

Esame scritto di Fisica Generale T-B

(CdL Ingegneria Civile)

Prof. M. Sioli

VI appello dell'A.A. 2016-2017 - 29/09/2017

Quesito 3

Mostrare che la legge di Faraday-Neumann-Lenz è dimensionalmente corretta.

Risposta al Quesito 3

Dobbiamo mostrare che $[\varepsilon] = [d\Phi(B)/dt]$, dove le parentesi quadre indicano le dimensioni delle varie quantità. B è definito dalla Forza di Lorentz, quindi $[B] = [F/(LI)]$ e quindi $[\Phi] = [FL/I] = [E/I]$ e quindi $[d\Phi(B)/dt] = [E/Q]$. Ma $[E/Q]$ (energia su carica) sono le dimensioni del potenziale elettrico, che sono le stesse del primo membro della legge di Faraday-Neumann-Lenz.

Esercizi

Esercizio 1

Una distribuzione di carica è fatta in modo tale da produrre un campo elettrico $\vec{E}(x, y, z) = cx\hat{i} + d\hat{j}$, dove c e d sono costanti. Quanta carica è contenuta in un cubo di lato a con uno spigolo nell'origine e i lati paralleli agli assi cartesiani?

Soluzione Esercizio 1

La carica contenuta nel cubo si ottiene facilmente dal Teorema di Gauss. Il flusso di $\vec{E}$ attraverso le sei facce orientate vale:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = a^2 \sum_{i=1}^6 \vec{E} \cdot \hat{n},$$

dove, in questo caso, $\hat{n} = \pm\hat{i}, \pm\hat{j}, \pm\hat{k}$ a seconda della faccia considerata.

- 1) Per le due facce parallele al piano xy (corrispondenti a $\pm\hat{k}$) il flusso è nullo, in quanto $E_z = 0$;
- 2) Per le due facce parallele al piano xz il flusso è nullo, in quanto E_y è costante, e

quindi il flusso entrante è uguale a quello uscente;

3) Per la faccia parallela al piano yz il flusso è nullo in quanto $E_x(x = 0) = 0$, mentre per la faccia con $x = a$ si ha $E_x(x = a) = ca$ e dunque il flusso vale $ca(a^2) = ca^3$.

In definitiva:

$$\Phi_E = 0 + ca^3 + da^2 - da^2 + 0 + 0 = ca^3 = Q_{\text{int}}/\epsilon_0 \Rightarrow Q_{\text{int}} = ca^3 \epsilon_0.$$

Un metodo alternativo (e più veloce) consiste nell'usare il teorema della divergenza:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = Q_{\text{int}}/\epsilon_0,$$

dove, in questo caso:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (cx, d, 0) = c.$$

Quindi, essendo la divergenza di $\vec{E}$ costante, si può scrivere:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = c \int_V dV = cV = ca^3 = Q_{\text{int}}/\epsilon_0 \Rightarrow Q_{\text{int}} = ca^3 \epsilon_0.$$

Esercizio 2

Un generatore di resistenza interna $r = 5 \Omega$ è collegato, mediante un circuito di resistenza trascurabile, a un resistore di resistenza $R = 100 \Omega$. Se l'energia dissipata nel resistore in un tempo $\Delta t = 1 \text{ ms}$ è 10^{-5} J , determinare la forza elettromotrice del generatore e la corrente che circola nel circuito.

Soluzione Esercizio 2

Poiché la corrente è stazionaria, l'energia dissipata nel resistore nel tempo Δt vale $E = Ri^2 \Delta t$, da cui:

$$i = \sqrt{\frac{E}{R\Delta t}} = 0,01 \text{ A}.$$

La f.e.m. vale $\mathcal{E} = (R + r)i = 1,05 \text{ V}$.

Esercizio 3

Alice sta viaggiando in treno e porta con se un filo di rame infinitamente lungo e sottile disposto nella direzione di marcia del treno. La densità di carica lineare del filo è λ . Bob è invece fermo in stazione, e vede passare il treno con velocità v . Quanto valgono il campo elettrico e il campo magnetico misurato da Alice? E quanto valgono il campo elettrico e il campo magnetico misurato da Bob?

Soluzione Esercizio 3

Per Alice le cariche nel filo sono ferme, e nel suo sistema di riferimento non vi è corrente elettrica. Lei sperimenta dunque solo un campo elettrico pari a $E_{\text{Alice}} = 2k\lambda/r_A$, dove r_A è la distanza di Alice dal filo. Invece Bob vede una corrente elettrica $i = \lambda v$ e pertanto misura un campo magnetico $B_{\text{Bob}} = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r_B}$, dove r_B è la distanza di Bob dal filo. Anche Bob misura un campo elettrico $E_{\text{Bob}} = 2k\lambda/r_B$ ¹.

¹Si noti che le quantità riportate per Bob sono solo approssimate in quanto si dovrebbe far uso delle corrette formule relativistiche.