

Energia di sistemi di cariche

(distribuzione continua)

$$U_E = \frac{1}{2} \int \rho V d^3 x \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$U_E = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} V d^3 x$$

Integriamo su una sfera S_R e mandiamo il suo raggio all'infinito

$$V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (V \vec{E}) - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V = \vec{\nabla} \cdot (V \vec{E}) + E^2$$

$$U_E = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_{S_R} d^3 x \vec{\nabla} \cdot (V \vec{E}) + \int_{S_R} d^3 x |\vec{E}|^2 \right]$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_{\Sigma(S_R)} (V \vec{E}) \cdot \vec{n} dA + \int E^2 d^3 x \right]$$

$\frac{1}{r}$ $\frac{1}{r^2}$

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d^3 x$$