

Esame scritto di Fisica Generale T-B

(CdL Ingegneria Civile)

Prof. M. Sioli

VI appello dell'A.A. 2018-2019 - 04/09/2019

Esercizi

Esercizio 1

Sia dato un disco sottile di materiale isolante, di raggio $R = 5$ cm, su cui è distribuita uniformemente una carica $Q = 2$ nC. Introdotta un sistema di riferimento (SdR) in cui il centro del disco costituisce l'origine del SdR, il piano xy è il piano del disco sottile, si valuti, per una generica posizione $(0, 0, z)$ sull'asse del disco, con $z > 0$: a) il campo elettrico quando $z \ll R$; b) il campo elettrico quando $z \gg R$ e c) il campo elettrico in una posizione z generica.

Soluzione Esercizio 1

I casi a) e b) devono ovviamente ricondursi a quello del campo elettrico generato da una superficie infinita e a quello generato da una carica puntiforme, rispettivamente. Nel primo caso ($z \ll R$):

$$E(z \ll R) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = k \frac{2Q}{R^2} = 1,44 \cdot 10^4 \text{ V/m.} \quad (1)$$

essendo $Q = \sigma\pi R^2$. Nel secondo caso ($z \gg R$):

$$E(z \gg R) = k \frac{Q}{z^2}. \quad (2)$$

Il caso generico c) può essere facilmente trattato in modo diretto, oppure considerando il caso notevole affrontato a lezione, dove è stato ricavato il potenziale in una posizione generica sull'asse positivo:

$$V(z) = k \frac{2Q}{R^2} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right) \quad z > 0.$$

Il campo elettrico in un punto generico dell'asse positivo vale quindi:

$$\mathbf{E}(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = k \frac{2Q}{R^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \hat{\mathbf{k}}, \quad (3)$$

che è sempre positivo, come atteso. Si può anche verificare che l'espressione (3) si riduce alla (1) e alla (2) quando $z \ll R$ e $z \gg R$, rispettivamente. Nel primo caso, basta sostituire $z = 0$ nella (3), e si ottiene direttamente la (1). Nel secondo caso, si può riscrivere la (3) in funzione della variabile $\xi = R/z \ll 1$:

$$\mathbf{E}(\xi) = k \frac{2Q}{R^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \right) \hat{\mathbf{k}}. \quad (4)$$

Sviluppando $(1 + \xi^2)^{-1/2}$ intorno a $\xi = 0$ si ottiene $(1 + \xi^2)^{-1/2} = 1 - \xi^2/2$, che sostituita nella (4) fornisce:

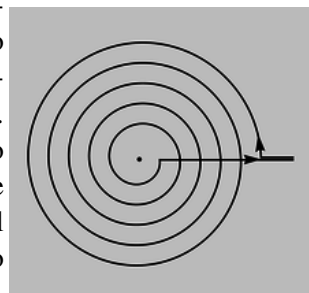
$$\mathbf{E}(\xi) = \mathbf{E}(z \gg R) \simeq k \frac{2Q}{R^2} \left(\frac{\xi^2}{2} \right) = k \frac{Q}{z^2} \hat{\mathbf{k}}, \quad (5)$$

che coincide con la (2).

Nota bene: valutare il campo elettrico per $z \gg R$ non vuol dire valutare il campo elettrico quando $z \rightarrow \infty$. In quest'ultimo caso, ovviamente, $E \rightarrow 0$.

Esercizio 2

La figura mostra una spira piana attraversata da una corrente $I = 3\text{ A}$ e sagomata in forma di spirale di Archimede, dove un unico filo è avvolto in modo che spire contigue siano equispaziate (vedi figura). La spirale può essere rappresentata, in coordinate polari piane, dall'equazione $r = a - k\theta$, con a e k costanti. Sapendo che la spirale ha $N = 25$ avvolgimenti, partendo da un raggio massimo $r_{\max} = a = 10\text{ cm}$ e terminando ad un raggio minimo $r_{\min} = b = 5\text{ cm}$, che il filo ha sezione $S = 1\text{ mm}^2$ e resistività $\rho = 10^{-6}\Omega\text{m}$, determinare: a) il valore di k e, anche in maniera approssimata, b) il campo magnetico al centro (modulo, direzione e verso); c) la resistenza elettrica della spirale.



Soluzione Esercizio 2

a) Il raggio massimo dell' n -esima spira è $R_n = a - 2\pi kn$. Quindi il valore di k si ottiene imponendo:

$$a - 2\pi k \cdot 25 = b \Rightarrow k = \frac{a - b}{50\pi} = 3,18 \cdot 10^4 \text{ m}.$$

b) Usando le coordinate cilindriche, per questo problema $\vec{dl} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta}$ e la prima legge di Laplace può essere scritta in questo modo:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{rd\theta \hat{\theta} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\theta}{r} \hat{z}.$$

Quindi direzione e verso del campo $\vec{B}$ sono quelli dell'asse verticale verso l'alto, mentre il modulo si ottiene integrando:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{50\pi} \frac{d\theta}{a - k\theta}.$$

Sostituendo la variabile $r = a - k\theta$ ($dr = -kd\theta$) l'integrale diventa:

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi k} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi k} \ln \frac{a}{b} = 6,54 \cdot 10^{-4} \text{ T}.$$

Un valore approssimato può essere ottenuto considerando il campo magnetico al centro di due spire di raggio a e b percorse da una corrente $25I$:

$$B_a = \frac{\mu_0 25I}{2a} = 4,71 \cdot 10^{-4} \text{ T}, \quad B_b = \frac{\mu_0 25I}{2b} = 9,42 \cdot 10^{-4} \text{ T}.$$

Il valore intermedio $B_{\text{appr}} \approx 7 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ approssima bene il valore esatto.

c) La resistenza si ottiene usando la formula $R = \rho l/S$, dove la lunghezza della spirale (data dalla lunghezza della spirale archimedeana) è ricavabile in forma chiusa, seppur in modo alquanto laborioso. Approssimando la lunghezza come quella di 25 spire di raggio $(a + b)/2$, otteniamo:

$$R = \frac{\rho}{S} 25 \cdot 2\pi \frac{a + b}{2} = \frac{\rho}{S} 25\pi(a + b) = 11,8 \Omega.$$