

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. $q_1 = q_3 = q_5 = q = 10^{-10} \text{ C}$
 $q_2 = q_4 = -q = -10^{-10} \text{ C}$

2. Il campo elettrico è

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \neq 0 \quad \text{nelle zone A (tra il guscio 1 e 2), B (tra il guscio 3 e 4) e C (fuori dal guscio 5)}$$

Ricordando che l'energia elettrostatica è definita come

$$U_e = \int dU_e = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

allora

$$U_e = U_A + U_B + U_C = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_5} = 3,51 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

3. Se si mettono in contatto le superfici 1 e 2, il campo si annulla nella zona A, quindi $U_A = 0$. Allora

$$U_e = U_B + U_C \quad \text{e} \quad \Delta U_e = U_A = 2,25 \cdot 10^{-9} \text{ J.}$$

Nelle zone esterne non succede nulla, per le proprietà di schermo.

Se si mettono in contatto le superfici 3 e 4, il campo si annulla nella zona B, quindi $U_B = 0$. Allora

$$U_e = U_A + U_C \quad \text{e} \quad \Delta U_e = -0,36 \cdot 10^{-9} \text{ J.}$$

All'interno e all'esterno non succede nulla.

Se si mettono la superficie 5 a terra, il campo esterno è nullo, quindi $U_C = 0$. Allora

$$U_e = U_A + U_B \quad \text{e} \quad \Delta U_e = -0,90 \cdot 10^{-9} \text{ J.}$$

All'interno non cambia nulla.

- 2) 1. Si consideri un elettrone a distanza r dall'asse. Questo è soggetto a una forza di Lorentz

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{dove} \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

quindi si ha una forza $\vec{F}_r$ che agisce sull'elettrone:

$$\vec{F}_r = e[(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B}] = e\omega B \vec{r} \quad \text{dove } e \text{ è la carica dell'elettrone.}$$

Quindi il campo elettrico equivalente è

$$E = -\omega B r$$

e la differenza di potenziale tra C_2 e C_1 è

$$V = - \int_0^{r_0} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \omega B \int_0^{r_0} r dr = \frac{\omega B r_0^2}{2} .$$

La corrente I attraverso la resistenza R è, quindi, data da

$$I = \frac{V}{R} = \frac{\omega B r_0^2}{2R} = \omega \frac{2 \text{ T} \cdot (0.5 \text{ m})^2}{2 \cdot 10 \Omega} = (5 \cdot 10^{-2}) \text{ A s}$$

2. La potenza dissipata P nella resistenza può essere scritta come

$$P = I^2 R = \frac{\omega^2 B^2 r_0^4}{4R}$$

Per condizioni stazionarie, assumiamo che $\omega = \omega_f = \text{cost}$, e avendo assunto che $I_d \ll MR^2$ (quindi trascurabile), possiamo dire che, per la conservazione dell'energia:

$$\frac{\omega^2 B^2 r_0^4}{4R} = M g r_0 \omega_f$$

quindi

$$\omega_f = \frac{4MgR}{B^2 r_0^3} = 19.6 \text{ 1/s}$$

La corrente I associata è

$$I_f = \frac{\omega_f B r_0^2}{2R} = 0.98 \text{ A} .$$