CINEMATICA

EX 1

Un punto nello spazio è definito dal vettore posizione $\hat{r}(t) = \frac{t^3}{3}\hat{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\hat{j} + t\hat{k}$ dove t è il tempo. Calcolare: a) velocità e accelerazione istantanea, b) velocità vettoriale media in un tempo compreso fra t=0s e t=2s, c) la velocità scalare media tra gli stessi istanti di tempo; d) le componenti normale e tangente dell'accelerazione, e) raggio di curvatura al tempo t=1.

EX 2

Una particella si muove su una retta con accelerazione a(t)=18t-8. Sapendo che la sua velocità all'istante iniziale è $v_0 = 2m/s$, calcolare: a) la velocità all'istante t=2s; b) lo spazio percorso fra l'istante iniziale e l'istante t=2s; c) la posizione della particella all'istante t=2s sapendo che la posizione iniziale è $s_0 = 5m$.

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

EX 3

Un punto materiale si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato. Sapendo che all'istante t=4s il punto ha percorso 60 cm e che all'istante t=5s la sua velocità è 33 cm/s, calcolare accelerazione e velocità iniziale.

EX 4

Un oggetto P1 viene lasciato cadere liberamente da una quota h. Un secondo oggetto P2 viene lanciato dal suolo verso l'alto. Calcolare: a) la velocità con cui deve essere lanciato P2 affinché tocchi il suolo contemporaneamente a P1; b) la quota di P1 quando P2 inverte il suo moto.

EX 5

Un automobilista compie un moto rettilineo di 100 km. Partendo da fermo accelera uniformemente con accelerazione a_1=0.3 m/s2 fino a una velocità di 120 km/h. A un certo punto decelera con decelerazione a_2=0.9 m/s^2 fino a fermarsi. Calcolare: a) spazio e tempo relativi all'avviamento; b) spazio e tempo relativi alla frenata; c) la durata totale del viaggio; d) la velocità media.

EX 6

Due treni viaggiano in direzioni opposte alla velocità rispettivamente di v_{01}=80km/h e v_{02}=60km/h. Alla distanza reciproca di 3km imprimono la stessa decelerazione. Calcolare qual è il valore minimo di decelerazione affinché non ci sia lo scontro e i percorsi compiuti durante la frenata.

MOTO ARMONICO

EX 7
Scrivere l'equazione del moto armonico di un punto che dopo un tempo t*=T/8 ha elongazione x(t*)=2 velocità v(t*)=-4 e accelerazione a(t*)=-8

EX 8
Un punto materiale si muove di moto armonico $x(t) = R\cos\left(\frac{\pi}{12}t + \varphi\right)$. Calcolare:
a)l'elongazione iniziale x0 se a t*=2s si ha x(t*)=R/2 e v(t*)<0;
b)l'istante in cui il punto passa per l'origine la prima volta

EX 9
Due punti materiali P1 e P2 si muovono di moto armonico con pulsazioni rispettivamente $\omega_1 = \frac{\pi}{8} rad/s$ e $\omega_2 = \frac{\pi}{12} rad/s$. Le ampiezze dei due moti sono uguali e valgono R=30cm. Al tempo t=0 i punti partono dal centro delle oscillazioni verso x negative. Calcolare: a) la distanza fra i due punti al tempo t=2s; b) la velocità dei due punti al tempo t=2s; c)l'istante in cui avviene lo scontro.

MOTO PARABOLICO

EX 10
Un cannone spara un proiettile con una velocità v0=100m/s. Stabilire se il proiettile può colpire un bersaglio posto a L=2km e la velocità minima che serve affinché lo colpisca.

EX 11
Due proiettili P1 e P2 collocati a quote h_1 e h_2 vengono sparati contemporaneamente e orizzontalmente. Calcolare in che rapporto devono stare le due velocità iniziali v_{01} e v_{02} affinché i due proiettili abbiano la stessa gittata.

EX 12
Due proiettili P1 e P2 vengono lanciati contemporaneamente il primo dall'origine e il secondo da un punto che dista d=150m dall'origine. P1 ha velocità iniziale 100m/s formante un angolo di 60° con l'asse x e incontra P2 in aria dopo t*=1.5s. Calcolare: a) direzione e modulo di v_2; b) dove avviene lo scontro.

MOTI RELATIVI

EX 13
Una giostra parte da ferma, comincia a girare con accelerazione angolare costante α=0.1rad/s^2 (rispetto alla terra). Si chiede: a) in quanto tempo la giostra raggiunge la

velocità di rotazione di 1/10 giri al secondo; b) in quell'istante il valore dell'accelerazione posseduta da un osservatore fermo sulla giostra a distanza di 3 metri dall'asse di rotazione; c) in quell'istante il valore dell'accelerazione dell'osservatore qualora non fosse fermo ma si spostasse radialmente verso l'asse di rotazione con velocità relativa v_r=1m/s.

EX 14
Un ascensore scende verso il piano terra con accelerazione diretta verso il basso di valore a=3m/s^2. Un osservatore posto all'interno dell'ascensore lancia una pallina verso l'alto alla velocità iniziale di v_0=5m/s. Calcolare il tempo impiegato dalla pallina per tornare in mano all'osservatore. Ripetere l'esercizio considerando l'accelerazione dell'ascensore diretta verso l'alto.

EX 15
Un treno si muove di moto rettilineo con accelerazione costante a=0.25m/s^2 (rispetto alla terra). Un corpo sul pavimento del treno viene lanciato con velocità iniziale verticale v_0=5m/s (rispetto al treno). Calcolare la distanza in cui il corpo ricadrà sul pavimento.

EX 16
Un treno viaggia alla velocità costante v_t. Un viaggiatore lancia orizzontalmente da un finestrino ad un'altezza $h = 2\sqrt{2}m$ dal suolo un oggetto con una velocità v_l perpendicolare a v_t. L'oggetto cade a terra in un punto P che dista d=12m dal punto A di lancio e s=6m dai binari. Calcolare modulo di v_l, di v_t e della velocità iniziale v_i dell'oggetto rispetto a terra.

SOLUZIONI

EX 1

NB. Nei problemi di cinematica bisogna ricordare sempre che partendo dal vettore posizione, derivando una volta ottengo la velocità, derivando due volte ottengo l'accelerazione. Al contrario partendo dall'accelerazione, integrando una volta ottengo la velocità e integrando due volte ottengo la posizione.

a) Velocità e accelerazione istantanea si ottengono derivando il vettore posizione

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{t^3}{3}\hat{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\hat{j} + t\hat{k}) = t^2\hat{i} + \sqrt{2}t\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2\hat{i} + \sqrt{2}t\hat{j} + \hat{k}) = 2t\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j}$$

b) La velocita vettoriale media fra due tempi si ottiene dalla definizione:

$$\vec{v}_m(t) = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{s}(t=2) - \vec{s}(t=0)}{(t=2) - (t=0)} = \frac{[(\frac{8}{3}\hat{i} + \frac{4}{\sqrt{2}}\hat{j} + 2\hat{k}] - [-0]}{2} = \frac{4}{3}\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} + \hat{k}$$

c) la velocità scalare media si ottiene dalla definizione:

$$v_m(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(t^4 + 2t^2 + 1)}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(t^2+1)^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (t^2+1)\, dt = [\frac{t^3}{3} + t]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 - 0 - 0 = \frac{14}{3} m$$

quindi

$$v_m(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{14/3}{2} = \frac{7}{3} m/s$$

d) Le componenti tangente e normale dell'accelerazione si ottengono pensando di proiettare il vettore accelerazione lungo le due direzioni date una dal versore tangente alla traiettoria e l'altra dal versore normale.

Ricordiamo che punto per punto il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria per cui per ottenere il versore tangente basterà dividere il vettore velocità per il suo modulo in modo da ottenere un vettore di modulo unitario:

$$\hat{u}_t(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{t^2\hat{i} + \sqrt{2}t\hat{j} + \hat{k}}{(t^2+1)} \Rightarrow \hat{u}_t(1) = \frac{\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} + \hat{k}}{2}$$

Scompongo l'accelerazione lungo le due direzioni:
$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t) = a_t(t)\hat{u}_t(t) + a_n(t)\hat{u}_n(t)$
dove $a_n\hat{u}_n$ è la componente dell'accelerazione in direzione normale e $a_t\hat{u}_t$ è la componente dell'accelerazione in direzione tangente.

Ricordando il significato di prodotto scalare, per avere la proiezione di un vettore lungo una direzione basta calcolare il prodotto scalare fra il vettore e la direzione stessa. Per ottenere quindi la componente tangente dell'accelerazione basta fare:

$$a_t(t) = \vec{a}(t)\cdot\hat{u}_t(t) = (2t\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j})\cdot\frac{(t^2\hat{i} + \sqrt{2}t\hat{j} + \hat{k})}{(t^2+1)} = \frac{(2t*t^2\hat{i}\cdot\hat{i} + \sqrt{2}*\sqrt{2}t\hat{j}\cdot\hat{j})}{(t^2+1)} = \frac{2t^3+2t}{(t^2+1)} = 2$$

$$\vec{a}_t(t) = a_t(t)*\hat{u}_t(t) = 2*\frac{(t^2\hat{i} + \sqrt{2}t\hat{j} + \hat{k})}{(t^2+1)} = \frac{2t^2\hat{i} + 2\sqrt{2}t\hat{j} + 2\hat{k}}{(t^2+1)}$$

La componente normale si ottiene dalla definizione di vettore:

$$\vec{a}_n(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_t(t) \Rightarrow \vec{a}_n(t) = 2t\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} - \frac{2t^2\hat{i} + 2\sqrt{2}t\hat{j} + 2\hat{k}}{(t^2+1)} = \frac{(2t\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j})*(t^2+1) - 2t^2\hat{i} + 2\sqrt{2}t\hat{j} + 2\hat{k}}{(t^2+1)}$$

$$\vec{a}_n(t) = \frac{2t(t^2+1-t)\hat{i} + \sqrt{2}(t^2-2t+1)\hat{j} - 2\hat{k}}{(t^2+1)} \Rightarrow \vec{a}_n(t=1) = \frac{2\hat{i} - 2\hat{k}}{2} = \hat{i} - \hat{k} \Rightarrow a_n(t=1) = \sqrt{2}m/s^2$$

d) Il raggio di curvatura al tempo t=1s si ottiene dalla definizione:

$$\rho(t) = \frac{v^2(t)}{a_n(t)} \Rightarrow \rho(1) = \frac{v^2(1)}{a_n(1)} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}m$$

EX 2
a) Integrando l'accelerazione ottengo la velocità:

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt = \int_0^t (18t-8)\,dt = [18\frac{t^2}{2} - 8t]_0^t = 9t^2 - 8t + v_0 = 9t^2 - 8t + 2$$

$$v(t=2) = 9*2^2 - 8*2 + 2 = 22m/s$$

b) Integrando la velocità ottengo la posizione.

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t (9t^2 - 8t + 2)\,dt = [9\frac{t^3}{3} - 8\frac{t^2}{2} + 2t]_0^t = 3t^3 - 4t^2 + +2t + s_0$$

$$\Delta s = s(t=2) - s(t=0) = (3*8 - 4*4 + 2*2 + s_0) - (s_0) = 12m$$

$$s(t=2) = \Delta s + s_o = 17m$$

EX 3

Conviene scrivere le eq.ni del moto uniformemente accelerato e sostituire le informazioni che si hanno per i due tempi in questione.

In generale $\begin{cases} s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = v_0 + at \end{cases}$ In questo caso s_0=0 $\begin{cases} s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = v_0 + at \end{cases}$

Vado a sostituire $s(t = 4s) = 60cm, v(t = 5s) = 33cm/s$ rispettivamente nella prima e nella seconda equazione del moto ottenendo un sistema di due equazioni nelle due incognite (velocità iniziale e accelerazione) richieste:

$$\begin{cases} 60cm = v_0(4s) + \frac{1}{2} a(4s)^2 \\ 33cm/s = v_0 + a(5s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60cm = v_0(4s) + a(8s) \\ 33cm/s = v_0 + a(5s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15 = v_0 + 2a \\ 33 = v_0 + 5a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = 15 - 2a \\ 33 = 15 - 2a + 5a \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = 15 - 2a \\ 18 = 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = 15 - 2a = 15 - 2 * 6 = 15 - 12 = 3cm/s \\ a = 6cm/s^2 \end{cases}$$

EX 4

a) Si parte sempre scrivendo le eq.ni del moto per i due oggetti che si muovono chiaramente di moto uniformemente accelerato. In generale l'eq.ne è:

$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

P1 viene lasciato cadere liberamente da una quota h quindi $y_0 = h, v_0 = 0$ che sostituite nell'eq.ne la fanno diventare $y_1 = h - \frac{1}{2} g t^2$.

P2 viene lanciato dal suolo quindi $y_0 = 0, v_0 = v_{02}$ e di conseguenza $y_2 = v_{02} t - \frac{1}{2} g t^2$.

La condizione per cui i due oggetti toccano il suolo contemporaneamente è:

$\begin{cases} y_1(t_1^*) = 0 \\ y_2(t_2^*) = 0 \\ t_1^* = t_2^* \end{cases}$ cioè che la coordinata y si annulli nello stesso istante di tempo.

Andando a sostituire nelle due eq.ni si ha che:

$$\begin{cases} 0 = h - \frac{1}{2} g(t_1^*)^2 \\ 0 = v_{02} t_2^* - \frac{1}{2} g(t_2^*)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2h - g(t_1^*)^2 \\ 0 = 2v_{02} t_2^* - g(t_2^*)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1^* = \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ t_2^*(2v_{02} - g t_2^*) = 0 \end{cases}$$

La soluzione $t_2^* = 0$ corrisponde all'istante iniziale e quindi non è quella cercata. La soluzione accettabile è: $\begin{cases} t_1^* = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} \\ t_2^* = \dfrac{2v_{02}}{g} \end{cases}$

Imponendo l'uguaglianza fra i tempi otteniamo la richiesta sulla velocità iniziale di P2:

$$t_1^* = t_2^* \Rightarrow \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2v_{02}}{g} \Rightarrow \frac{2h}{g} = \frac{4v_{02}^2}{g^2} \Rightarrow v_{02} = \sqrt{\frac{hg}{2}}$$

b) Il punto P2 inverte il moto quando la sua velocità è istantaneamente nulla. In un moto uniformemente accelerato la velocità ha equazione: $v = v_0 + at$. Imponendo v=0 trovo il tempo t* che impiega l'oggetto P2 ad arrivare all'altezza massima e quindi ad invertire il moto. Sostituendo questo tempo nell'equazione della traiettoria di P1 ottengo la quota cercata.

$$v_2 = v_{02} - gt \Rightarrow 0 = v_{02} - gt^* \Rightarrow t^* = \frac{v_{02}}{g}$$

$$y_1(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y_1(t^*) = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{02}}{g}\right)^2 = h - \frac{v_{02}^2}{2g}$$

EX 5

L'intero moto si compone di un primo tratto di moto uniformemente accelerato, un secondo tratto di moto rettilineo uniforme e infine un tratto di moto uniformemente decelerato. Le condizioni finali di ogni moto corrispondono alle condizioni iniziali del moto successivo.

1) Consideriamo prima la fase di avviamento. Scriviamo le formule generali per il moto uniformemente accelerato poi andiamo a sostituire le informazioni che abbiamo

$$s_A = s_{0A} + v_{0A}t_A + \frac{1}{2}a_A{t_A}^2$$

$$v_A = v_{0A} + a_A t_A$$

nel nostro caso $s_{0A} = 0, v_{0A} = 0, v_{finale,A} = 120km/h, a_A = 0.3m/s^2$ quindi andando a sostituire

$$s_A = \frac{1}{2}0.3{t_A}^2 \Rightarrow 120km/h = 0.3m/s^2 t_A \Rightarrow t_A = (33.3m/s)/(0.3m/s^2)$$

La velocità in km/h va trasformata in m/s e dalla seconda eq.ne otteniamo il tempo impiegato durante la fase di accelerazione: t_A=111,1 s.
Sostituendo questo valore nella prima eq.ne otteniamo lo spazio percorso durante la fase di accelerazione: s_A=1851,9 m.

2) Le stesse considerazioni possono essere fatte per la fase di frenata, notando che l'accelerazione deve essere presa col segno meno visto che si tratta di una decelerazione.

$$s_F = s_{0F} + v_{0F}t_F - \frac{1}{2}a_F t_F{}^2$$

$$v_F = v_{0F} - a_F t_F$$

In questo caso: $s_{0F} = 0, v_{0F} = 33.3 m/s, v_{finale,F} = 0, a_F = 0.9 m/s^2$

Sostituisco i valori di partenza nella seconda eq.ne per trovare il tempo di frenata: t_F= 37s.

Sostituendo il tempo nella prima eq.ne ottengo lo spazio relativo alla frenata: s_F=616.1 m

3) Per calcolare la durata totale del moto devo calcolare lo spazio e il tempo relativi alla fase di moto rettilineo uniforme (unica fase del moto che manca).

$$s_R = s_{tot} - s_A - s_F = 100000 - 1851.9 - 616.1 = 97532 m$$

$$t_R = \frac{s_R}{v_R} = \frac{97532}{33.3} = 2928.9 s$$

$$t_{tot} = t_A + t_R + t_F = 111.1 + 2928.9 + 37 = 3077 s$$

4) La velocità media si calcola utilizzando lo spazio e il tempo totale:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_{tot}}{t_{tot}} = \frac{100000}{3077} = 32.5 m/s$$

EX 6

Si tratta di due moti uniformemente decelerati quindi per prima cosa si impostano le eq.ni del moto sia per le velocità che per gli spazi. Inoltre si usa la condizione che la somma degli spazi percorsi dai due treni sia di 3 km

$$\begin{cases} v_1 = v_{01} - at_1 \\ v_2 = v_{02} - at_2 \\ s_1 = s_{01} + v_{01}t_1 - \frac{1}{2}at_1^2 \\ s_2 = s_{02} + v_{02}t_2 - \frac{1}{2}at_2^2 \\ s_1 + s_2 = 3km \end{cases}$$

Sostituisco nelle eq.ni delle velocità le condizioni al contorno che conosco ovvero le velocità iniziali (diverse da zero) e quelle finali (nulle) e ricavo il tempo relativo alla frenata dei due treni.

Sostituisco i tempi di frenata nelle eq.ni degli spazi ricavo s_1 e s_2 in funzione solo dell'accelerazione incognita. Infine sostituisco gli spazi cosi trovati nell'ultima eq.ne ottenendo una sola equazione nell'unica incognita data dall'accelerazione.

$$0 = 80 - at_1 \Rightarrow t_1 = 80/a$$
$$0 = 60 - at_2 \Rightarrow t_2 = 60/a$$

$$s_1 = s_{01} + v_{01}t_1 - \frac{1}{2}at_1^2 = 0 + 80\frac{80}{a} - \frac{1}{2}a\left(\frac{80}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{80^2}{a}$$
$$s_2 = s_{02} + v_{02}t_2 - \frac{1}{2}at_2^2 = 0 + 60\frac{60}{a} - \frac{1}{2}a\left(\frac{60}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{60^2}{a}$$
$$s_1 + s_2 = 3km \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{80^2}{a} + \frac{1}{2}\frac{60^2}{a} = 3 \Rightarrow 80^2 + 60^2 = 6a \Rightarrow a = 1.7 * 10^3 km/h^2$$

Avendo ottenuto l'accelerazione, la posso sostituire nelle eq.ni degli spazi per ricavare lo spazio di frenata di ciascun treno:
s_1=1.9 km e s_2=1.1 km

EX 7

In generale l'eq.ne di un moto armonico si scrive $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. Derivandola una volta ottengo la velocità e derivandola ancora l'accelerazione:

$$\dot{x}(t) = v(t) = -A\omega sen(\omega t + \varphi)$$
$$\ddot{x}(t) = a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

Sostituisco in queste eq.ni le condizioni iniziali date, ricordando che la pulsazione di un moto armonico è legata al periodo dalla relazione: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\begin{cases} x(t=\frac{T}{8}) = 2 = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{8} + \varphi\right) \\ \dot{x}(t=\frac{T}{8}) = -4 = -A\frac{2\pi}{T}sen\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{8} + \varphi\right) \\ \ddot{x}(t=\frac{T}{8}) = -8 = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{8} + \varphi\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = A\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \\ -4 = -A\frac{2\pi}{T}sen\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \\ -8 = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \end{cases}$$

Sostituisco la prima eq.ne nella terza

$$-8 = -2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \omega^2 = 4 \Rightarrow \omega = 2 \Rightarrow T = \pi$$

Sostituisco il risultato ottenuto nella prima e nella seconda per ricavare la fase iniziale

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\frac{2}{A} \\ sen\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\frac{4}{A\omega}=\frac{4}{2A}=\frac{2}{A} \end{cases}$$

Ma seno e coseno di un angolo sono uguali quando l'angolo è pari a π/4 cioè:

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=sen\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\Rightarrow\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\varphi=0$$

Risolvendo la prima equazione:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+0\right)=\frac{2}{A}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{A}\Rightarrow A=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

L'eq.ne del moto si scrive quindi : $x(t)=2\sqrt{2}\cos(2t)$

EX 8

Scriviamo le eq.ni del moto e della velocità e imponiamo le condizioni iniziali. Da notare che se il punto si muove verso le x negative significa che la sua velocità è negativa

$$\begin{cases} x(t)=R\cos\left(\frac{\pi}{12}t+\varphi\right) \\ \dot{x}(t)=v(t)=-R\frac{\pi}{12}sen\left(\frac{\pi}{12}t+\varphi\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t^*=2)=\frac{R}{2}=R\cos\left(\frac{\pi}{12}2+\varphi\right) \\ \dot{x}(t^*=2)<0\Rightarrow -R\frac{\pi}{12}sen\left(\frac{\pi}{12}2+\varphi\right)<0 \end{cases}$$

Risolvendo:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{3}+n\frac{5\pi}{3} \\ sen\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)>0\Rightarrow n=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}$$

L'eq.ne del moto diventa quindi: $x(t)=R\cos\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{6}\right)$.

Imponendo t=0 ricaviamo l'elongazione iniziale x_0

$$x(t=0)=x_0=R\cos\left(\frac{\pi}{12}0+\frac{\pi}{6}\right)=R\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=R\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x_0=R\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Imponendo x(t)=0 troviamo i tempi in cui il punto passa per l'origine

$$x(t)=0\Rightarrow R\cos\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{6}\right)=0\Rightarrow\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+n\pi$$

Il primo passaggio per l'origine si ha per n=0 quindi

$$\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi/2-\pi/6}{\pi/12}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)12=4s$$

EX 9

a) scriviamo l'eq.ne del moto armonico per i due punti e per le loro velocità

$$x_1(t)=R\cos\left(\frac{\pi}{8}t+\varphi_1\right) \qquad \dot{x}_1(t)=-R\frac{\pi}{8}sen\left(\frac{\pi}{8}t+\varphi_1\right)$$

$$x_2(t)=R\cos\left(\frac{\pi}{12}t+\varphi_2\right) \qquad \dot{x}_2(t)=-R\frac{\pi}{12}sen\left(\frac{\pi}{12}t+\varphi_2\right)$$

Al tempo t=0 i punti partono entrambi da x(0)=0 vanno verso x<0 che significa che anche le velocità sono negative. Per lo spazio la condizione iniziale diventa:

$$x_1(0)=0=R\cos\left(\frac{\pi}{8}0+\varphi_1\right)=R\cos(\varphi_1)=30\cos(\varphi_1)\Rightarrow\cos\varphi_1=0\Rightarrow\varphi_1=n\frac{\pi}{2}$$

$$x_2(0)=0=R\cos\left(\frac{\pi}{12}0+\varphi_2\right)=R\cos(\varphi_2)=30\cos(\varphi_2)\Rightarrow\cos\varphi_2=0\Rightarrow\varphi_2=n\frac{\pi}{2}$$

Per la velocità la condizione iniziale diventa:

$$\dot{x}_1(0)=-R\frac{\pi}{8}sen\left(\frac{\pi}{8}0+\varphi_1\right)<0\Rightarrow sen(\varphi_1)>0$$

$$\dot{x}_2(0)=-R\frac{\pi}{12}sen\left(\frac{\pi}{12}0+\varphi_2\right)<0\Rightarrow sen\varphi_2>0$$

Le due condizioni sugli angoli sono simultaneamente vere quando n=1 cioè

$$\varphi_1=\varphi_2=\frac{\pi}{2}$$

Le eq.ni del moto diventano: $x_1(t)=30\cos\left(\frac{\pi}{8}t+\frac{\pi}{2}\right), x_2(t)=30\cos\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{2}\right)$.

Quindi al tempo t=2s si avrà

$$x_1(t=2)=30\cos\left(\frac{\pi}{8}2+\frac{\pi}{2}\right)=30\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=30\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=30*\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-21.2cm$$

$$x_2(t=2)=30\cos\left(\frac{\pi}{12}2+\frac{\pi}{2}\right)=30\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=30\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=30*\left(-\frac{1}{2}\right)=-15cm$$

$$d(t=2)=\left|x_1(t=2)-x_2(t=2)\right|=\left|-21.2+15\right|=6.2cm$$

b) Le velocità a t=2s saranno

$$\dot{x}_1(t=2) = -30\frac{\pi}{8}sen\left(\frac{\pi}{8}2+\frac{\pi}{2}\right) = -30\frac{\pi}{8}sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{15\pi}{4}sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -8.33cm/s$$

$$\dot{x}_2(t=2) = -30\frac{\pi}{12}sen\left(\frac{\pi}{12}2+\frac{\pi}{2}\right) = -30\frac{\pi}{12}sen\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{15\pi}{6}sen\left(\frac{3\pi}{3}\right) = -6.8cm/s$$

c) lo scontro avviene al tempo t*quando x1(t*)=x2(t*) ovvero

$$x_1(t^*) = x_2(t^*) \Rightarrow 30\cos\left(\frac{\pi}{8}t^*+\frac{\pi}{2}\right) = 30\cos\left(\frac{\pi}{12}t^*+\frac{\pi}{2}\right)$$

La condizione sui coseni degli angoli è verificata in due casi:

$$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \begin{cases}\alpha = \beta \\ \alpha = 2\pi - \beta\end{cases}$$

Quindi risolvendo l'equazione:

$$\begin{cases}\frac{\pi}{8}t^*+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}t^*+\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{8}t^*+\frac{\pi}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{12}t^*-\frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}t^* = \frac{1}{3}t^* \Rightarrow t^* = 0 \\ (\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{12})t^* = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{5\pi}{24}t^* = \pi \Rightarrow t^* = 4.8s\end{cases}$$

La soluzione t*=0 corrisponde all'istante iniziale. La soluzione t*=4.8s è quella che cerchiamo.

EX 10

Si tratta della combinazione di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse delle x e un moto uniformemente accelerato lungo l'asse delle y. La risultante è un moto parabolico.

Scriviamo le eq.ni del moto lungo i due assi scomponendo la velocità iniziale in una componente lungo x e una componente lungo z:

$$x(t) = x_0 + v_0\cos\alpha * t = v_0\cos\alpha * t$$

$$y(t) = y_0 + v_0 sen\alpha * t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 sen\alpha * t - \frac{1}{2}gt^2$$

Il proiettile colpisce il suolo quando y=0 (gittata) cioè ad un tempo t che si trova imponendo:

$$y(t) = 0 \Rightarrow v_0 sen\alpha * t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow v_0 sen\alpha - \frac{1}{2}gt = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0 sen\alpha}{g}$$

Sostituisco il tempo di caduta nell'eq.ne delle ascisse per trovare la coordinata x della gittata:

$$G = v_0\cos\alpha * \frac{2v_0 sen\alpha}{g} = \frac{2v_0^2 sen\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g}sen2\alpha$$

La gittata è massima quando $sen2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Per questo valore dell'angolo la gittata risulta essere pari a G=1.02*10^3m, inferiore alla distanza del bersaglio che si vuole colpire.
Per colpire il bersaglio bisogna quindi lanciare il proiettile con una velocità iniziale che si ottiene imponendo come punto di atterraggio l'ascissa del bersaglio:

$$G = L = \frac{v_0^2}{g} sen2\alpha \Rightarrow 2km = \frac{v_0^2}{9.8m/s^2} * 1 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2000m * 9.8m/s^2} = 140m/s$$

EX 11
Si tratta del moto di un proiettile (moto parabolico) in cui le velocità iniziali dei due punti hanno componenti solo lungo l'asse delle x (sono sparati in orizzontale). Le eq.ni del moto diventano:

$$\text{P1: } \begin{cases} x_1(t) = x_{01} + v_{01}\cos\alpha * t = v_{01}t \\ y_1(t) = y_{01} + v_{01}sen\alpha * t - \frac{1}{2}gt^2 = h_1 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad \text{P2: } \begin{cases} x_2(t) = x_{02} + v_{02}\cos\alpha * t = v_{02}t \\ y_2(t) = y_{02} + v_{02}sen\alpha * t - \frac{1}{2}gt^2 = h_2 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Invertendo le eq.ni delle x trovo un'equazione sul tempo. Sostituendo l'espressione del tempo nelle eq.ni sulle y ottengo un'espressione in y che non dipende più dal tempo ma solo dalla coordinata x.
La gittata si trova imponendo y=0 per entrambi gli oggetti e risolvendo secondo la x.
Imponendo l'uguaglianza delle gittate G1=G2 ottengo la condizione sulle velocità iniziali:

$$\begin{cases} x_1(t) = v_{01}t \Rightarrow t_1 = x_1 / v_{01} \\ x_2(t) = v_{02}t \Rightarrow t_2 = x_2 / v_{02} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t_1) = h_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = h_1 - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_1}{v_{01}}\right)^2 \\ y_2(t_2) = h_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = h_2 - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_2}{v_{02}}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t_1) = 0 \Rightarrow h_1 - \frac{1}{2}g\left(\frac{G_1}{v_{01}}\right)^2 = 0 \Rightarrow G_1 = v_{01}\sqrt{\frac{2h_1}{g}} \\ y_2(t_2) = 0 \Rightarrow h_2 - \frac{1}{2}g\left(\frac{G_2}{v_{02}}\right)^2 = 0 \Rightarrow G_2 = v_{02}\sqrt{\frac{2h_2}{g}} \end{cases}$$

$$G_1 = G_2 \Rightarrow v_{01}\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = v_{02}\sqrt{\frac{2h_2}{g}} \Rightarrow \frac{v_{01}}{v_{02}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

EX 12
a) Scriviamo le eq.ni del moto per entrambi gli oggetti ricordando che sono due moti parabolici (moto rettilineo uniforme lungo x e uniformemente accelerato lungo y)

$$\text{P1: } \begin{cases} x_1(t) = x_{01} + v_{01}\cos\alpha * t = v_{01}\cos 60 * t \\ y_1(t) = y_{01} + v_{01}sen\alpha * t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{01}sen60 * t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\text{P2:}\begin{cases} x_2(t) = x_{02} - v_{02}\cos\beta * t = d - v_{02}\cos\beta * t \\ y_2(t) = y_{02} + v_{02}sen\alpha * t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{02}sen\beta * t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Notare che la componente x della velocità iniziale di P2 è negativa perché sto lanciando l'oggetto verso P1 quindi in devo direzionarlo verso le x negative.

Al tempo t*=1.5s gli oggetti si scontrano ovvero $x_1(1.5)=x_2(1,5)$ e $y_1(1.5)=y_2(1.5)$:

$$x_1(t=1.5s) = x_2(t=1.5s) \Rightarrow 100*\cos 60*1.5 = 150 - v_{02}\cos\beta*1.5 \Rightarrow v_{02}\cos\beta = 50$$

$$y_1(t=1.5s) = y_2(t=1.5s) \Rightarrow 100*sen60*1.5 - \frac{1}{2}9.8*1.5^2 = v_{02}sen\beta*1.5 - \frac{1}{2}9.8*1.5^2 \Rightarrow v_{02}sen\beta = 86.6$$

Per ottenere le informazioni sulla velocità iniziale di P2 basta considerare le 2 eq.ni ottenute sopra

$$\begin{cases} v_{02}\cos\beta = 50 \\ v_{02}sen\beta = 86.8 \end{cases}$$

$$|v_{02}| = \sqrt{(v_{02}\cos\beta)^2 + (v_{02}sen\beta)^2} = \sqrt{50^2 + 86.6^2} = 100m/s$$

$$tg\beta = \frac{v_{02}sen\beta}{v_{02}\cos\beta} = \frac{50}{86.6} = 1.732 \Rightarrow \beta = 60°$$

Si ottiene il modulo della velocità iniziale di P2 e l'angolo con cui l'oggetto deve essere sparato.

b) Le coordinate dello scontro si ottengono sostituendo il tempo a cui avviene lo scontro t*=1.5s nelle eq.ni del moto di uno o dell'altro oggetto (se si scontrano abbiamo visto che le coordinate devono essere le stesse per entrambi)

$$x_1(t=1.5s) = 100\cos 60*1.5 = 75m$$

$$y_1(t=1.5) = 100sen60*1.5 - \frac{1}{2}9.8*1.5^2 = 118.88m$$

Per capire dove avviene lo scontro calcoliamo la gittata di P1 e la confrontiamo con le coordinate dello scontro:

$$x_1(t) = 100\cos 60*t \Rightarrow t = \frac{x_1(t)}{100\cos 60}$$

$$y_1(t) = 0 \Rightarrow 100sen60*t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow 100sen60*\frac{x_1(t)}{100\cos 60} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_1(t)}{100\cos 60}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 100sen60 - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_1(t)}{100\cos 60}\right) = 0 \Rightarrow x_1(t) = G_1 = \frac{100^2 sen60*\cos 60}{9.8} = 884m$$

La metà della gittata di P1 è maggiore della coordinata x in cui avviene lo scontro, ciò vuol dire che lo scontro avviene in aria nella prima metà del tratto ascendente del moto di P1.

EX 13

Scriviamo per prima cosa le eq.ni del moto della giostra che si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione angolare costante data dal testo.

$$\alpha(t) = \alpha_0 = 0.1 rad/s^2$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha_0 t = 0 + 0.1t = 0.1t$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_0 t^2 = 0 + 0t + \frac{1}{2}0.1t^2 = \frac{1}{2}0.1t^2$$

a) Voglio calcolare in quanto tempo la giostra raggiunge la velocità di 1/10 di giro al secondo. Trasformo 1/10 giro in radianti

$$\frac{1}{10}\frac{giro}{\sec} = \frac{1}{10}\frac{2\pi}{\sec} = 0.1\frac{2\pi}{\sec}$$

Calcolo il tempo necessario per raggiungere questa velocità con la seconda delle eq.ni sopra (eq.ne della velocità angolare)

$$\omega(t^*) = \alpha_0 t^* = 2\pi 0.1 \Rightarrow t^* = \frac{0.2\pi}{\alpha_0} = \frac{0.2\pi}{0.1} = 6.28s$$

b) Ricordiamo che in un moto circolare l'accelerazione può essere scomposta in una componente tangenziale e in una componente normale che hanno come espressioni rispettivamente

$$\vec{a}_t(t) = \alpha(t)R\hat{t}$$
$$\vec{a}_n(t) = \omega^2(t)R\hat{n}$$

dove R è il raggio della circonferenza, α è l'accelerazione angolare, ω è la velocità angolare, n e t sono i versori normali e tangente rispettivamente. Nel nostro caso l'acc angolare è costante quindi anche l'acc tangenziale risulta costante nel tempo. Al tempo t* le componenti valgono

$$a_t(t^*) = \alpha_0 R = 0.1 * 3 = 0.3 m/s^2$$

$$a_n(t^*) = \omega^2 R = (\alpha_0 t^*)^2 R = (0.1 * 6.28^2) * 3 = 1.184 m/s^2$$

Avendo le componenti si ricava il modulo dell'accelerazione:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t) \Rightarrow a(t) = \sqrt{a_t^2(t) + a_n^2(t)}$$

$$a(t^*) = \sqrt{a_t^2(t^*) + a_n^2(t^*)} = \sqrt{0.3^2 + 1.184^2} = 1.222 m/s^2$$

c) nel caso in cui un punto si muova radialmente, l'acc tangenziale avrà anche una componente aggiuntiva data dall'acc di coriolis.

Per cui $\begin{aligned}&\vec{a}_t(t)=\alpha(t)R\hat{t}\\&\vec{a}_n(t)=\omega^2(t)R\hat{n}\\&\vec{a}_c(t)=2\vec{\omega}(t)\times\vec{v}_r(t)\\&\vec{a}_t'(t)=\vec{a}_t(t)+\vec{a}_c(t)\end{aligned}$ dove l'acc di coriolis è diretta nella stessa direzione della componente tangente dell'accelerazione ma con verso opposto.

Nel nostro caso queste espressioni diventano:

$a_t(t^*)=0.3m/s^2$

$a_n(t^*)=1.184m/s^2$

$a_c(t^*)=2\omega v_r=2\alpha_0 t^* v_r=2*0.1*6.8*1=1.257m/s^2$

$\vec{a}_t{}'=\vec{a}_t+\vec{a}_c\Rightarrow a_t'=|a_t-a_c|=|0.3-1.257|=0.957$

Quindi il modulo dell'acc finale sarà:

$\vec{a}(t^*)=\vec{a}_t'(t^*)+\vec{a}_n'(t^*)\Rightarrow a(t^*)=\sqrt{a_t'(t^*)^2+a_n'(t^*)}=\sqrt{0.957^2+1.184^2}=1.522m/s^2$

EX 14

Nel sistema fisso a terra, l'ascensore scende con accelerazione verso il basso pari ad a da una certa quota h. Le eq.ni del moto sono:

$a_y=-a_0=-3m/s^2$

$v_y=v_0-at=0-at=-3t$

$y=y_0+v_0t-\frac{1}{2}at^2=h+0t-\frac{1}{2}at^2=h-\frac{1}{2}at^2$

Mentre la pallina, soggetta solo all'acc di gravità nel sistema fisso a terra, descrive il moto:

$a_y=-g=-9.7m/s^2$

$v_y=v_0-at=v_0-gt=5-9.8t$

$y=y_0+v_0t-\frac{1}{2}at^2=h+5t-\frac{1}{2}gt^2$

La pallina torna in mano all'osservatore quando le quote dell'ascensore e della pallina coincidono y(ascensore)=y(pallina) cioè:

$y(ascensore)=y(pallina)\Rightarrow h-\frac{1}{2}at^{*2}=h+5t^*-\frac{1}{2}gt^{*2}$

$-\frac{1}{2}at^{*2}=5t^*-\frac{1}{2}gt^{*2}\Rightarrow -at^{*2}=10t^*-gt^{*2}\Rightarrow -at^*=10-gt^*$

$t^*=\frac{10}{g-a}=\frac{10}{9.8-3}=1.471s$

Se l'ascensore ha accelerazione verso l'alto, il tempo t* diventa:

$$y(ascensore) = y(pallina) \Rightarrow h + \frac{1}{2}at^{*2} = h + 5t^{*} + \frac{1}{2}gt^{*2}$$

$$t^{*} = \frac{10}{g-a} = \frac{10}{9.8+3} = 0.781s$$

EX 15

All'interno del treno, l'oggetto sentirà una velocità di trascinamento lungo l'asse x data da $\vec{v}_t = -\vec{a}_x t\hat{i} = -0.25t\hat{i}$ in direzione opposta al moto del treno più una velocità lungo l'asse y data dalla velocità iniziale $\vec{v}_y = v_0\hat{j} = 5\hat{j}$

Lungo entrambi gli assi si ha quindi un moto uniformemente accelerato: lungo l'asse x dovuto all'acc costante a=0,25m/s2, lungo l'asse y dovuto all'acc di gravità. Le eq.ni del moto lungo le due direzioni sono quindi:

$$v_y = v_0 - gt \qquad v_x = v_0 - at = -at$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad x = x_0 - v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = -\frac{1}{2}at^2$$

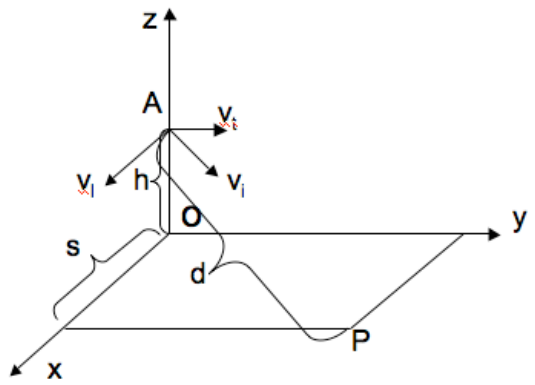
Il punto di caduta del grave si ottiene imponendo y(t*)=0 in modo da ricavare il tempo di volo t* e andando a sostituire questo valore nell'espressione della coordinata x

$$y(t^{*}) = 0 \Rightarrow v_0 t^{*} - \frac{1}{2}gt^{*2} = 0 \Rightarrow v_0 - \frac{1}{2}gt^{*} = 0 \Rightarrow t^{*} = \frac{2v_0}{g}$$

$$x(t^{*}) = -\frac{1}{2}at^{*2} = -\frac{1}{2}a\left(\frac{2v_0}{g}\right)^2 = -\frac{1}{2}0.25\left(\frac{2*5}{9.8}\right)^2 = -1.28m$$

Il segno meno indica che rispetto alla verticale di lancio il punto di caduta si trova spostato all'indietro verso le x negative.

EX 16



Considero il sistema di riferimento 0(xyz) disegnato sopra e scriviamo per prima cosa le quantità date dal testo in questo sistema fisso rispetto a terra.

$\vec{v}_t = v_t\hat{j}, \vec{v}_l = v_l\hat{i}$

$\overrightarrow{OA} = h\hat{k}, \overrightarrow{OP_x} = s\hat{i}$

$\overrightarrow{AP} = \vec{d} = s\hat{i} + y_p\hat{j} + h\hat{k}$

All'istante iniziale l'oggetto lanciato dal finestrino avrà come velocità rispetto a terra la somma vettoriale della velocità di lancio e di quella del treno:

$\vec{v}_i = v_l\hat{i} + v_t\hat{j}$

Ad un istante generico successivo a quello iniziale, la velocità lungo la direzione verticale cambierà in accordo con le formule del moto uniformemente accelerato ad opera dell'accelerazione di gravità.

$\vec{v}(t) = v_l\hat{i} + v_t\hat{j} - gt\hat{k}$

$v_x = v_l$

$v_y = v_t$

$v_z = -gt$

Quindi le eq.ni del moto lungo le tre direzioni sono: moto rettilineo uniforme lungo le direzioni x e y e moto uniformemente accelerato lungo z

$x(t) = x_0 + v_{0x}t = v_l t$

$y(t) = y_0 + v_{0y}t = v_t t$

$z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 = h + 0 - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2$

L'oggetto tocca il suolo in P dove si annulla la coordinata z cioè z(t*)=0

$z(t^*) = 0 \Rightarrow h - \frac{1}{2}gt^{*2} = 0 \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.76s$

$y_P = \sqrt{d^2 - s^2 - h^2} = \sqrt{144 - 36 - 8} = 10m$

$v_l(t^*) = \frac{x(t^*)}{t^*} = \frac{6}{0.76} = 7.9m/s$

$v_t(t^*) = \frac{y(t^*)}{t^*} = \frac{10}{0.76} = 13.2m/s$

$v_i = \sqrt{v_l(t^*)^2 + v_t(t^*)^2} = 15.4m/s$

Essendo v_t e v_l costanti durante tutto il moto dell'oggetto, posso calcolarle in qualunque punto mi sia comodo, in questo caso quindi quando l'oggetto tocca il suolo perché abbiamo tutte le coordinate del punto P. Il modulo della velocità iniziale dunque è noto perché al tempo t=0 non ho la componente lungo la z.