Fisica Generale T2 - Prof. M. Sioli

CdL in Ingegneria Civile

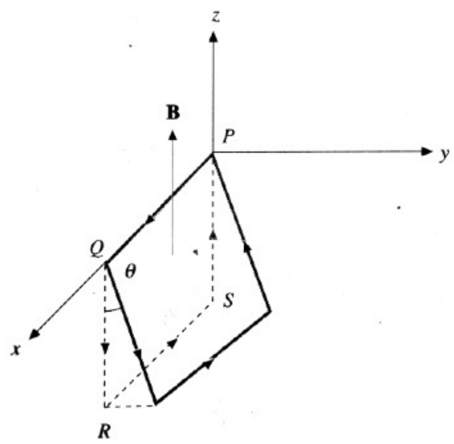
11 Gennaio 2018

Scritto - Elettromagnetismo

Esercizi:

1) Una carica $q = 1.39 \cdot 10^{-8}$ C è distribuita con densità superficiale uniforme σ su una corona circolare piana di raggio interno $R_1 = 20$ cm e raggio esterno $R_2 = 30$ cm.
   1) Determinare le espressioni del campo elettrostatico $\overrightarrow{\mathbf{E}}(x)$ e del potenziale $V(x)$ sull'asse x della corona.
   2) Calcolare la forza che agisce su una carica $q = 10^{-8}$ C libera di muoversi in un punto P di coordinata $x = 20$ cm, sull'asse della corona.

2) Una spira rettangolare rigida, di lati $PQ = RS = a = 20$ cm e $QR = SP = b = 10$ cm, ha una massa per unità di lunghezza $\mu = 5 \cdot 10^{-2}$ g/cm ed è percorsa da una corrente i. Essa può ruotare senza attrito intorno a PQ che è parallelo all'asse x orizzontale. Quando sulla spira agisce un campo magnetico uniforme e verticale $\overrightarrow{\mathbf{B}} = B\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{z}$, con $B = 2 \cdot 10^{-2}$ T, essa è percorsa da una corrente $i = 2$ A. Calcolare
   1) il momento torcente magnetico iniziale ($\theta = 0$);
   2) l'angolo θ di equilibrio stabile della spira;
   3) il lavoro L fatto dalle forze magnetiche durante la rotazione.



Domande:

1) Discutere l'effetto Hall.
2) Illustrare le caratteristiche di un campo elettrico prodotto da un dipolo.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.
Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ $C^2/(Nm^2)$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Ns^2/C^2.

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. Consideriamo un anello concentrico alla corona, di raggio r ($R_1 < r < R_2$) e area $d\Sigma = 2\pi r dr$ sul quale c'è una carica $dq = \sigma d\Sigma = \sigma 2\pi r dr$. Allora il potenziale generato da questo anello è dato da

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r'} = \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{rdr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

dove abbiamo scritto il vettore posizione del punto P come $r' = \sqrt{x^2+r^2}$.
Integrando su tutta la corona, abbiamo

$$V = \int_\Sigma dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{rdr}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}[\sqrt{x^2+r^2}]_{R_1}^{R_2} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{x^2+R_2^2} - \sqrt{x^2+R_1^2})$$

Per quanto riguarda il campo elettrico, conoscendo il potenziale possiamo scrivere

$$E(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+R_2^2} - \sqrt{x^2+R_1^2}) =$$

$$= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\frac{x}{\sqrt{x^2+R_2^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+R_1^2}}) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}(\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}) .$$

2. Per calcolare la forza che agisce sulla carica q, basta ricordare che $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$, quindi

$$F = qE(x) = q\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}(\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}) =$$

$$= 10^{-8}\,\mathrm{C}\frac{8.86\cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\cdot 0.2\,\mathrm{m}}{2\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}^2/(\mathrm{Nm}^2)}(\frac{1}{\sqrt{0.08\,\mathrm{m}^2}} - \frac{1}{\sqrt{0.13\,\mathrm{m}^2}}) = 1524\,\mathrm{N}$$

avendo calcolato precedentemente la densità superficiale di carica:

$$\sigma = \frac{q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = 8.86\cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} .$$

2) 1. Il momento torcente magnetico che agisce sulla spira è dato da

$$\overrightarrow{\mathbf{M}} = \overrightarrow{\mathbf{m}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = i\Sigma\,\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = iabB\sin\phi\;\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} = iabB\cos\theta\;\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}}$$

dove $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}$ è il versore normale e uscente dalla superficie della spira e Σ è l'area racchiusa dalla spira, ovvero $\Sigma = ab$.

L'angolo ϕ è l'angolo compreso tra il versore $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{B}}$, ossia
$\phi = 180^\circ - 90^\circ - \theta = 90^\circ - \theta$

ecco perché $\sin\phi = \cos\theta$.

Quindi, il momento torcente iniziale, ovvero quando la spira si trova a $\theta = 0^\circ$:

$$M = iabB = 2\,\mathrm{A}\cdot 0.2\,\mathrm{m}\cdot 0.1\,\mathrm{m}\cdot 2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{T} = 8\cdot 10^{-4}\,\mathrm{Nm}$$

2. Nel caso di equilibrio stabile, sulla spira agiscono la forza magnetica (verticale verso l'alto) e la forza peso (verticale verso il basso). Allora avremo:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}} + \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}} = 0$$

dove

$\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}_{\mathbf{P}} \times \overrightarrow{\mathbf{F}}$ dove $\overrightarrow{\mathbf{b}}_{\mathbf{P}}$ è il braccio della forza peso $\overrightarrow{\mathbf{F}}$, che sappiamo agire sul centro di massa della spira che è a coordinate $x_{CM} = (a/2, b/2)$.

Quindi

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}_{\mathbf{P}} \times \overrightarrow{\mathbf{F}} = -\frac{b}{2}F_P\sin\theta\;\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} = -\frac{b}{2}mg\sin\theta\;\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}}$$

Conoscendo la densità di massa, possiamo scrivere

$$m = \mu\cdot l_{\mathrm{TOT}} = \mu\cdot 2(a+b)$$

quindi

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}} = -\frac{b}{2}mg\sin\theta\;\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} = -\frac{b}{2}2\mu(a+b)g\sin\theta\;\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} = -\mu\, b(a+b)\,g\sin\theta\;\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}}$$

Sostituendo nella relazione che definisce l'equilibrio stabile:

$$iabB\cos\theta\;\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} - \mu\, b(a+b)\,g\sin\theta\;\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} = 0$$

$$\sin\theta = \frac{iabB}{\mu\, b(a+b)\, g}\cos\theta = \frac{iaB}{\mu\,(a+b)\, g}\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{iaB}{\mu\,(a+b)\, g} = \frac{2\,\mathrm{A}\cdot 0.2\,\mathrm{m}\cdot 2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}}{5\cdot 10^{-1}\,\mathrm{kg/m}\cdot 0.3\,\mathrm{m}\cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}} = 0.54$$

Allora

$$\theta = \arctan(0.54) = 28.4^\circ\ .$$

3. Per calcolare il lavoro fatto dalle forza magnetiche nella rotazione da 0 a 30°, consideriamo solo il momento torcente magnetico:

$$L = \int_0^\theta M d\theta = iabB\int_0^\theta \cos\theta d\theta = iabB\sin(28.4^\circ) =$$

$$= 2\,\mathrm{A}\cdot 0.2\,\mathrm{m}\cdot 2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}\cdot 0.476 = 3.81\cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$$