

Esame scritto di Fisica Generale T-B

(CdL Ingegneria Civile)

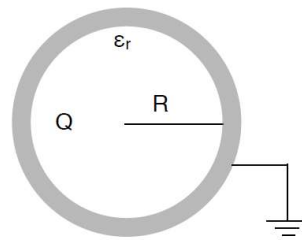
Prof. M. Sioli

V appello dell'A.A. 2016-2017 - 10/07/2017

Esercizi

Esercizio 1

In una sfera di raggio R composta di un materiale dielettrico con costante ϵ_r è uniformemente distribuita una carica elettrica Q . La superficie esterna della sfera è ricoperta da un sottile strato metallico collegato a terra. Calcolare:



- a) il campo elettrico e il potenziale in funzione della distanza dal centro della sfera;
- b) la densità di cariche superficiali indotte nel metallo;
- c) la densità di carica di polarizzazione nella sfera e sulla superficie.

Soluzione Esercizio 1

Calcoliamo prima il vettore $\mathbf{D}$, che dipende solo dalle cariche libere. Data la simmetria del problema, il vettore $\mathbf{D}$ è radiale e assume lo stesso valore sulle superfici sferiche Σ di raggio r arbitrario, concentriche alla sfera dielettrica. Appliciamo il teorema di Gauss.

Per $0 < r < R$ si ha:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D = Q_f(r), \text{ dove } Q_f \text{ è la carica libera interna alla superficie sferica } \Sigma.$$

Poiché la carica elettrica Q è distribuita uniformemente all'interno della sfera dielettrica di raggio R , si ha che la densità volumetrica della carica libera è data da:

$$\rho_f = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Da queste due relazioni si ottiene:

$$4\pi r^2 D = \rho_f \frac{4}{3}\pi r^3$$

Quindi:

$$\mathbf{D} = \frac{Qr}{4\pi R^3} \mathbf{u}_r$$

All'interno dello strato metallico che circonda la sfera dielettrica il vettore $\mathbf{D}$ è nullo (come pure il campo elettrico). Applicando il teorema di Gauss, considerando una superficie sferica Σ , di raggio r , contenuta nello strato metallico, si ottiene:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = 0 = Q_f, \text{ dove } Q_f \text{ è la carica libera totale interna a } \Sigma, \text{ data dalla somma della carica } Q \text{ distribuita nel dielettrico e della carica indotta sulla superficie interna dello strato metallico.}$$

Si ha quindi che la carica indotta è data da $Q_{indotta} = -Q$

Il conduttore è collegato a terra, quindi la sua superficie esterna risulta scarica. Applicando il teorema di Gauss, considerando una superficie sferica Σ esterna allo strato conduttore, dal momento che la carica libera totale interna a Σ è nulla, si conclude che $\mathbf{D} = 0$ all'esterno dello strato metallico.

Il campo elettrico si calcola facilmente ricordando la relazione tra $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Qr}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R^3} \mathbf{u}_r, \quad 0 < r < R;$$

$$\mathbf{E} = 0, \quad r > R.$$

Calcoliamo ora il potenziale, ricordando che lo strato metallico è posto a terra ($V = 0$). Per $r > R$ si ha: $V(r) = 0$. Per $0 < r < R$, ricordando che il potenziale è continuo per $r = R$, si ha:

$$\int_0^{V(r)} dV = - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R^3} \int_R^r r dr$$

da cui:

$$V(r) = \frac{Q}{8\pi \epsilon_0 \epsilon_r R^3} (R^2 - r^2).$$

2. Sulla superficie interna dello strato metallico viene indotta una carica $-Q$, distribuita in modo uniforme con densità superficiale σ data da:

$$\sigma = - \frac{Q}{4\pi R^2}$$

La superficie esterna dello strato metallico risulta invece scarica.

3. Determiniamo la polarizzazione all'interno della sfera dielettrica ($0 < r < R$):

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} = \frac{(\epsilon_r - 1)Qr}{4\pi \epsilon_r R^3} \mathbf{u}_r.$$

La densità superficiale di carica di polarizzazione sulla superficie del dielettrico a contatto con il guscio metallico è data da:

$$\sigma = \mathbf{P}(R) \cdot \mathbf{n} = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi \epsilon_r R^2} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi \epsilon_r R^2}$$

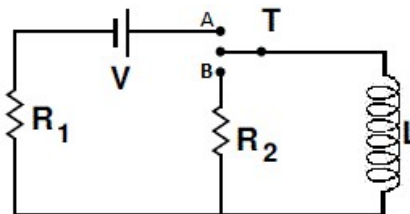
La densità volumetrica di carica di polarizzazione è data da:

$$\rho = - \nabla \cdot \mathbf{P}(R) = - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 P(r)] = - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi \epsilon_r R^3} r^3 \right] = - \frac{3(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi \epsilon_r R^3}$$

La carica di polarizzazione è quindi distribuita uniformemente all'interno della sfera dielettrica.

Esercizio 2

Il circuito mostrato in figura è costituito da due resistenze $R_1 = R_2$, una induttanza $L = 10$ mH, un generatore con f.e.m. $\epsilon = 100$ V e un interruttore T inizialmente chiuso in posizione A. Si osserva che la corrente erogata dal generatore all'istante $t^* = L/R_1$ è pari a $i(t^*) = 200$ mA. Calcolare:



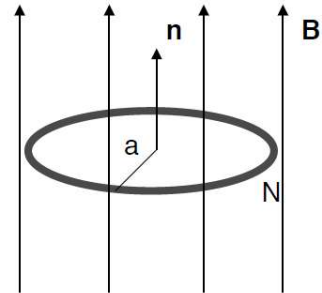
- a) il valore della resistenza R_1 ;
- b) l'energia magnetica U_B immagazzinata nell'induttanza per $t \gg t^*$;
- c) l'energia dissipata sulla resistenza R_2 dopo che l'interruttore T viene commutato in posizione B.

Soluzione Esercizio 2

- a) Il transiente del circuito LR in carica è governato dalla legge $i(t) = \frac{\epsilon}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t}\right)$, quindi dai dati del problema è possibile ricavare il valore della resistenza $R_1 = \frac{\epsilon}{i(t^*)} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 316 \Omega$.
- b) A regime ($t \gg t^*$) la corrente vale $\frac{\epsilon}{R_1}$ e quindi $U_B = \frac{1}{2}L \left(\frac{\epsilon}{R_1}\right)^2 = 2 \times 10^{-4}$ J.
- c) Dopo la commutazione in B tutta l'energia U_B viene dissipata su R_2 per effetto Joule.

Esercizio 3

Una bobina, composta da N spire circolari di raggio a , si trova in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico B uniforme e costante. La bobina è inizialmente disposta con l'asse parallelo alla direzione del campo. Successivamente la bobina viene ruotata di un angolo α intorno ad un asse perpendicolare alla direzione del campo. Sapendo che la resistenza della bobina è pari a R , si determini la carica complessiva che attraversa la bobina durante la rotazione per i seguenti casi:



- a) rotazione $\alpha = 90^\circ$;
- b) rotazione $\alpha = 180^\circ$.

Soluzione Esercizio 3

Per determinare la carica complessiva che attraversa la bobina si può integrare nel tempo la corrente indotta a fronte della variazione di flusso causata dalla rotazione.

Per la legge di Faraday e quella di Ohm si ricava la corrente indotta come:

$$i = \frac{f}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

Chiamando t_i e t_f gli istanti iniziale e finale della rotazione della spira, possiamo calcolare la carica che ha attraversato una sezione della spira:

$$Q = \int_{t_i}^{t_f} i dt = - \frac{1}{R} \int_{t_i}^{t_f} d\Phi(\mathbf{B}) = - \frac{1}{R} [\Phi_f(\mathbf{B}) - \Phi_i(\mathbf{B})] ,$$

dove $\Phi_f(\mathbf{B})$ è il flusso finale e $\Phi_i(\mathbf{B})$ è il flusso iniziale.

L'equazione ottenuta evidenzia come la carica totale che attraversa la bobina non dipenda dalla legge temporale con cui varia il flusso, ma solo dai suoi valori iniziale e finale.

Il flusso iniziale è pari a

$$\Phi_i(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = NB\pi a^2$$

in quanto $\mathbf{B}$ è uniforme ed inizialmente parallelo ed equivalso ad $\mathbf{n}$.

1. Nel caso in cui l'angolo di inclinazione sia di 90° :

$\Phi_f(\mathbf{B}) = 0$ in quanto $\mathbf{B}$ è ortogonale ad $\mathbf{n}$. Quindi:

$$Q = \frac{\Phi_i(\mathbf{B})}{R} = \frac{NB\pi a^2}{R} .$$

2. Nel caso in cui l'angolo di inclinazione sia di 180° :

$$\Phi_f(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = -NB\pi a^2 \quad \text{in quanto } \mathbf{B} \text{ e } \mathbf{n} \text{ sono paralleli ma opposti.}$$

Allora la carica totale sarà:

$$Q = - \frac{1}{R} (-NB\pi a^2 - NB\pi a^2) = \frac{2NB\pi a^2}{R} .$$