Esame scritto di Fisica Generale T-B

(CdL Ingegneria Civile)

Prof. M. Sioli

V appello dell'A.A. 2018-2019 - 08/07/2019

Esercizi

Esercizio 1

Un condensatore è costituito da due armature metalliche a forma di disco, una di raggio $R_1 = 5\,\text{cm}$ e l'altra di raggio $R_2 = 2\,\text{cm}$, disposte sullo stesso asse di simmetria ad una distanza $d = 0{,}3\,\text{mm}$. I due dischi sono inizialmente scarichi e vengono collegati all'istante $t = 0\,\text{s}$ ad un generatore di ddp $\varepsilon = 1{,}5\,\text{V}$ e resistenza interna $r_i = 8\,\Omega$.
Nelle approssimazioni che si riterrà utile introdurre, determinare:
a) la capacità C del condensatore, motivando opportunamente le proprie scelte;
b) la carica Q che si trova sulle armature a tempi lunghi;
c) l'energia immagazzinata E_i nel condensatore a tempi lunghi e l'energia dissipata E_d durante la fase di carica.

Soluzione Esercizio 1

Le due armature hanno forma diversa e per esse vale l'osservazione che la distanza che le separa è piccola rispetto alla loro dimensione. Il campo al centro del sistema sarà quindi analogo a quello di un normale condensatore a facce piane e parallele, $|\vec{\mathbf{E}}| = \sigma/\varepsilon_0$, dove $\sigma > 0$ è la densità di carica. Allontanandosi dall'asse, il campo sarà ancora approssimabile a quello di un condensatore a facce piane e parallele almeno fino a quando non si raggiunge il bordo del disco più piccolo. Facciamo l'approssimazione che il campo abbia una transizione brusca in prossimità del bordo e che quindi sia pari a $|\vec{\mathbf{E}}| = \sigma/\varepsilon_0$ dove c'è il disco piccolo e nullo fuori. Assumendo che vi sia uniformità di carica sull'armatura piccola, la carica totale sarà quindi data da $|Q| = |\sigma|\pi R_2^2$. La stessa carica, cambiata di segno sarà presente sull'armatura grande, dove però la densità di carica non sarà uniforme: sarà pari a $-\sigma$ per quella parte di armatura di fronte all'armatura piccola e nulla altrove. Il sistema si comporta quindi come un condensatore a facce piane e parallele con armature di area $S = \pi R_2^2$.
a) La capacità è pari a $C = \varepsilon_0 S/d = \varepsilon_0 \pi R_2^2/d = 37{,}1\,\text{pF}$.
b) $Q_0 = C\varepsilon = 55{,}6\,\text{pC}$
c) L'energia immagazzinata vale $E_i = \frac{1}{2}Q\varepsilon = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 = 41{,}7\,\text{pJ}$.

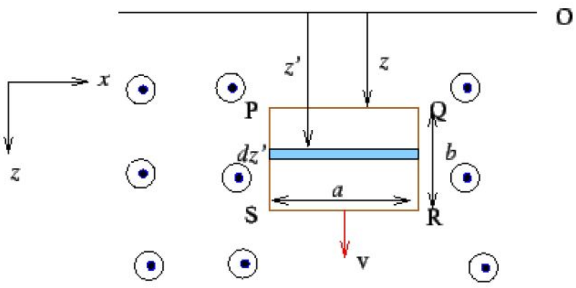
Per il calcolo di energia dissipata occorre considerare che il circuito di carica è un tipico circuito RC, dove la costante di tempo è data da $\tau = r_i C$ e la carica sul condensatore varia secondo la legge $Q(t) = Q_0[1-\exp(-t/\tau)]$. La corrente vale quindi $I(t) = \dot{Q}(t) = (Q_0/\tau)\exp(-t/\tau)$. Istante per istante la potenza dissipata è data dalla legge di Joule $P = r_i I^2$ e quindi l'energia dissipata sarà data da:

$$E_d = \int_0^{+\infty} P\mathrm{d}t = r_i Q_0^2/\tau^2 \int_0^{+\infty} \exp(-t/\tau)\mathrm{d}t = \frac{r_i Q_0^2}{2\tau} = \frac{Q_0^2}{2C} = E_i$$

L’energia dissipata è quindi uguale a quella immagazzinata: per caricare il condensatore serve il doppio dell’energia che verrà poi immagazzinata su di esso.

Esercizio 2

Una spira rettangolare di lati $a = 20\,\mathrm{cm}$ e $b = 10\,\mathrm{cm}$, massa $m = 80\,\mathrm{g}$ e resistenza elettrica $R = 12\ \Omega$ è posta verticalmente in una regione in cui, oltre al campo gravitazionale terrestre $\vec{\mathbf{g}} = g\hat{\mathbf{k}}$, è presente un campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ dipendente dalla quota secondo la legge $\vec{\mathbf{B}} = (B_0 + kz)\hat{\mathbf{j}}$ (vedi figura). Sapendo che la spira è posta inizialmente ferma in verticale con il lato più alto a $z = 0$, e che $B_0 = 5\,\mathrm{T}$ e $k = 20\,\mathrm{T/m}$, calcolare a) l'espressione della velocità in funzione del tempo, e b) la velocità limite.



Soluzione Esercizio 2

Per il calcolo della forza (verticale) a cui è soggetta la spira, dobbiamo prima calcolare la corrente che circola nel circuito, a partire alla legge di Faraday-Neumann-Lenz. A tale scopo, calcoliamo il flusso elementare su una sottile striscia di lati a e $\mathrm{d}z$ come indicato in figura: $\mathrm{d}\Phi = (B_0 + kz)a\mathrm{d}z$. Il flusso totale attraverso la spira, quando il suo lato superiore si trova a una distanza z dalla quota iniziale, risulta essere:

$$\Phi(z) = \int \mathrm{d}\Phi = \int_z^{z+b} (B_0 + kz')a\mathrm{d}z' = B_0 ab + \frac{ka}{2}(2zb + b^2).$$

La f.e.m. indotta è pertanto $\epsilon = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = kab\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = kabv(t)$ e la corrente, $i(t) = kabv(t)/R$, circola in senso orario in accordo con la legge di Lenz.

Le forze magnetiche agenti sui due tratti verticali si annullano, mentre quelle agenti sui tratti orizzontali superiore e inferiore sono $iaB(z)\hat{\mathbf{k}}$ e $iaB(z+b)\hat{\mathbf{k}}$, rispettivamente. La forza magnetica complessiva agente sulla spira è dunque:

$$\vec{F}_m = iaB(z)\hat{\mathbf{k}} - iaB(z+b)\hat{\mathbf{k}} = ia(B_0 + kz)\hat{\mathbf{k}} - ia[B_0 + k(z+b)]\hat{\mathbf{k}} = -iabk\hat{\mathbf{k}} = -(kab)^2\frac{v}{R}\hat{\mathbf{k}},$$

diretta verso l'alto. Per la seconda legge della dinamica possiamo scrivere $\vec{F}_g + \vec{F}_m = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, ovvero (lungo la direzione z):

$$mg - \frac{(kab)^2}{R}v = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Indicando con $\xi \equiv \frac{(kab)^2}{mR}$, risolviamo l'equazione differenziale di primo grado (identica a quella di un circuito RC):

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \xi v \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{g - \xi v} = \mathrm{d}t.$$

Sostituendo $v' = g - \xi v$ si ha $\mathrm{d}v' = -\xi\mathrm{d}v$ da cui:

$$\int_g^{g-\xi v} \frac{-\mathrm{d}v'}{\xi v'} = \int_0^t \mathrm{d}t' \quad \Rightarrow -\frac{1}{\xi}\ln\frac{g - \xi v}{g} = t \quad \Rightarrow g - \xi v = g\exp(-\xi t) \quad \Rightarrow v = \frac{g}{\xi}[1 - \exp(-\xi t)]$$

ovvero

$$v(t) = \frac{mgR}{(kab)^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{(kab)^2}{mR}t\right)\right].$$

Per $t \to \infty$ si ha:

$$v_\infty = \frac{mgR}{(kab)^2} = 6{,}54\,\mathrm{m/s}\,.$$