Esame scritto di Fisica Generale T-B

(CdL Ingegneria Civile)

Prof. M. Sioli

III appello dell'A.A. 2018-2019 - 11/02/2019

Esercizi

Esercizio 1

In un impianto di produzione di energia elettrica è presente un cavo elettrico di lunghezza $L = 6\,\text{m}$, di materiale a resistività $\rho = 3 \cdot 10^{-4}\,\Omega\text{m}$, a sezione circolare variabile, suddiviso in tre parti: A, B e C. Il primo tratto (A) di tale cavo, per una lunghezza $L/3$ ha una sezione di raggio $r_1 = 2\,\text{mm}$, l'ultimo tratto (C), per una lunghezza pari a $L/3$ ha una sezione di raggio $r_2 = 2r_1$. Il tratto centrale (B) ha una sezione a raggio linearmente crescente con la distanza tra r_1 e r_2. Sapendo che il cavo è percorso da una corrente di $I = 240\,\text{A}$, calcolare:
a) la resistenza elettrica R_B del tratto B;
b) la resistenza elettrica R_{tot} dell'intero cavo;
c) il valore massimo del modulo del campo elettrico ed individuare in quale tratto è presente.

Soluzione Esercizio 1

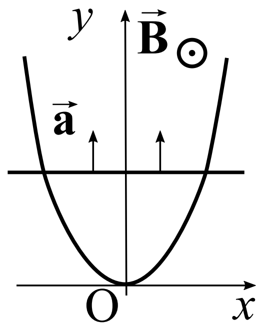
Il tratto centrale ha la forma di un tronco di cono con basi di dimensioni molto piccole rispetto all'altezza. Poniamo l'altezza del cono lungo l'asse x in modo che la base maggiore, di raggio r_2, sia in $x = 0$ e la base minore, di raggio r_1, sia in $x = L/3$. Al variare della quota x il raggio varia in maniera lineare secondo la formula $r(x) = r_2 - (r_2 - r_1)x/(L/3) = r_1(2 - 3x/L)$. Ora sezioniamo il cono con due piani perpendicolari all'asse x nelle posizioni x e $x + \text{d}x$. In prima approssimazione otteniamo un dischetto di raggio $r(x)$, altezza $\text{d}x$, attraversato dalla corrente I e di resistenza infinitesima: $\text{d}R(x) = \rho\text{d}x/S$ con $S = \pi r^2(x)$.
La resistenza del tratto centrale si trova facendo la serie di tutti i possibili dischetti in cui è possibile sezionare il filo. Da cui:

$$
\begin{aligned}
R_B &= \int \text{d}R(x) = \int_0^{L/3} \frac{\rho}{\pi r^2(x)}\text{d}x = \frac{\rho}{\pi r_1^2}\int_0^{L/3} \frac{\text{d}x}{(2-3x/L)^2} = \frac{\rho L^2}{\pi r_1^2}\int_0^{L/3} \frac{\text{d}x}{(2L-3x)^2} = \\
&= \frac{\rho L^2}{\pi r_1^2}\left[\frac{1}{3(2L-3x)}\right]_0^{L/3} = \frac{\rho L^2}{\pi r_1^2}\left(\frac{1}{3L} - \frac{1}{6L}\right) = \frac{\rho L}{6\pi r_1^2} = 23{,}9\ \Omega
\end{aligned}
$$

b) Si calcola facilmente la resistenza di A e di C: $R_A = \rho\frac{L}{3\pi r_1^2}$ e $R_C = \rho\frac{L}{3\pi r_2^2} = \rho\frac{L}{4\cdot 3\pi r_1^2} = R_A/4$. La resistenza complessiva del filo vale: $R_{\text{tot}} = R_A + R_B + R_C = R_A \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}R_A = 83{,}6\ \Omega$
c) Dalla legge di Ohm microscopica si ha $\vec{\mathbf{E}} = \rho\vec{\mathbf{J}}$. Passando ai moduli, $E = \rho I/[\pi r^2(x)]$. È quindi chiaro che il campo elettrico ha il massimo modulo dove la sezione è minore, cioè in tutto il tratto A. Si ha dunque:

$$E_{\max} = \rho\frac{I}{\pi r_1^2} = 5{,}73\ \text{kV/m}.$$

Esercizio 2



In un piano xy è presente un cavo metallico, di resistenza trascurabile, a forma di parabola $y = bx^2$ con $b = 0{,}2\ \mathrm{m}^{-1}$, che è immerso in un campo magnetico uniforme e costante $\vec{\mathbf{B}} = B_0\,\hat{\mathbf{k}}$, con $B_0 = 3{,}4$ T. All'istante $t = 0$ s una barretta a sezione cilindrica, di raggio $r = 3$ mm e di materiale avente resistività $\rho_R = 5 \cdot 10^{-5}\ \Omega$m, inizia a traslare lungo la parabola, partendo dal suo vertice, con accelerazione costante $\vec{\mathbf{a}} = (0{,}4\ \mathrm{m/s^2})\,\hat{\mathbf{j}}$ e, toccando ai due lati il cavo metallico, forma un percorso chiuso. Calcolare:

a) la forza elettromotrice indotta sulla spira nel generico istante di tempo t;

b) la corrente elettrica che circola nell'istante di tempo $\bar{t} = 5$ s.

Soluzione Esercizio 2

La sbarra orizzontale si muove con una legge oraria data da $y(t) = at^2/2$. I punti di intersezione con la parabola ($y(x) = bx^2$) sono dati da $y(t) = y(x) \Rightarrow at^2/2 = bx^2$, da cui $\bar{x}(t) = \pm t\sqrt{\frac{a}{2b}}$. Possiamo calcolare l'area tra la sbarra orizzontale, di ordinata $\bar{y}(\bar{x}) = b\bar{x}^2$, e la parabola con:

$$S(t) = \int_{-\bar{x}}^{+\bar{x}} \left(\bar{y} - bx^2\right) \mathrm{d}x = \left[\bar{y}x - \frac{b}{3}x^3\right]_{-\bar{x}}^{+\bar{x}} = 2\bar{x}\bar{y} - \frac{2b}{3}\bar{x}^3 = \frac{4}{3}b\bar{x}^3 = \frac{4}{3}b\left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{3}{2}} t^3$$

La forza elettromotrice è quindi calcolabile come:

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -B_0\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = -4B_0 b\left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{3}{2}} t^2$$

b) La resistenza elettrica del conduttore è pari a: $R = \rho(2\bar{x})/(\pi r^2) = \frac{2\rho}{\pi r^2}\sqrt{\frac{a}{2b}}t$. La corrente elettrica al tempo $\bar{t}$ è quindi:

$$I(\bar{t}) = \frac{\varepsilon}{R(\bar{t})} = \left[-4B_0 b\left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{3}{2}} t^2\right] / \left[\frac{2\rho}{\pi r^2}\sqrt{\frac{a}{2b}}t\right] = \frac{\pi r^2 a B_0}{\rho} t = 3{,}84\ \mathrm{A}$$