Esame scritto di Fisica Generale T-B
(CdL Ingegneria Civile)

Prof. M. Sioli

I appello dell'A.A. 2016-2017 - 10/01/2017

Soluzione Esercizio 1

In tutti e tre i casi il problema si risolve richiedendo che la differenza di potenziale ΔV tra le armature (costante, in quanto il sistema è non isolato) sia l'integrale del campo elettrico all'interno delle armature stesse.

a) Indicando con x_1 e x_2 gli spessori delle regioni vuote otteniamo:

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0}x_1 + \frac{\sigma}{\epsilon_0}x_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(d-a)$$

in quanto il campo elettrico nel conduttore è nullo. Dunque:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \Delta V}{d-a} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 1000}{(0.01 - 0.0025)} = 1.18\,\mu\mathrm{C/m^2}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 S}{d-a} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 80 \cdot 10^{-4}}{(0.01 - 0.0025)} = 9.44\,\mathrm{pF}.$$

b) In questo caso aggiungiamo il contributo del campo elettrico nel dielettrico:

$$\Delta V = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}x_1 + \frac{\sigma'}{\epsilon_0}x_2 + \frac{\sigma'}{\epsilon_0\epsilon_r}b = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}[d - b(\epsilon_r - 1)/\epsilon_r)]$$

da cui

$$\sigma' = \frac{\epsilon_0 \Delta V}{[d - b(\epsilon_r - 1)/\epsilon_r)]} = 1.15\,\mu\mathrm{C/m^2}$$

$$C' = \frac{Q'}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 S}{[d - b(\epsilon_r - 1)/\epsilon_r)]} = 9.23\,\mathrm{pF}$$

c) In questo caso, indicando con x_3 il terzo spessore vuoto, otteniamo:

$$\Delta V = \frac{\sigma''}{\epsilon_0}x_1 + \frac{\sigma''}{\epsilon_0}x_2 + \frac{\sigma''}{\epsilon_0\epsilon_r}b + \frac{\sigma''}{\epsilon_0}x_3 = \frac{\sigma''}{\epsilon_0}[d - a - b(\epsilon_r - 1)/\epsilon_r)]$$

da cui

$$\sigma'' = \frac{\epsilon_0 \Delta V}{[d - a - b(\epsilon_r - 1)/\epsilon_r)]} = 1.71\,\mu\text{C/m}^2$$

$$C'' = \frac{Q''}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 S}{[d - a - b(\epsilon_r - 1)/\epsilon_r)]} = 13.7\,\text{pF}$$

In altri termini, il sistema è equivalente alla serie di più condensatori. Si confrontino inoltre i valori ottenuti con quelli relativi al condensatore senza lastre interposte: $\sigma_0 = 0.885\,\mu\text{C/m}^2$ e $C_0 = 7.08\,\text{pF}$.

d) La posizione delle lastre tra le armature non è rilevante in quanto in tutti i casi i valori trovati non dipendono da x_1, x_2 e x_3 separatamente, ma dalla loro somma, che è costante.

Soluzione Esercizio 2

a) Immediatamente dopo la chiusura dell'interruttore il ramo con l'induttanza di comporta come un circuito aperto e si considera solo la maglia di sinistra. Quindi il circuito è la semplice serie di R_1 e R_2 e dunque

$$i_1 = i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = 3.3\,\text{A}$$

b) A regime con l'interruttore T chiuso l'induttanza non gioca alcun ruolo e il circuito è la serie tra R_1 e il parallelo di R_2 e R_3. Quindi

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 4.55\,\text{A}$$

$$\mathcal{E} = R_1 i_1 + R_2 i_2 \rightarrow i_2 = \frac{\mathcal{E} - i_1 R_1}{R_2} = 2.73\,\text{A}$$

$$i_3 = i_1 - i_2 = 1.82\,\text{A}$$

c) Immediatamente dopo l'apertura dell'interruttore T si considera solo la maglia di destra, in cui circola la corrente del punto b), ovvero:

$$i_1 = 0, \qquad i_2 = i_3 = 1.82\,\text{A}$$

d) A regime con l'interruttore T aperto anche la corrente sulla maglia di destra si interrompe e quindi tutte le correnti sono nulle.

Soluzione Esercizio 3

a) Il flusso attraverso la spira vale $\Phi(t) = BL^2 \cos \omega t$ e dunque, per la legge di FNL, la f.e.m. vale $\epsilon(t) = -d\Phi/dt = \omega BL^2 \sin \omega t$. Per la legge di Ohm la corrente è dunque:

$$i(t) = \frac{\epsilon}{R} = \frac{\omega BL^2}{R} \sin \omega t = 20\,\pi \sin \omega t \,\mathrm{A}$$

b) Il modulo del momento vale

$$M \equiv |\vec{M}| = |\vec{m} \times \vec{B}| = mB \sin \omega t = iL^2 B \sin \omega t = \frac{\omega B^2 L^4}{R} \sin^2 \omega t$$

e dunque il momento massimo che agisce sulla spire è

$$M_{max} = \frac{\omega B^2 L^4}{R} = 40\,\pi \,\mathrm{Nm}$$

Notare che lo stesso risultato può essere ottenuto sfruttando la relazione tra potenza e momento meccanico: $P = Ri^2 = M\omega$.

c) L'energia dissipata per effetto Joule vale

$$E = \int_0^{\bar{t}} Ri^2 dt = R \left(\frac{\omega BL^2}{R} \right)^2 \int_0^{\bar{t}} \sin^2 \omega t dt$$

poiché $\bar{t} = 10$ s = 10 cicli, e in ogni ciclo l'integrale di $\sin^2 \omega t$ vale 1/2, si ha

$$E = \frac{(2\pi \cdot 2 \cdot 1)^2}{0.2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = (20\pi)^2 \,\mathrm{J}$$