CALCOLO VETTORIALE

EX 1

Due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ soddisfano le seguenti condizioni: i) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, ii) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 21$, iii) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = 28$. Calcolare i moduli dei vettori e l'angolo compreso.

EX 2

Un vettore $\vec{a}$ di modulo pari a 8 forma con gli assi cartesiani x e y di un sistema di riferimento un angolo di 45° . Esprimere il vettore in coordinate cartesiane.

EX 3

Trovare il vettore $\vec{v}_1$ che sommato ai vettori $\vec{v}_2 = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ e $\vec{v}_3 = 4\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ dia come risultante $\vec{v} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$.

EX 4

Dati due vettori $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ e $\vec{b} = 5\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$ calcolare: somma, differenza, prodotto scalare e prodotto vettoriale.

EX 5

Verificare che i vettori $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$ e $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$ sono due versori ortogonali. Trovare il versore $\vec{w}$ che coi primi due forma una terna ortogonale.

EX 6

Dati i vettori $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ e $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ trovare: l'angolo compreso fra $\vec{a}$ e $\vec{b} - \vec{c}$, la proiezione di $\vec{a}$ su $\vec{b} + 2\vec{c}$, il risultato dell'operazione $\vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{a})$, il versore perpendicolare al piano in cui giacciono i vettori $\vec{b}$ e $\vec{c}$

EX 7

Il vettore $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ è applicato nel punto A(1,0,1). Calcolare il momento polare $\vec{m}_0$ di $\vec{a}$ rispetto all'origine degli assi e il momento assiale rispetto all'asse x.

EX 8

Il vettore $\vec{v}$ ha come origine il punto A(1,3,5) e come secondo estremo il punto B(1,1,2). Calcolare: a) il momento polare di $\vec{v}$ rispetto al punto P(0,0,1); b) il momento assiale del vettore rispetto alla retta passante per P la cui direzione è data

dal versore $\vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

SOLUZIONI

EX 1

Utilizzo tutte le informazioni che ho sui due vettori mettendole a sistema per ottenere 3 equazioni nelle 3 incognite che devo trovare: modulo di a, modulo di b e l'angolo che formano tra loro. Usando la definizione di prodotto scalare fra due vettori:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha = 12 \\ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} = a^2 \cos 0 + ab \cos \alpha = 21 \\ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha + b^2 \cos 0 = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \cos \alpha = 12 \\ a^2 + ab \cos \alpha = 21 \\ ab \cos \alpha + b^2 = 28 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab \cos \alpha = 12 \\ a^2 + 12 = 21 \\ 12 + b^2 = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \cos \alpha = 12 \\ a^2 = 9 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ \cos \alpha = \frac{12}{ab} = \frac{12}{3 \cdot 4} = 1 \end{cases} \quad \text{quindi} \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

EX 2

Un vettore generico in coordinate cartesiane si scrive $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ dove a_x , a_y e a_z sono le componenti del vettore sugli assi del sistema di riferimento e $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ sono i versori del sistema di riferimento cartesiano. Per trovare le componenti del vettore di modulo 8 si deve proiettare il vettore sugli assi. L'ultima componente la trovo usando la definizione di modulo di un vettore (il risultato era ovvio considerando che il sistema di riferimento in questione era bidimensionale).

$$a_x = a \cdot \cos \alpha = 8 \cdot \cos 45 = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$a_y = a \cdot \sin \alpha = 8 \cdot \sin 45 = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$a_z = \sqrt{a^2 - a_x^2 - a_y^2} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{64 - 32 - 32} = 0$$

Quindi il vettore in componenti cartesiane diventerà: $\vec{a} = 4\sqrt{2}\hat{i} + 4\sqrt{2}\hat{j}$

EX 3

Devo trovare i coefficienti in coordinate cartesiane del vettore $\vec{v}_1 = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ tale che $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v}$ (in forma vettoriale).

La condizione sopra espressa in coordinate cartesiane si esprime come:

$$\begin{cases} v_{1x} + v_{2x} + v_{3x} = v_x \\ v_{1y} + v_{2y} + v_{3y} = v_y \\ v_{1z} + v_{2z} + v_{3z} = v_z \end{cases}$$

Sostituendo i valori numerici il sistema diventa

$$\begin{cases} a+2+4=3 \\ b+3-1=2 \\ c-2+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

Il vettore si scrive quindi $\vec{v}_1 = -3\hat{i} + 2\hat{k}$

EX 4

Eseguiamo tutte le operazioni in coordinate cartesiane.

Somma

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) + (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) = \\ &= (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k} = \\ &= (1 + 5)\hat{i} + (3 + 5)\hat{j} + (-4 + 6)\hat{k} = \\ &= 6\hat{i} + 8\hat{j} + 2\hat{k} \end{aligned}$$

Differenza

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) - (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) = \\ &= (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} - (a_z + b_z)\hat{k} = \\ &= (1 - 5)\hat{i} + (3 - 5)\hat{j} + (-4 - 6)\hat{k} = \\ &= -4\hat{i} - 2\hat{j} - 10\hat{k} \end{aligned}$$

Prodotto scalare

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) = \\ &= a_x b_x \hat{i} \cdot \hat{i} + a_x b_y \hat{i} \cdot \hat{j} + a_x b_z \hat{i} \cdot \hat{k} + \\ &+ a_y b_x \hat{j} \cdot \hat{i} + a_y b_y \hat{j} \cdot \hat{j} + a_y b_z \hat{j} \cdot \hat{k} + \\ &+ a_z b_x \hat{k} \cdot \hat{i} + a_z b_y \hat{k} \cdot \hat{j} + a_z b_z \hat{k} \cdot \hat{k} = \\ &= a_x b_x \hat{i} \cdot \hat{i} + 0 + 0 + 0 + a_y b_y \hat{j} \cdot \hat{j} + 0 + 0 + a_z b_z \hat{k} \cdot \hat{k} = \\ &= 1 * 5 * 1 + 3 * 5 * 1 + (-4) * 6 * 1 = \\ &= 5 + 15 - 24 = -4 \end{aligned}$$

Prodotto vettoriale

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} = \\ &= (3 * 4 - 4 * 5) \hat{i} - (-4 * 5 - 1 * 6) \hat{j} + (1 * 5 - 3 * 5) \hat{k} = \\ &= 38 \hat{i} - 26 \hat{j} - 10 \hat{k}\end{aligned}$$

EX 5

Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo.
Un vettore è un versore se ha modulo unitario.

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)} = 1$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{4}{6}\right)} = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{2}{\sqrt{6}} = 0$$

Per ottenere un vettore ortogonale ai due dati basta fare il prodotto vettoriale tra i due, ricordandosi che il prodotto vettoriale fra due vettori ha come risultato un vettore che è perpendicolare a entrambi i vettori di partenza.

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \\ &= (u_y v_z - u_z v_y) \hat{i} - (u_x v_z - u_z v_x) \hat{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \hat{k} = \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \hat{i} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \hat{j} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \hat{k} = \\ &= -\frac{3}{\sqrt{18}} \hat{i} + \frac{3}{\sqrt{18}} \hat{j} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j}\end{aligned}$$

Verifico che sia un versore

$$|\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)} = 1$$

Un metodo alternativo poteva essere imporre un sistema di tre equazioni nelle 3 incognite date dalle componenti cartesiane del vettore cercato. Le prime due equazioni impongono che il vettore cercato sia perpendicolare ai due di partenza, mentre l'ultima impone che sia di modulo unitario.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \\ |\vec{w}| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0 \\ v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0 \\ w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} w_x + \frac{1}{\sqrt{3}} w_y + \frac{1}{\sqrt{3}} w_z = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} w_x + \frac{1}{\sqrt{6}} w_y - \frac{2}{\sqrt{6}} w_z = 0 \\ w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_x + w_y + w_z = 0 \\ w_x + w_y - 2w_z = 0 \\ w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_x = -w_y - w_z \\ -w_y - w_z + w_y - 2w_z = 0 \\ w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_z = 0 \\ w_x = -w_y \\ 2w_x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ w_y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ w_z = 0 \end{cases}$$

EX 6

Angolo compreso fra $\vec{a}$ e $\vec{b} - \vec{c}$.

Per prima cosa trovo il vettore risultante dalla differenza in componenti cartesiane poi calcolo l'angolo cercato dalla formula inversa del prodotto scalare.

$$\begin{aligned} \vec{d} = \vec{b} - \vec{c} &= (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) - (c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}) = (b_x - c_x) \hat{i} + (b_y - c_y) \hat{j} + (b_z - c_z) \hat{k} = \\ &= (1 - 2) \hat{i} + (-2 + 1) \hat{j} + (3 - 2) \hat{k} = -\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = |\vec{a}| |\vec{d}| \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{|\vec{a}| |\vec{d}|} = \frac{(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (-\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} * \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{-2 * 1\hat{i} \cdot \hat{i} + 1 * 1\hat{j} \cdot \hat{j} + 1 * 1\hat{k} \cdot \hat{k}}{\sqrt{6} * \sqrt{3}} = \frac{-2 + 1 + 1}{\sqrt{18}} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

La proiezione di $\vec{a}$ su $\vec{b} + 2\vec{c}$

Calcolo prima il vettore risultante dall'operazione $\vec{b} + 2\vec{c}$.

$$\begin{aligned} \vec{e} = \vec{b} + 2\vec{c} &= (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) + 2(c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}) = (b_x - c_x) \hat{i} + (b_y - c_y) \hat{j} + (b_z - c_z) \hat{k} = \\ &= (1 + 4) \hat{i} + (-2 - 2) \hat{j} + (3 + 4) \hat{k} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k} \end{aligned}$$

Per ottenere la proiezione ricordiamo la regola del prodotto scalare: $\vec{a} \cdot \vec{e} = |\vec{a}| |\vec{e}| \cos \alpha$

Notiamo che $|\vec{a}| \cos \alpha$ non è altro che la proiezione di $\vec{a}$ su $\vec{e}$ per cui la proiezione che cerchiamo si ottiene calcolando

$$a_e = |\vec{a}| \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}}{|\vec{e}|} = \frac{(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (5\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k})}{\sqrt{5^2 + 4^2 + 7^2}} = \frac{(2*5)\hat{i} \cdot \hat{i} + (1*4)\hat{j} \cdot \hat{j} + (1*7)\hat{k} \cdot \hat{k}}{\sqrt{25+16+49}} = \frac{10+4+7}{\sqrt{90}} = \frac{21}{3\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$$

Il risultato dell'operazione chiesta è

$$\begin{aligned} \vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{a}) &= (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) * (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \\ &= (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) * (2*1\hat{i} \cdot \hat{i} + 1*2\hat{j} \cdot \hat{j} + 1*3\hat{k} \cdot \hat{k}) = \\ &= (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) * (2+2+3) = (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) * 7 = 14\hat{i} - 7\hat{j} + 14\hat{k} \end{aligned}$$

da notare che il simbolo * indica un prodotto normale fra numeri mentre il pallino indica il prodotto scalare fra vettori.

NB: Il prodotto scalare fra vettori ha come risultato uno scalare (un numero puro).

Moltiplicare un vettore per uno scalare ha come risultato un vettore.

Per trovare il versore normale ai vettori b e c impongo un sistema di tre equazioni nelle tre incognite rappresentate dalle componenti cartesiane del versore cercato. Le prime due equazioni impongono che il versore sia normale ai vettori di partenza, mentre l'ultima equazione impone l'unitarietà del modulo.

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot \vec{b} = 0 \\ \hat{n} \cdot \vec{c} = 0 \\ |\hat{n}| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) = 0 \\ (n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}) \cdot (c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}) = 0 \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_x b_x + n_y b_y + n_z b_z = 0 \\ n_x c_x + n_y c_y + n_z c_z = 0 \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_x - 2n_y + 3n_z = 0 \\ 2n_x - n_y + 2n_z = 0 \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \end{cases}$$

Si ottiene un sistema di 3 eq.ni in 3 incognite perfettamente risolvibile. Il versore cercato è quindi $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{26}}(-\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})$

EX 7

Il momento polare di un vettore $\vec{v}$ applicato in un punto P rispetto al centro di riduzione C è definito da $\vec{m} = \overrightarrow{(P-C)} \times \vec{v}$ dove $(P-C)$ è il vettore che va da C a P.

In questo caso

$$\overrightarrow{(A-O)} = (1-0)\hat{i} + (0-0)\hat{j} + (1-0)\hat{k} = \hat{i} + \hat{k}$$

$$\vec{m}_0(\vec{a}) = \overrightarrow{(A-O)} \times \vec{a} = (\hat{i} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (0*2+1*4)\hat{i} - (1*2-1*3)\hat{j} + (-4*1-0*3)\hat{k} = 4\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$$

$$|\vec{m}_0| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{33}$$

Il momento assiale rispetto a una retta è la proiezione del momento polare sulla retta in questione, quindi il prodotto scalare fra il momento polare e la retta.

NB: il momento polare è un vettore mentre il momento assiale è uno scalare in quanto rappresenta la lunghezza del momento polare lungo la direzione data dalla retta.

In questo caso la retta su cui voglio proiettare il momento polare è l'asse x, rappresentato quindi dal versore $\hat{i}$

$$m_{0x} = \vec{m}_0 \cdot \hat{i} = (4\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}) \cdot \hat{i} = 4\hat{i} \cdot \hat{i} = 4$$

EX 8

Per scrivere il vettore in componenti cartesiane dati il punto iniziale e quello finale basta calcolare:

$$\vec{v} = \overline{(B-A)} = (1-1)\hat{i} + (1-3)\hat{j} + (2-5)\hat{k} = -2\hat{j} - 3\hat{k}$$

Usando la definizione di momento polare: $\vec{m} = \overline{(A-P)} \times \vec{v}$

$$\overline{(A-P)} = (1-0)\hat{i} + (3-0)\hat{j} + (5-1)\hat{k} = \hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{m}_p(\vec{v}) = \overline{(A-P)} \times \vec{v} = (\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times (-2\hat{j} - 3\hat{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-9+8)\hat{i} - (-3-0)\hat{j} + (-2-0)\hat{k} = -\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$|\vec{m}_p| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

Il momento assiale del vettore sulla retta si ottiene calcolando il prodotto scalare fra il vettore dato e il versore che definisce la retta:

$$\begin{aligned} m_{p,retta} &= \vec{m}_p \cdot \vec{u} = (-\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}\right) = \\ &= -1 * \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 3 * \frac{1}{\sqrt{3}} - 2 * \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$