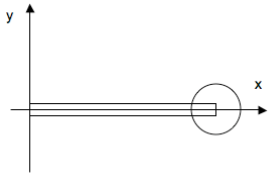
CORPO RIGIDO

EX 1
Un profilo rigido è costituito da un tratto rettilineo AB e da una semicirconferenza di raggio R=20cm come in figura. Dal punto A viene lanciata una moneta di raggio r=2cm. Calcolare la minima velocità che bisogna imprimere affinché arrivi nel punto più alto del profilo rotolando senza strisciare.

EX 2
Un cilindro omogeneo di massa M e raggio R è vincolato a rotolare senza attrito attorno al suo asse. Una corda in estensibile di massa trascurabile è avvolta attorno al cilindro e al suo estremo libero sono appesi due corpi di ugual massa m uniti da una fune. Si lasciano i due corpi liberi di cadere. Calcolare: 1) il modulo dell' accelerazione angolare del cilindro; 2) la tensione della fune che lega le due masse.

EX 3
Una sbarra lineare omogenea di massa M e lunghezza L posta verticalmente può ruotare senza attrito attorno a un asse fisso passante per il centro. Un proiettile di massa M/3 che si muove a velocità costante v colpisce la sbarra perpendicolarmente in un estremo rimanendo agganciata. Calcolare: a) la velocità angolare con cui si mette in rotazione il sistema; b) il lavoro compiuto da una forza che frena il sistema in 3.5 giri.

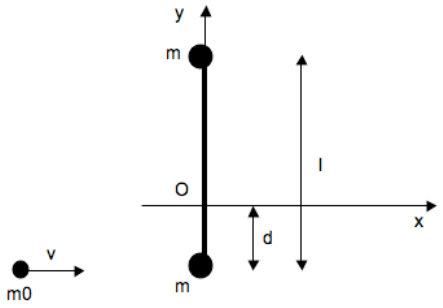
EX 4



Un sistema è composto da una sbarra omogenea di lunghezza l=1m massa m_s=1kg e sezione traversa trascurabile e un disco omogeneo di raggio R=0.2m massa m_d=1kg incollato al centro ad una estremità della sbarra. Il sistema può ruotare senza attrito in un piano verticale attorno a un asse fisso passante per l'altro estremo della sbarra. Inizialmente il sistema tenuto fermo orizzontalmente viene lasciato libero. Determinare: a) l'accelerazione angolare del sistema quando la sbarra ha effettuato una rotazione di 60°; b) il momento angolare del sistema quando la sbarra ha

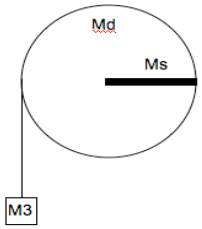
effettuato una rotazione di 60°; c) la velocità angolare quando il sistema ha effettuato una rotazione di 180°.

EX 5



Due punti materiali di ugual massa m=0.5kg sono fissati agli estremi di un'asta rigida di lunghezza l=50cm e massa trascurabile collocata su un piano orizzontale privo di attrito. L'asta è soggetta nel punto O distante d=20cm da un'estremità a un vincolo ideale che le consente di ruotare solo lungo l'asse verticale passante per O. Il punto materiale fissato all'estremo più prossimo ad O subisce un urto elastico da parte di un proiettile di massa m_0=2m, che prima dell'urto si muove con velocità v=2m/s diretta ortogonalmente verso l'asta. Determinare: a) la velocità del proiettile dopo l'urto; b) la velocità dell'asta dopo l'urto.

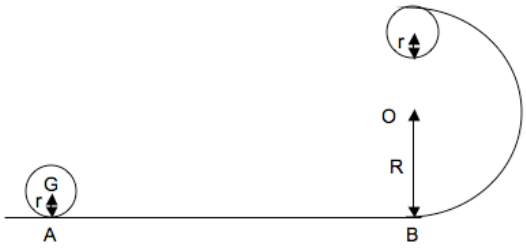
EX 6



Un sistema è formato da un disco di raggio R=1m e massa M_D=M sulla cui superficie è incollata una sbarra di lunghezza R e massa M_S= M_D /3. Attorno al disco è arrotolata una corda in estensibile di massa trascurabile al cui estremo è appesa una massa puntiforme M_3. Il disco è fissato ad un piano verticale mediante un chiodo passante per il suo centro ed è libero di ruotare attorno ad esso. Nell'ipotesi che il sistema sia in condizioni statiche con la sbarra in posizione orizzontale (vedi figura) determinare: a) la massa M_3, b) il momento d'inerzia del sistema. Ad un certo istante la corda viene tagliata, determinare l'accelerazione angolare del sistema. Risolvere per R=1m; M=6kg.

SOLUZIONI

EX 1



Siccome non ci sono attriti e siccome la reazione vincolare non compie lavoro (forza e spostamento sono perpendicolari), possiamo imporre la conservazione dell'energia meccanica fra in punto A e il punto più alto C dove finisce al semicirconferenza. Da ricordare due aspetti: 1) siamo in presenza di un corpo rigido che ruota senza strisciare sul profilo quindi la sua energia cinetica ha una parte rotazionale e una parte traslazionale (teorema di Koenig); 2) per le proprietà dei corpi rigidi possiamo pensare tutta la massa come concentrata nel centro di massa e scrivere le equazioni che servono come applicate in quel punto.
Per la conservazione dell'energia meccanica:

$$E^A_{mecc} = E^C_{mecc} \Rightarrow E^A_{cin,trasl} + E^A_{cin,rot} + \sum E^A_{pot} = E^C_{cin,trasl} + E^C_{cin,rot} + \sum E^C_{pot}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I\omega_A^2 + mgr = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega_C^2 + mg(2R - r)$$

NB: per il calcolo dell'energia potenziale si considera il centro di massa come punto in cui valutare l'altezza dal sistema di riferimento che scegliamo con l'asse x coincidente col profilo rigido e l'asse y verticale.
Occorre ora trovare una relazione fra velocità di traslazione e velocità angolare che viene per esempio dalla considerazione che la moneta è un oggetto rotondo per cui i punti lungo il suo raggio si muovono con velocità v legata alla velocità angolare dalle equazioni del moto circolare: $\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow v = \omega r, a = \dot{\omega} r$.

Ricordiamo inoltre il momento d'inerzia per un disco: $I = \frac{mr^2}{2}$

Mettiamo tutto nell'equazione della conservazione dell'energia e otteniamo:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\frac{v_A^2}{r^2} + mgr = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\frac{v_C^2}{r^2} + mg(2R - r)$$

$$2v_A^2 + v_A^2 + 4gr = 2v_C^2 + v_C^2 + 8gR - 4gr \Rightarrow 3v_A^2 = 3v_C^2 + 8gR - 8gr \Rightarrow v_A^2 = v_C^2 + \frac{8}{3}g(R - r)$$

Per trovare la velocità in A devo prima trovare la velocità in C. Si può utilizzare la prima equazione cardinale della dinamica nel punto C applicata al centro di massa della moneta. In generale lungo la semicirconferenza del profilo agiscono la forza

peso e la reazione vincolare. Nel punto C che corrisponde al punto di massima altezza la reazione vincolare si annulla mentre rimane solo la forza peso. L'accelerazione è quella centripeta tipica di un moto circolare. Quindi:

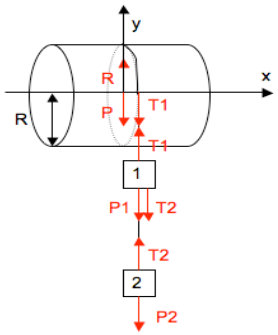
$$\vec{F}^{ext} = \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_{cm} \Rightarrow (C)\vec{P} = m\vec{a}_{centripeta} \Rightarrow mg = m\frac{v_C^2}{(R-r)} \Rightarrow v_C^2 = g(R-r)$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione della velocità in A otteniamo il risultato cercato:

$$v_A^2 = v_C^2 + \frac{8}{3}g(R-r) = g(R-r) + \frac{8}{3}g(R-r) = \left(\frac{8}{3}+1\right)g(R-r) \Rightarrow$$

$$v_A = \sqrt{\left(\frac{8}{3}+1\right)g(R-r)} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}+1\right) * 9.8 * (0.2-0.02)} = 2{,}54\, m/s$$

EX 2



In figura sono mostrate le forze in gioco sui diversi corpi. Il cilindro è un corpo rigido per cui le forze in gioco su esso possono essere pensate come applicate al suo centro di massa.

1) Per trovare l'accelerazione angolare devo utilizzare la seconda equazione cardinale $\vec{M}^{ext} = \dot{\vec{K}}$ che lega il momento delle forze esterne alla derivata del momento angolare totale che comprende sia il momento della quantità di moto dovuto a traslazione sia il momento angolare dovuto a rotazione.
Le forze agenti sul cilindro sono il peso, la reazione vincolare e i pesi delle masse 1 e 2. Scelgo come centro di riduzione per il calcolo dei momenti il centro di massa del cilindro. In questo modo sia il peso che la reazione vincolare del cilindro hanno braccio nullo. Le uniche forze che contribuiscono al momento sono quindi i pesi degli oggetti 1 e 2.
Quindi calcolo il momento delle forze esterne:

$$\vec{M}^{ext} = \vec{r}_R \times \vec{R} + \vec{r}_c \times \vec{P}_c + \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 = 0 \times \vec{R} + 0 \times \vec{P} + (R\hat{k}) \times (-mg\hat{j}) + (R\hat{k}) \times (-mg\hat{j}) = 2mgR\hat{i}$$

Il momento angolare totale è dato da due contributi:
1) il momento della quantità di moto $\vec{K}_{trasl} = \vec{r} \times 2m\vec{v}$ dato dalle due masse 1 e 2 che scendono legate alle corda con velocità v (r come per il calcolo del momento di una forza è il braccio della quantità di moto, ovvero la distanza della retta che passa per il vettore velocità dal centro di riduzione);
2) il momento angolare del cilindro $\vec{K}_{rot} = I\vec{\omega}$ con momento d'inerzia $I = \frac{MR^2}{2}$ che ruota con velocità angolare ω.
Velocità angolare del cilindro e velocità di discesa delle masse sono legate dalla relazione del moto circolare $v = \omega R$ poiché le masse sono vincolate a muoversi all'unisono con la rotazione del cilindro tramite la corda.
Quindi il momento angolate totale diventa:

$$\vec{K} = \vec{K}_{rot} + \vec{K}_{trasl} = I\vec{\omega} + \vec{r} \times 2m\vec{v} = \frac{MR^2}{2}\vec{\omega} + (R\hat{k}) \times (-2m\omega R\hat{j}) = \frac{MR^2}{2}\omega\hat{i} + 2mR^2\omega\hat{i}$$

Unendo le due espressioni del momento delle forze esterne e del momento angolare totale nella II equazione cardinale si ottiene:

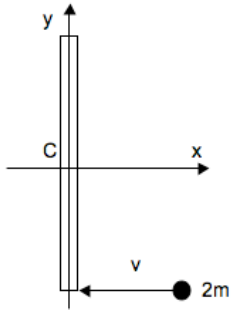
$$2mgR = \frac{d}{dt}\left(\frac{MR^2}{2}\omega + 2mR^2\omega\right) \Rightarrow 2mgR = \frac{MR^2}{2}\dot{\omega} + 2mR^2\dot{\omega} \Rightarrow 4mg = (M+4m)R\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{4mg}{(M+4m)R}$$

2) per trovare la tensione T2 che lega i due corpi 1 e 2 si impone l'equazione della dinamica sui 2 corpi separatamente e poi la si proietta lungo l'asse verticale.
L'accelerazione delle masse è legata alla velocità angolare di rotazione del cilindro per lo stesso motivo descritto prima per le velocità: $a = \dot{\omega}R$. Quindi si ha:

$$\begin{cases} 1)\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P}_1 = m\vec{a} \\ 2)\vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m\vec{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 - T_2 - P_1 = -m\dot{\omega}R \\ T_2 - P_2 = -m\dot{\omega}R \end{cases} \Rightarrow T_2 - mg = -m\dot{\omega}R \Rightarrow$$

$$T_2 = mg - mR\frac{4mg}{(M+4m)R} \Rightarrow T_2 = \frac{Mm}{(M+4m)}g$$

EX 3



a) durante l'urto non agiscono forze esterne quindi è nullo il momento delle forze esterne e per la II equazione cardinale ($\vec{M}^{ext} = \dot{\vec{K}}$) il momento angolare totale si conserva: $\vec{M}^{ext} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{K}} = 0 \Rightarrow \vec{K} = \cos t$
Impongo la conservazione del momento angolare prima e dopo l'urto $\vec{K}_{in} = \vec{K}_{fin}$ dove prima dell'urto si ha solo il momento della quantità di moto del proiettile $\vec{K}_{trasl} = \vec{r} \times 2m\vec{v}$ mentre dopo l'urto si ha il momento angolare dell'asta che ruota $\vec{K}_{rot} = I\vec{\omega}$. Quindi ricordando che r è il braccio della quantità di moto si ha:

$$\vec{K}_{in} = \vec{r} \times m\vec{v} = (-\frac{L}{2}\hat{j}) \times \frac{M}{3}(-v\hat{i}) = -\frac{MLv}{6}\hat{k}$$
$$\vec{K}_{fin} = I\vec{\omega} = -I\omega\hat{k}$$
$$\Rightarrow \frac{MLv}{6} = I\omega \Rightarrow \omega = \frac{MLv}{6I}$$

Per calcolare il momento d'inerzia del sistema dopo l'urto si deve tener conto del momento d'inerzia della sbarra più quello del proiettile che resta conficcato a una distanza L/2 dal centro della sbarra. Quindi:

$$I_{tot} = I_{asta} + I_{massa} = \frac{ML^2}{12} + \frac{M}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{12} = \frac{ML^2}{6}$$

La velocità angolare diventa quindi: $\omega = \frac{MLv}{6I} = \frac{MLv}{6} * \frac{6}{ML^2} = \frac{v}{L}$

b) se il sistema frena vuol dire che siamo in presenza di attrito quindi non vale la conservazione dell'energia meccanica. Si può usare il teorema delle forze vive: $L_{tot} = \Delta T = T_{fin} - T_{in}$ che permette di calcolare il lavoro totale compiuto sul sistema da tutte le forze in gioco dall'energia cinetica del sistema. Dopo l'urto l'energia cinetica è solo di tipo rotazionale e nel dettaglio la velocità angolare finale è nulla perché il sistema si ferma. Il lavoro diventa: $L_{tot} = T_{fin} - T_{in} = 0 - \frac{1}{2}I\omega^2 = -\frac{1}{2}I\omega^2$.
Le forze in gioco sul sistema sono la forza peso e la forza frenanate. La forza peso è di tipo conservativo quindi il lavoro compiuto sul sistema può essere calcolato dalla variazione di energia potenziale. L'unico contributo alla forza peso per come si è preso il sistema di riferimento è dato dall'oggetto che si conficca nella sbarra. Infatti il centro di massa della sbarra si trova lungo l'asse x quindi a quota h=0.
Il sistema si ferma dopo 3.5 giri per cui il proiettile si ferma in altro a distanza L/2 dal centro lungo le y positive e parte da quota L/2 lungo le y negative. Quindi si ha:

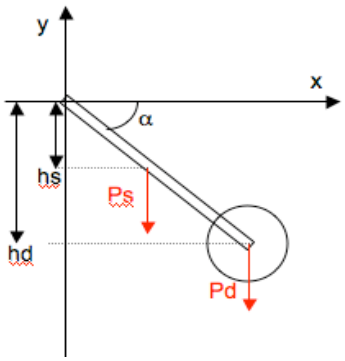
$$L_{peso} = U_{in} - U_{fin} = mgh_{in} - mgh_{fin} = -\frac{M}{3}g\frac{L}{2} - \frac{M}{3}g\frac{L}{2} = -\frac{MLg}{3}$$

Inserendo questo risultato nel teorema delle forze vive ottengo il lavoro che cerco

$$L_{tot} = L_{peso} + L_{frenante} = -\frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow$$

$$L_{frenante} = -\frac{1}{2} I\omega^2 - L_{peso} = -\frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{MLg}{3} = -\frac{1}{2} * \frac{ML^2}{6} * \frac{v^2}{L^2} + \frac{MLg}{3} = \frac{M}{3}\left(gL - \frac{v^2}{4}\right)$$

EX 4



In figura sono segnate in rosso le forze agenti sul sistema che sono la forza peso della sbarra e la forza peso del disco.
a) Per trovare l'accelerazione angolare si deve utilizzare la II equazione cardinale $\vec{M}^{ext} = \dot{\vec{K}}$ in cui essendoci solo un moto rotatorio il momento angolare è dato da $\vec{K} = I\vec{\omega}$.
Il momento d'inerzia si trova sommando il momento d'inerzia della sbarra e quello del disco prendendo come centro per il calcolo il punto d'origine del sistema di riferimento. Quindi bisogna considerare il momento d'inerzia della sbarra non passante per il centro ma per un estremo e il momento del disco per non asse non passante per il centro quindi calcolato col teorema di Huygens-Steiner:

$$I_{tot} = I_{sbarra} + I_{disco} = \frac{m_s l^2}{3} + \left(\frac{m_d l^2}{2} + m_d l^2\right) = \frac{1}{3} * 1 * 1^2 + \frac{1}{2} * 1 * 0.2^2 + 1 * 1^2 = 1.35 kg \cdot m^2$$

Le forze in gioco sul sistema sono la forza peso della sbarra e quella del disco. Calcolo il momento delle forze usando come centro di riduzione il centro del sistema di riferimento. I bracci delle forze possono essere calcolati con semplici considerazioni geometriche usando l'angolo α:

$$\vec{M}^{ext} = \vec{r}_s \times \vec{P}_s + \vec{r}_d \times \vec{P}_d = (r_s \hat{i}) \times (-m_s g \hat{j}) + (r_d \hat{i}) \times (-m_d g \hat{j}) =$$

$$= -\frac{l}{2} m_s g sen30 \hat{k} - l m_d g sen30 \hat{k} = -0.5 * 1 * 9.8 * sen30 \hat{k} - 1 * 1 * 9.8 * sen30 \hat{k} = -7.35 \hat{k} N \cdot m$$

L'accelerazione angolare quindi si ottiene:

$$\vec{M}^{ext} = \dot{\vec{K}} = I\dot{\vec{\omega}} \Rightarrow -7.35\hat{k} = 1.35\dot{\omega}\hat{k} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{-7.35}{1.35} = -5.44 rad/s^2 \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = -5.44\hat{k} rad/s^2$$

b)Non essendoci forze dissipative l'energia meccanica si conserva. Impongo quindi la conservazione dell'energia meccanica totale tra il punto iniziale in cui il sistema è in quiete orizzontalmente e il punto in cui il sistema ha compiuto una rotazione di 60°

$$E^{in}_{mecc} = E^{fin}_{mecc} \Rightarrow E^{in}_{cin} + \sum E^{in}_{pot} = E^{fin}_{cin} + \sum E^{fin}_{pot}$$

Il sistema inizialmente in quiete non possiede né energia cinetica né energia potenziale perché entrambi i centri di massa dei due oggetti sono sull'asse x e quindi a quota h=0 nel sistema di riferimento scelto. Nel punto finale il sistema possiede energia cinetica di tipo rotazionale e le due energie potenziali delle forze peso calcolate rispetto ai due centri di massa.

$$0 + 0 = \frac{1}{2} I\omega^2 + m_s g h_s + m_d g h_d \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} I\omega^2 - m_s g \frac{l}{2} sen60 - m_d g l sen60 I\omega^2 = m_s g l sen60 + 2 m_d g l sen60 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m_s g l sen60 + 2 m_d g l sen60}{I}} = \sqrt{\frac{1 * 9.8 * sen60 + 2 * 1 * 9.8 * 1 * sen60}{1.35}} = 4.34 rad/s$$

Avendo calcolato la velocità angolare ora si può calcolare anche il momento angolare del sistema quando ha compiuto una rotazione di 60°:

$$\vec{K} = I\vec{\omega} = 1.35 * (-4.34\hat{k}) = -5.86\hat{k} kg \cdot m^2/s$$

c) si riutilizza la conservazione dell'energia meccanica per trovare la velocità angolare quando il sistema ha compiuto una rotazione di 180° notando che in questo caso di nuovo i centri di massa dei due oggetti si trovano sull'asse delle x per cui anche l'energia potenziale gravitazionale finale è nulla. Rimane solo l'energia cinetica finale di tipo rotazionale. L'equazione di conservazione diventa:

$$E^{in}_{mecc} = E^{fin}_{mecc} \Rightarrow E^{in}_{cin} + \sum E^{in}_{pot} = E^{fin}_{cin} + \sum E^{fin}_{pot} \Rightarrow 0 + 0 = \frac{1}{2} I\omega^2 + 0 \Rightarrow \omega = 0 rad/s$$

EX 5

a)per calcolare il momento d'inerzia si devono sommare due contributi, uno per ogni massa situata all'estremità dell'asta che priva di massa non dà contributo. Come punto per il calcolo del momento d'inerzia si considera il centro = del sistema di riferimento:

$$I = m(l - d^2) + md^2 = 0.5 * 0.3^2 + 0.5 * 0.2^2 = 0.065 kg \cdot m^2$$

b) c) non essendoci forze esterne al sistema durante l'urto si conserva il momento angolare totale dalla II equazione cardinale ($\vec{M}^{ext} = \dot{\vec{K}}$. Se $\vec{M}^{ext} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{K}} = 0 \Rightarrow \vec{K} = \cos t$). Inoltre non ci sono forze dissipative per cui si conserva l'energia meccanica totale. Impongo queste due equazioni e si ottiene un sistema di due equazioni nelle due incognite che sono la velocità del proiettile dopo l'urto e la velocità angolare dell'asta dopo l'urto.
Per la conservazione del momento angolare si noti che prima dell'urto si ha solo momento della quantità di moto del proiettile mentre dopo l'urto si ha momento della quantità di moto del proiettile che rimbalza e momento angolare dell'asta che inizia a ruotare.

$$\begin{cases} \vec{K}_{in} = \vec{K}_{fin} \\ \vec{E}^{in}_{mecc} = \vec{E}^{fin}_{mecc} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r} \times m\vec{v}_{in} = \vec{r} \times m\vec{v}_{fin} + I\vec{\omega} \\ \vec{E}^{in}_{cin} + \sum \vec{E}^{in}_{pot} = \vec{E}^{fin}_{cin} + \sum \vec{E}^{fin}_{pot} \end{cases} \Rightarrow$$

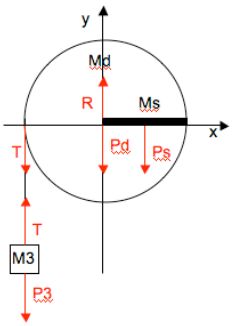
$$\begin{cases} (-d\hat{j}) \times (m_0 v_{in}\hat{i}) = (-d\hat{j}) \times (m_0 v_{fin}\hat{i}) + I\omega\hat{k} \\ \frac{1}{2} m_0 v^2 - m_0 gd - mgd + mg(l-d) = \frac{1}{2} m_0 v_{fin}{}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 - m_0 gd - mgd + mg(l-d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dm_0 v_{in}\hat{k} = dm_0 v_{fin}\hat{k} + I\omega\hat{k} \\ \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 v_{fin}{}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2dmv_{in} = 2dmv_{fin} + I\omega \\ m_0 v^2 = m_0 v_{fin}{}^2 + I\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.2v_{in} = 0.2v_{fin} + 0.065\omega \\ v_{in}^2 = v_{fin}^2 + 0.065\omega^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{fin} = 2 - 0.325\omega \\ 4 = 4 + 0.325^2\omega^2 - 4 * 0.325\omega + 0.065\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{fin} = 2 - 0.325\omega \\ \omega(\omega(0.325^2 + 0.065) - 4 * 0.325) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \frac{4 * 0.325}{0.325^2 + 0.065} = 7.62 rad/s \\ v_{fin} = -0.48 m/s \end{cases}$$

Avendo trovato la velocità del proiettile negativa vuol dire che il proiettile rimbalza indietro.

EX 6



In figura sono segnate in rosso tutte le forze agenti sui vari oggetti del sistema.
Per trovare la massa 3 considero le equazioni della statica in cui oltre alla risultante delle forze nulla deve essere nulla anche la risultante dei momenti in quanto le forze hanno punti di applicazione diversi. Come centro di riduzione per il calcolo dei

momenti prendo l'origine del sistema di riferimento; in questo modo sia il peso del disco sia la reazione vincolare hanno braccio nullo. L'equazione delle forze la proietto sull'unica direzione che mi serve, cioè quella verticale.

$$\begin{cases}\sum \vec{F}=0\\ \sum \vec{M}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{P}_s+\vec{P}_d+\vec{R}+\vec{P}_3=0\\ \vec{r}_s\times\vec{P}_s+\vec{r}_3\times\vec{P}_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{M}{3}g-Mg-M_3g+R=0\\ (\frac{R}{2}\hat{i})\times(-\frac{M}{3}g\hat{j})+(-R\hat{i})\times(-M_3g\hat{j})=0\end{cases}$$

$$-\frac{MRg}{6}\hat{k}+RM_3g\hat{k}=0\Rightarrow M_3=\frac{M}{6}=1kg$$

b) il momento d'inerzia del sistema è dato dalla somma del momento d'inerzia del disco, della sbarra e della massa M3, tutti calcolati rispetto all'origine del sistema di riferimento.

$$I_{tot}=I_{sbarra}+I_{disco}+I_3=\frac{M_DR^2}{2}+\frac{M_SR^2}{12}+M_S\left(\frac{R}{2}\right)^2+M_3R^2=$$

$$=\frac{MR^2}{2}+\frac{MR^2}{12*3}+\frac{MR^2}{4*3}+\frac{MR^2}{6}=\frac{18+1+3+6}{36}MR^2=\frac{28}{36}*6*1^2=4.67kg\cdot m^2$$

c) per trovare l'accelerazione angolare dopo il taglio della corda devo utilizzare la seconda equazione cardinale: $\vec{M}^{ext}=\dot{\vec{K}}=I\dot{\vec{\omega}}$ dove il momento angolare è solo di tipo rotazionale.
Dobbiamo quindi calcolare le varie quantità che mi servono. Partiamo dal momento d'inerzia, che è composto da due contributi, quello del disco e quello dell'asta (M3 è stata tagliata quindi non contribuisce più), calcolati entrambi rispetto all'origine del sistema di riferimento:

$$I_{tot}=I_{sbarra}+I_{disco}=\frac{M_DR^2}{2}+\frac{M_SR^2}{12}+M_S\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{MR^2}{2}+\frac{MR^2}{12*3}+\frac{MR^2}{4*3}=\frac{18+1+3}{36}MR^2=\frac{22}{36}MR^2$$

Ora calcolo il momento delle forze esterne. Le forze che contribuiscono sono il peso del disco, il peso della sbarra e la reazione vincolare. Se calcolo il momento rispetto al centro del sistema di riferimento il braccio del peso del disco e della reazione vincolare è nullo e rimane solo il contributo del peso della sbarra:

$$\vec{M}^{ext}=\vec{r}_S\times\vec{P}_S=(\frac{R}{2}\hat{i})\times(-\frac{M}{3}g\hat{j})=-\frac{MRg}{6}\hat{k}$$

Ora ricavo l''accelerazione angolare:

$$\vec{M}^{ext}=I\dot{\vec{\omega}}\Rightarrow-\frac{MRg}{6}\hat{k}=\frac{22}{36}MR^2\dot{\vec{\omega}}\Rightarrow\dot{\vec{\omega}}=\frac{-\frac{MRg}{6}}{\frac{22}{36}MR^2}\hat{k}=-\frac{6g}{22R}\hat{k}=-2.67\hat{k}rad/s$$