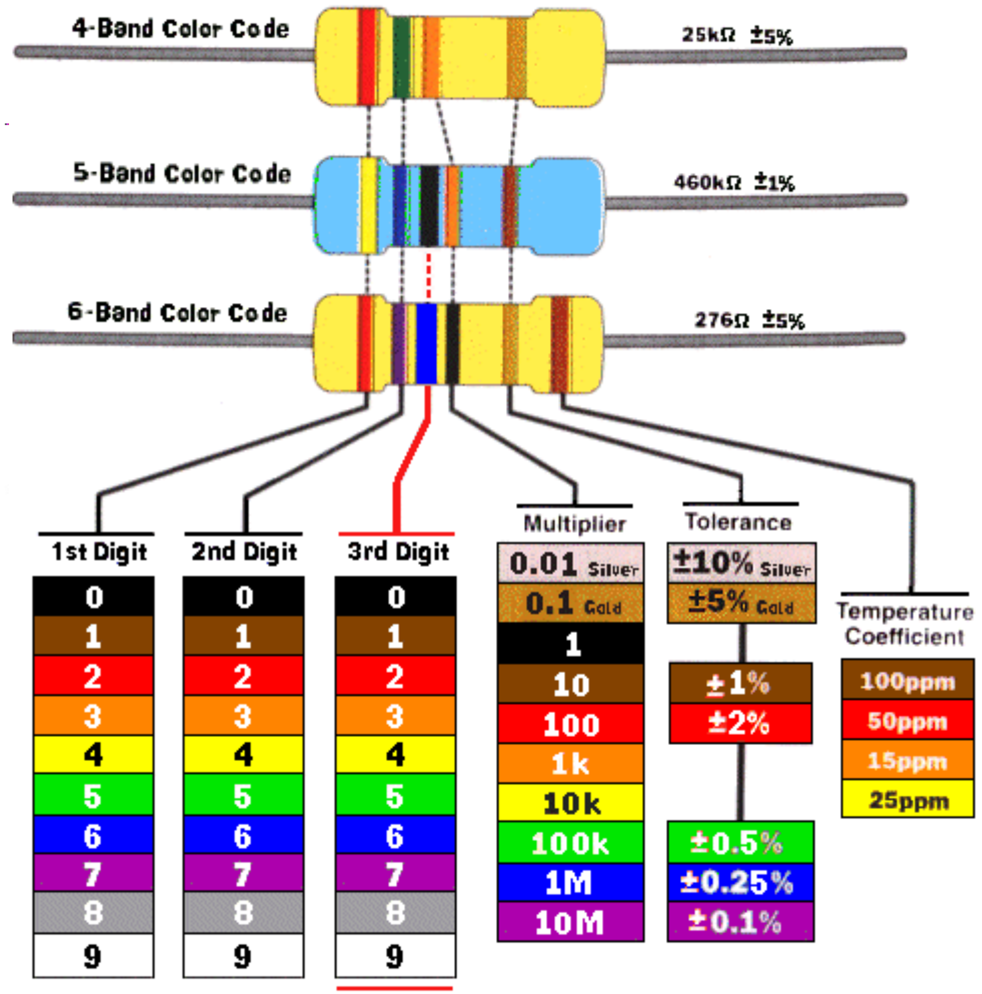
$$\begin{cases} -(R_2+R_1)i_1+(R_1+R_2+r_\varepsilon)i_2+R_2 i_G=\varepsilon \\ (R_2+R_1+R_3+R_x)i_1-(R_1+R_2)i_2-(R_2+R_x)i_G=0 \\ -(R_x+R_2)i_1+R_2 i_2+(R_2+R_x+r_G)i_G=0 \end{cases}$$

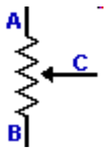
$$i_G=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} -(R_1+R_2) & (R_1+R_2+r_\varepsilon) & \varepsilon \\ (R_1+R_2+R_3+R_x) & -(R_1+R_2) & 0 \\ -(R_2+R_x) & R_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\varepsilon}{D}\left[R_1R_x-R_2R_3\right]\Rightarrow R_x=\frac{R_2R_3}{R_1} \quad \text{se} \quad i_G=0$$

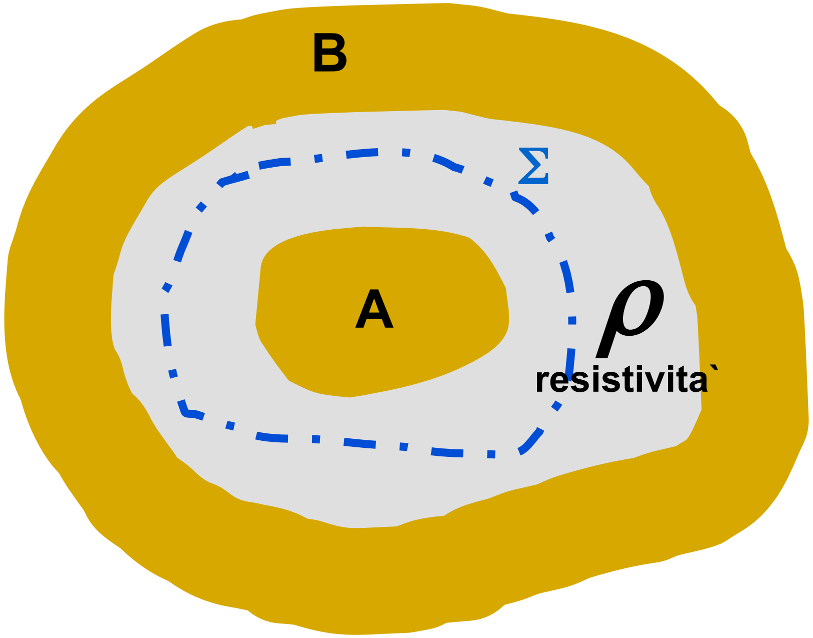
Resistenze elettriche







Relazione tra capacita` e resistenza di un conduttore 3d



$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dA = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{C(V_A - V_B)}{\varepsilon_0}$$

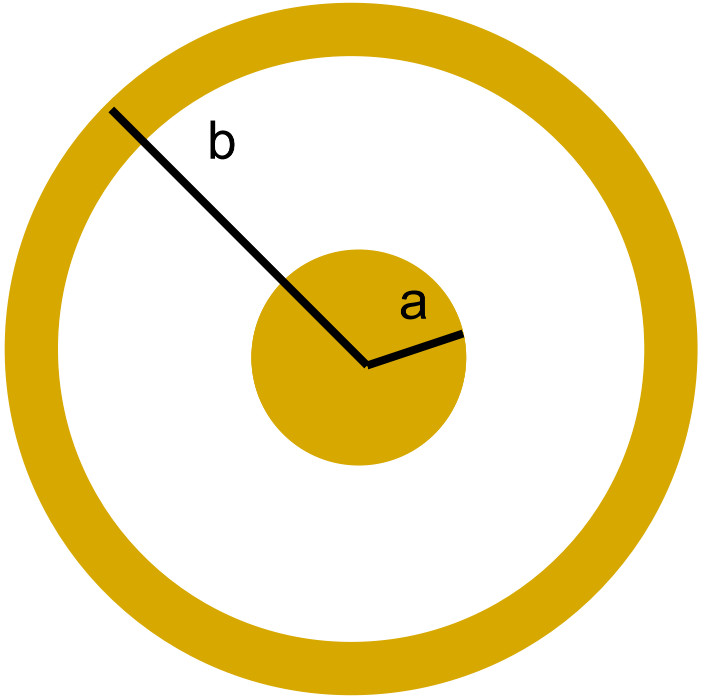
$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dA = \rho\oint_{\Sigma} \vec{J}\cdot\vec{n}\,dA = \rho i = \rho\frac{V_A - V_B}{R}$$

$$\frac{C}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{RC = \rho\varepsilon_0}$$

Esempio

- Due sfere concentriche



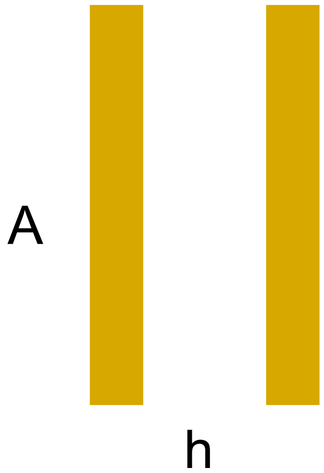
$$R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$RC = \rho\varepsilon_0$$

Esempio

- Condensatore piano



$$R = \rho \frac{h}{A} \qquad C = \frac{\varepsilon_0 A}{h}$$

$$RC = \rho \varepsilon_0$$

Riepilogo leggi di Kirchoff

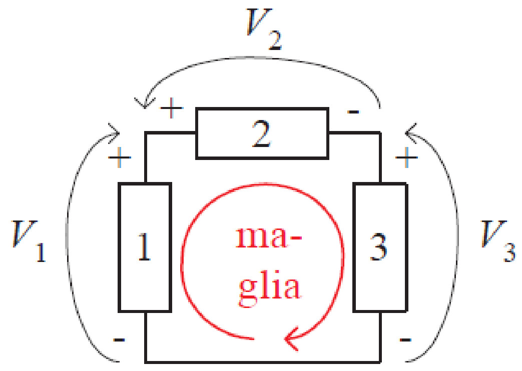
- Legge per le tensioni (delle maglie)

Lungo qualsiasi maglia la somma algebrica delle tensioni e` zero

<u>positive:</u> le tensioni concordi con il verso di percorrenza della maglia

<u>negative:</u> le tensioni discordi con il verso di percorrenza della maglia

$$\boxed{\sum_{k \in maglia} V_k = 0}$$



V_1 concorde

$V_{2,3}$ discordi

$$V_1 - V_2 - V_3 = 0$$

Riepilogo leggi di Kirchoff

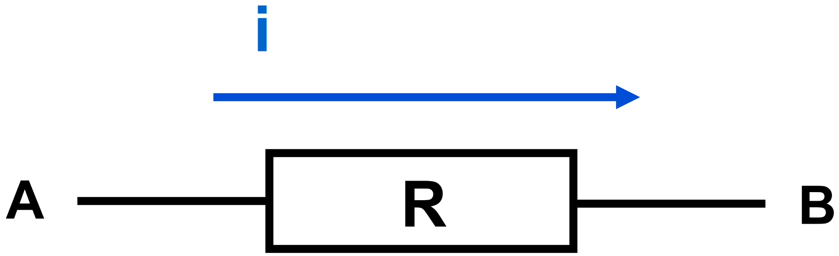
- Legge per le tensioni (delle maglie)

Lungo qualsiasi maglia la somma algebrica delle tensioni e` zero

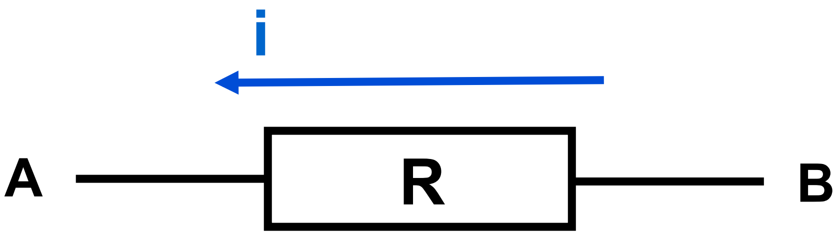
<u>*positive:*</u> *le tensioni concordi con il verso di percorrenza della maglia*

<u>*negative:*</u> *le tensioni discordi con il verso di percorrenza della maglia*

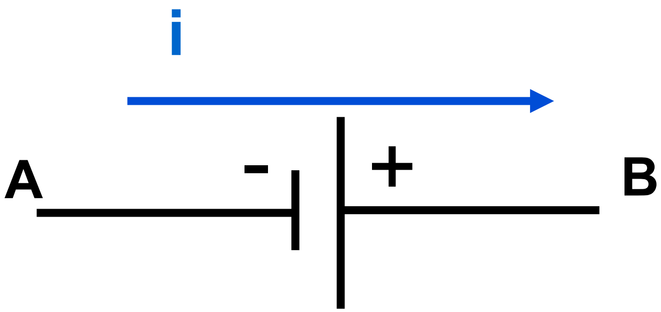
$$\boxed{\sum_{k \in maglia} R_k i_k = \sum_{k \in maglia} \varepsilon_k}$$



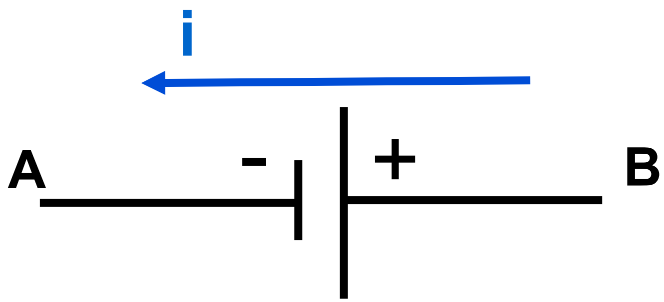
$$V_A - V_B = Ri$$



$$V_A - V_B = -Ri$$



$+\varepsilon_0$



$-\varepsilon_0$

Riepilogo leggi di Kirchoff

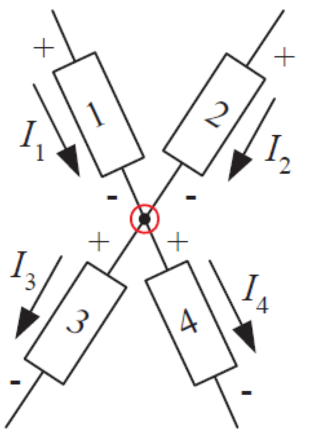
- Legge per i nodi

La somma algebrica di tutte le correnti relative a un nodo e` zero

*<u>positive: </u>le correnti **entranti** nel nodo*

*<u>negative: </u>le correnti **uscenti** dal nodo*

$$\boxed{\sum_{k \in nodo} i_k = 0}$$



$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$

Commenti

- Abbiamo usato il metodo delle maglie
- Un metodo equivalente e` quello dei nodi
  - si sceglie un nodo come riferimento
  - si scrivono N-1 equazioni per i potenziali dei rimanenti nodi
- Se $M=R-N+1 < N-1$ ➔ conviene usare le maglie
- Se $M > N-1$ ➔ conviene usare i nodi