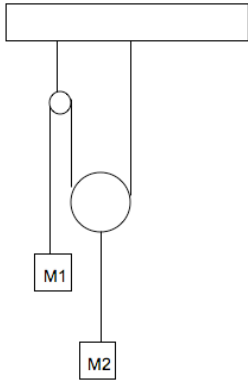


DINAMICA

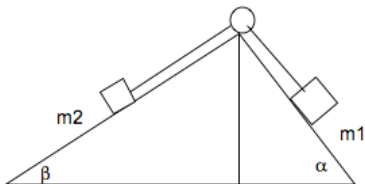
EX 1

Con un saliscendi formato da due carrucole si vuole sollevare una massa $M_1=50\text{kg}$. Sapendo che il carico di rottura della fune è $T_0=670\text{N}$ calcolare: a) il valore massimo della massa M_2 e le accelerazioni; b) il valore di M_2 affinché la massa M_1 salga a velocità costante e il corrispondente valore di T .



EX 2

Alla sommità di un doppio piano inclinato è fissata una carrucola su cui scorre senza attrito una fune inestensibile senza massa. Alle 2 estremità della fune sono attaccati 2 corpi di massa $m_1=m$ e $m_2=2m$. Se $\beta=30^\circ$ calcolare: a) l'angolo α affinché il sistema si muova con un'accelerazione pari a $a=g/9$; b) le tensioni della fune se $m=1\text{kg}$.



EX 3

Un pendolo conico è costituito da un punto materiale di massa $m=6\text{g}$ legato a una fune lunga $l=25\text{cm}$ fissa ad un estremo. Il pendolo descrive una circonferenza orizzontale con velocità angolare $\omega_0=7\text{rad/s}$. Calcolare: a) il valore della tensione della fune; b) il raggio della circonferenza; c) la massima apertura per un carico di rottura $T_0=117,6 \cdot 10^{-3}\text{N}$ e la velocità angolare massima.

EX 4

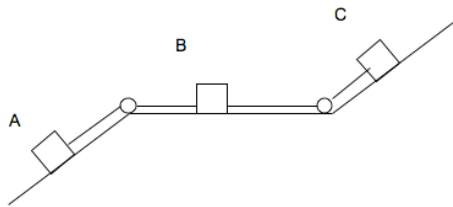
Una pallina di massa $m=1\text{kg}$ in quiete su un piano scabro viene colpita da un martello con impulso in modulo pari a $\mathcal{J}=14\text{Nsec}$. La pallina si ferma dopo un tratto $s=8\text{m}$. Sapendo che il coefficiente d'attrito statico è $\mu=5/8$ calcolare: a) l'impulso; b) la direzione rispetto all'orizzontale con cui arriva il martello.

EX 5

Una sferetta di massa $m=120\text{g}$ ruota con velocità angolare $\omega=3.4\text{rad/s}$ su un piano orizzontale. La sfera è tenuta sulla traiettoria circolare da una molla di lunghezza a riposo $l=12\text{cm}$ e costante elastica $k=15\text{N/m}$. Determinare il raggio della circonferenza.

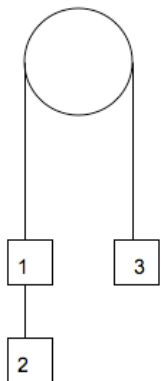
EX 6

I tre blocchi A, B e C sono collegati da 2 funi inestensibili e di massa trascurabile come in figura. I blocchi A e C si trovano su due piani inclinati di un angolo di 30° , A su un piano liscio mentre C su un piano scabro. B si trova su un piano orizzontale liscio. Sapendo che $M_C=95\text{kg}$, $M_B=50\text{kg}$, $T_{AB}=1.5T_{BC}$, calcolare: a) l'accelerazione del sistema; b) le tensioni delle funi.



EX 7

Una macchina di Atwood è realizzata collegando le masse 1, 2 e 3 come in figura ($m_1=2\text{kg}$, $m_2=1\text{kg}$). La carrucola è ideale. Nella condizione iniziale le masse 1 e 2 salgono mentre la massa 3 scende con velocità costante. Ad un certo punto la massa 2 si stacca. Calcolare l'accelerazione delle restanti masse.



EX 8

Una boccia di massa $M=2.2\text{kg}$ scivola su un asse verticale in presenza di attrito, descritto dal coefficiente $\mu=0.10$. La forza premente F può essere regolata agendo sulla vite laterale. Determinare il valore di F affinché la boccia scivoli con accelerazione pari a $1/3$ di g .

EX 9

Un corpo di massa $m=1.9\text{kg}$ scivola su un piano orizzontale in presenza di attrito.

Siano $\mu_s=0.3$ e $\mu_d=0.15$ i coefficienti d' attrito statico e dinamico rispettivamente. Se il corpo è inizialmente fermo, si determini la forza minima F che permette di metterlo in movimento. Supponendo che la forza F continui a spingere il corpo, determinare la velocità v che acquisisce dopo un tempo $t=2.4\text{s}$

EX 10

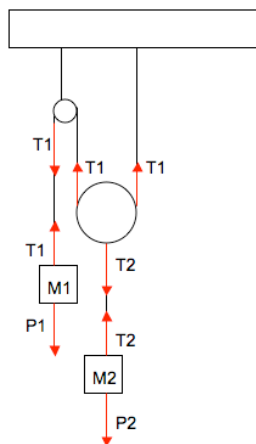
Due blocchi di massa $m_1=12\text{kg}$ e $m_2=5\text{kg}$ legati tra loro da una fune ideale vengono lasciati cadere lungo un piano inclinato di 30° . Il coefficiente di attrito fra m_1 e il piano è $\mu=1/\sqrt{3}$ e la tensione della fune è $T=6\text{N}$. Determinare: a) l'accelerazione del sistema; b) il coefficiente d'attrito fra m_2 e il piano; c) il blocco trainato.

EX 11

Un oggetto puntiforme di massa $m=0.5\text{kg}$ lanciato con velocità $v_0=6\text{m/s}$ in direzione radiale dal bordo di una giostra di raggio $R=4\text{m}$ verso il centro di essa si ferma in un tempo $t=1\text{s}$. Calcolare il coefficiente d'attrito. Se si pone in rotazione la giostra inizialmente ferma con velocità angolare di 2rad/s , l'oggetto nel sistema di riferimento della giostra resta nella posizione raggiunta. Calcolare il modulo della reazione vincolare esercitata dalla giostra sulla massa m .

SOLUZIONI

EX 1



In figura sono mostrate tutte le forze in gioco agenti sia sulle due masse che sulle due carrucole. Per prima cosa bisogna scrivere l'equazione della dinamica per i due corpi separatamente e poi proiettarla lungo l'unica direzione che interessa in questo caso

ovvero quella verticale. Da ricordare che quando si scrive $F=ma$ per F si intende la risultante delle forze agenti sul corpo considerato.

$$\begin{cases} \vec{F}_1^{tot} = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{F}_2^{tot} = m_2 \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -P_1 + T_1 = m_1 a_1 \\ -P_2 + T_2 = m_2 a_2 \end{cases}$$

Come si vede è un sistema di 2 equazioni in cui le incognite sono 4: T_1 , T_2 , a_1 e a_2 . Servono quindi altre due condizioni. La prima condizione viene da considerazioni sulla carrucola che tiene il corpo 2. Siccome la carrucola è ideale e in quiete, la somma delle tensioni che agiscono su di lei devono bilanciarsi per cui:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow T_1 + T_1 - T_2 = 0 \Rightarrow T_2 = 2T_1 \Rightarrow \begin{cases} T_1 = T \\ T_2 = 2T \end{cases}$$

La seconda condizione viene da considerazioni sugli spazi percorsi dalle due masse: lo spazio percorso dalla fune che tiene la massa 1 è doppio rispetto allo spazio percorso dalla fune che tiene la massa 2 nello stesso intervallo temporale. Per cui supponendo nulle tutte le condizioni iniziali e ricordandoci che si tratta di un moto uniformemente accelerato:

$$s_1 = 2s_2 \Rightarrow \frac{1}{2} a_1 t^2 = 2 \frac{1}{2} a_2 t^2 \Rightarrow a_1 = 2a_2 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = a \\ a_1 = 2a \end{cases}$$

Ora il sistema diventa perfettamente risolvibile:

$$\begin{cases} -P_1 + T_1 = m_1 a_1 \\ -P_2 + T_2 = m_2 a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m_1 g + T_0 = m_1 2a \\ -m_2 g + 2T_0 = m_2^{\max} a \end{cases}$$

$$a = \frac{T_0 - m_1 g}{2m_1} = \frac{670 - 50 * 9.8}{2 * 50} = 1.8 m/s^2 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1.8 m/s^2 \\ a_1 = 3.6 m/s^2 \end{cases}$$

$$m_2^{\max} = \frac{2T_0}{g - a} = \frac{2 * 670}{9.8 - 1.8} = 167.5 kg$$

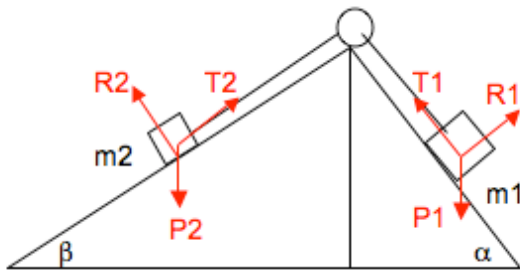
Se la massa m_1 sale a velocità costante, significa che le accelerazioni sono entrambe nulle. Il sistema diventa quindi:

$$\begin{cases} -P_1 + T_1 = 0 \\ -P_2 + T_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m_1 g + T = 0 \\ -m_2 g + 2T = 0 \end{cases}$$

$$T = m_1 g = 50 * 9.8 = 490 N$$

$$m_2 = \frac{2T}{g} = \frac{2m_1 g}{g} = 2m_1 = 100 kg$$

EX 2



In figura sono mostrate le forze applicate a entrambi i corpi. Scriviamo l'equazione per la dinamica separatamente per i due corpi supponendo che tutto il sistema si sposti verso destra. Per entrambi i corpi proietto l'equazione della dinamica su due direzioni date una dal piano inclinato e la seconda dalla perpendicolare al piano. Scelgo come verso positivo per l'asse x quello verso destra per entrambi.

$$1) \vec{R}_1 + \vec{T}_1 + \vec{P}_1 = m_1 \vec{a}_1$$

$$2) \vec{R}_2 + \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2 \vec{a}_2$$

$$1x) -T_1 + P_1 \sin \alpha = m_1 a$$

$$1y) -P_1 \cos \alpha + R_1 = 0$$

$$2x) T_2 - P_2 \sin \beta = m_2 a$$

$$2y) -P_2 \cos \beta + R_2 = 0$$

Per una fune ideale $T_1 = T_2$. Sommando l'equazione 1x e la 2x ricavo $\sin \alpha$:

$$\begin{cases} 1x) -T + P_1 \sin \alpha = m_1 a \\ 2x) T - P_2 \sin \beta = m_2 a \end{cases} +$$

$$P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta = a(m_1 + m_2) \Rightarrow m_1 g \sin \alpha - m_2 g \sin \beta = a(m_1 + m_2) \Rightarrow m g \sin \alpha - 2 m g \sin \beta = a(m + 2m)$$

$$\sin \alpha = \frac{a(m + 2m) + 2 m g \sin \beta}{m g} = \frac{1/9 g * 3m + 2 m g 1/2}{m g} = \frac{1/3 + 1}{1} = \frac{4}{3} > 0$$

Il risultato impossibile dice che il verso dell'accelerazione ipotizzato è sbagliato, quindi i corpi si muovono nell'altra direzione (verso sinistra). Le equazioni a questo punto diventano:

$$\begin{cases} 1x) -T + P_1 \sin \alpha = -m_1 a \\ 2x) T - P_2 \sin \beta = -m_2 a \end{cases} +$$

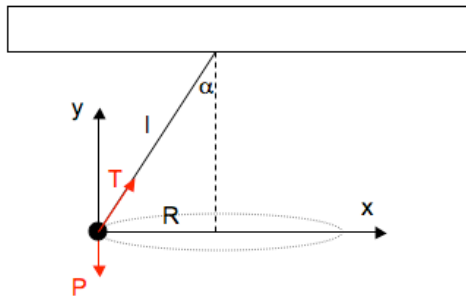
$$P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta = -a(m_1 + m_2) \Rightarrow m_1 g \sin \alpha - m_2 g \sin \beta = -a(m_1 + m_2) \Rightarrow m g \sin \alpha - 2 m g \sin \beta = -a(m + 2m)$$

$$\sin \alpha = \frac{-a(m + 2m) + 2 m g \sin \beta}{m g} = \frac{-1/9 g * 3m + 2 m g 1/2}{m g} = \frac{-1/3 + 1}{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha \approx 41.8^\circ$$

La tensione della fune dall'equazione 1x diventa:

$$T = m g \sin \alpha + m a = m g \frac{2}{3} + m \frac{1}{9} g = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9} \right) * 1 * 9.8 = 7.63 N$$

EX 3



In figura sono mostrate tutte le forze agenti sul corpo che costituisce il pendolo. Si deve scrivere l'equazione della dinamica $\vec{F}^{tot} = m\vec{a}$ in questo caso, notando che le forze in gioco sono solo il peso e la tensione della fune, mentre l'accelerazione è quella di un moto circolare vincolato da una fune e quindi è un'accelerazione centripeta che può essere scritta in funzione del raggio R della circonferenza.

$$\vec{F}^{tot} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}_c = m\omega^2 \vec{R}$$

Si proietta ora l'equazione lungo la direzione x e y notando che il moto avviene solo lungo la direzione x, quindi:

$$x) T \sin \alpha + 0 = m\omega^2 R$$

$$y) T \cos \alpha - mg = 0$$

Da considerazioni geometriche si nota che $\sin \alpha = \frac{R}{l}$. Sostituendo questa espressione nell'equazione lungo la x ricavo la tensione della fune:

$$T \sin \alpha + 0 = m\omega^2 R \Rightarrow T \frac{R}{l} = m\omega^2 R \Rightarrow T = m\omega^2 l = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 7^2 \cdot 0.25 = 75.5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Per calcolare il raggio della circonferenza elevo al quadrato le due equazioni lungo le due direzioni e le sommo:

$$\begin{cases} x) T \sin \alpha + 0 = m\omega^2 R \\ y) T \cos \alpha - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T^2 \sin^2 \alpha = m^2 \omega^4 R^2 \\ T^2 \cos^2 \alpha = m^2 g^2 \end{cases} +$$

$$T^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = m^2 \omega^4 R^2 + m^2 g^2 \Rightarrow T^2 = m^2 \omega^4 R^2 + m^2 g^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{T^2 - m^2 g^2}{m^2 \omega^4}} = 0.15 \text{ m}$$

L'angolo di apertura massimo si ottiene sfruttando l'equazione sulla y in cui al posto di T utilizzo il carico di rottura. Una volta trovato l'angolo massimo, ricordando il legame tra raggio della circonferenza e angolo di apertura, sostituendolo nell'equazione sulla x ricavo anche la velocità angolare massima:

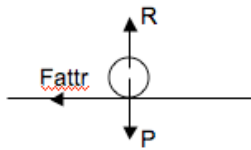
$$x) T_0 \sin \alpha_{\max} = m \omega_{\max}^2 R_{\max}$$

$$y) T_0 \cos \alpha_{\max} = mg$$

$$\Rightarrow \cos \alpha_{\max} = \frac{mg}{T_0} = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8}{117.6 \cdot 10^{-3}} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$x) T_0 \frac{R_{\max}}{l} = m \omega_{\max}^2 R_{\max} \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\frac{T_0}{ml}} = \sqrt{\frac{117.6 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-3} \cdot 0.25}} = 8.85 \text{ rad/s}$$

EX 4



L'impulso è un vettore e lo possiamo scrivere come: $\vec{S} = S_x \hat{i} + S_y \hat{j}$

Per il teorema dell'impulso: $\vec{S} = \Delta \vec{q}$. Non essendoci moto lungo la direzione verticale il teorema si può riscrivere come: $S_x = \Delta q_x = mv_{\text{finale}} - mv_{\text{iniziale}}$

Ora supponendo che il corpo sia stato messo in moto dall'impulso, possiamo scrivere l'equazione della dinamica prima in forma vettoriale e poi proiettata lungo le due direzioni verticale e orizzontale in modo da ricavare l'accelerazione a cui è sottoposto l'oggetto:

$$\vec{F}^{\text{tot}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{R} + \vec{P} + \vec{F}_{\text{attr}} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} x) -F_{\text{attr}} = ma \\ y) R - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x) -\mu_s R = ma \\ y) R - P = mg \end{cases} \Rightarrow -\mu_s mg = ma \Rightarrow a = -\mu_s g$$

Il corpo è quindi soggetto a una decelerazione che lo fa fermare dopo 8m. Dalle equazioni del moto uniformemente accelerato per spazio e velocità posso ricavare il tempo dell'arresto e la velocità iniziale con cui si è messo in moto il corpo.

$$\begin{cases} s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \\ v = v_0 - a t \end{cases}$$

Sostituendo le quantità note si ottiene:

$$\begin{cases} 8 = v_0 t - \frac{1}{2} \mu_s g t^2 \\ 0 = v_0 - \mu_s g t \Rightarrow t = \left(\frac{v_0}{\mu_s g} \right) \end{cases} \Rightarrow 8 = v_0 * \frac{v_0}{\mu_s g} - \frac{1}{2} \mu_s g * \left(\frac{v_0}{\mu_s g} \right)^2$$

$$8 = \frac{v_0^2}{\mu_s g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu_s g} \Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu_s g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{16 \mu_s g} = 9.9 \text{ m/s}$$

La v_0 che abbiamo ottenuto sopra che è la velocità iniziale con cui il corpo comincia a muoversi sul piano coincide con la velocità finale nel teorema dell'impulso mentre la velocità iniziale è nulla perché nel considerare l'impulso bisogna notare che la sua azione si esaurisce prima che il corpo cominci a muoversi. Quindi:

$$\mathfrak{S}_x = \Delta q_x = mv_{finale} - mv_{iniziale} = m(v_0 - 0) = 9.9 N \cdot s$$

Siccome l'impulso è un vettore, conoscendo il modulo e una componente posso ricavare l'altra:

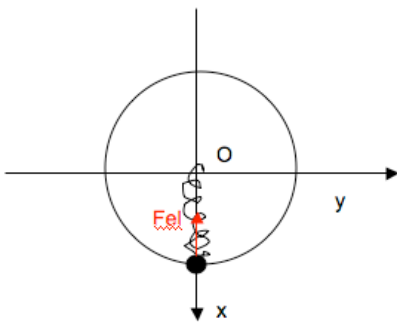
$$\mathfrak{S}_y = \sqrt{|\vec{\mathfrak{S}}|^2 - \mathfrak{S}_x^2} = \sqrt{14^2 - 9.9^2} = 9.9 N \cdot s$$

$$\Rightarrow \vec{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}_x \hat{i} + \mathfrak{S}_y \hat{j} = 9.9 \hat{i} + 9.9 \hat{j}$$

La direzione da cui proviene l'impulso si ottiene calcolando:

$$\tan \alpha = \frac{\mathfrak{S}_y}{\mathfrak{S}_x} = \frac{9.9}{9.9} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

EX 5

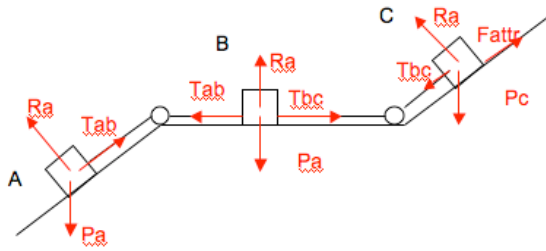


Scriviamo l'equazione della dinamica per la sferetta $\vec{F}^{tot} = m\vec{a}$ e vediamo che l'unica forza in gioco è la forza di richiamo elastica diretta verso il centro della circonferenza e che l'accelerazione è un'accelerazione centripeta data dalla formula per il moto circolare. Quindi: $\vec{F}_{el} = m\omega^2 \vec{R}$, dove R è il raggio della circonferenza diretto verso il centro. Proietto l'equazione lungo l'unica direzione che interessa che è quella radiale notando che il raggio della circonferenza è dato dalla lunghezza a riposo della molla più l'allungamento che segue dal moto:

$$\vec{F}_{el} = m\omega^2 \vec{R} \Rightarrow k\Delta l = m\omega^2(l + \Delta l) \Rightarrow \Delta l = \frac{m\omega^2 l}{k - m\omega^2}$$

$$R = l + \Delta l = l + \frac{m\omega^2 l}{k - m\omega^2} = \frac{lk - m\omega^2 l + m\omega^2 l}{k - m\omega^2} = \frac{lk}{k - m\omega^2} = \frac{0.12 * 15}{15 - 0.12 * 3.4^2} = 0.13 m$$

EX 6



In figura sono riportate le forze agenti su ogni corpo. Quello che va fatto è scrivere per ogni corpo l'equazione della dinamica e scomporli lungo le due direzioni del sistema di riferimento. Per i piani inclinati le due direzioni sono una parallela al piano stesso e una perpendicolare a esso. Per il piano orizzontale il sistema preso è il consueto con direzioni orizzontale e verticale. Quindi si ha:

$$A) \vec{T}_{AB} + \vec{R}_A + \vec{P}_A = M_A \vec{a}$$

$$B) \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{BC} + \vec{R}_B + \vec{P}_B = M_B \vec{a}$$

$$C) \vec{T}_{BC} + \vec{R}_C + \vec{P}_C + \vec{F}_{attr} = M_C \vec{a}$$

Suppongo che tutto il sistema si sposti verso sinistra. Proiettando le equazioni si ha:

$$Ax) T_{AB} - M_A g \sin \alpha = -M_A a$$

$$Ay) R_A - M_A g \cos \alpha = 0$$

$$Bx) -T_{AB} + T_{BC} = -M_B a$$

$$By) R_B - M_B g = 0$$

$$Cx) -T_{BC} - M_C g \sin \alpha + F_{attr} = -M_C a$$

$$Cy) R_C - M_C g \cos \alpha = 0$$

Per trovare l'accelerazione del sistema basta considerare le equazioni Ax e Bx con la condizione aggiuntiva data sulle tensioni delle funi:

$$Ax) T_{AB} - M_A g \sin \alpha = -M_A a$$

$$Bx) -T_{AB} + T_{BC} = -M_B a$$

$$T_{AB} = \frac{3}{2} T_{BC}$$

Quindi

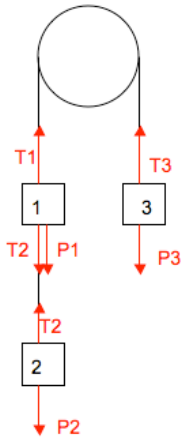
$$\begin{cases} T_{AB} - M_A g \sin \alpha = -M_A a \\ -T_{AB} + \frac{2}{3} T_{AB} = -M_B a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{AB} - M_A g \sin \alpha = -M_A a \\ -T_{AB} = -3M_B a \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3M_B a - M_A g \sin \alpha = -M_A a \Rightarrow a = \frac{-M_A g \sin \alpha}{-M_A - 3M_B} = \frac{-95 * 9.8 * \sin 30}{-95 - 3 * 50} = 1.9 m/s^2$$

$$T_{AB} = 3M_B a = 3 * 50 * 1.9 = 285 N$$

$$T_{BC} = \frac{2}{3} T_{AB} = 190 N$$

EX 7



In figura sono riportate le forze che agiscono su ogni massa. La massa m_3 che è l'unica mancante si ricava dalla prima informazione: in questa configurazione m_1 e m_2 salgono mentre m_3 scende con velocità costanti. Si devono scrivere le equazioni della dinamica per tutte e 3 le masse notando che se le velocità sono costanti le accelerazioni sono nulle. Quindi:

$$1) \vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = M_1 \vec{a} = 0$$

$$2) \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = M_2 \vec{a} = 0$$

$$3) \vec{P}_3 + \vec{T}_3 = M_3 \vec{a} = 0$$

Le proietto sull'unica direzione che mi interessa cioè quella verticale:

$$\begin{cases} 1) -M_1 g + T_1 - T_2 = 0 \\ 2) -M_2 g + T_2 = 0 \\ 3) -M_3 g + T_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2) T_2 = M_2 g \\ 1) -M_1 g + T_1 - M_2 g = 0 \Rightarrow T_1 = M_1 g + M_2 g \\ 3) T_3 = M_3 g \end{cases}$$

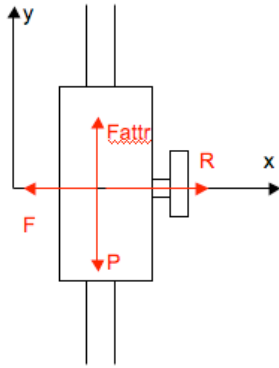
La carrucola è ideale quindi:

$$T_1 = T_3 \Rightarrow M_1 g + M_2 g = M_3 g \Rightarrow M_3 = M_1 + M_2 = 3 kg$$

Lo stesso procedimento va ripetuto nel caso in cui si stacchi la massa m_2 e suppongo la direzione del moto degli oggetti non cambi. In questo caso le accelerazioni non nulle saranno dirette verso l'altro per m_1 e verso il basso per m_3 . Quindi:

$$\begin{cases} 1) \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a} \\ 3) \vec{P}_3 + \vec{T}_3 = m_3 \vec{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -M_1 g + T_1 = M_1 a \\ -M_3 g + T_3 = -M_3 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = M_1 a + M_1 g \\ -M_3 g + M_1 a + M_1 g = -M_3 a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{g(M_3 - M_1)}{M_1 + M_3} = 1.96 \text{ m/s}^2$$

EX 8

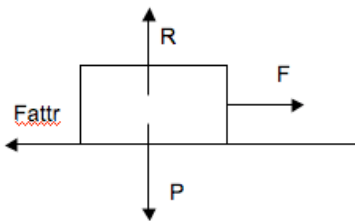


In figura è disegnata schematicamente la boccola e le forze che agiscono su di essa. Si deve scrivere l'equazione della dinamica e proiettarla lungo le due direzioni del sistema di riferimento scelto notando che il moto avviene solo lungo l'asse verticale e per come abbiamo preso il sistema di riferimento l'accelerazione è verso il basso.

$$\vec{F}^{tot} = \vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_{attr} + \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} x) -F + R = 0 \\ y) -mg + F_{attr} = -ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x) R = F \\ y) -mg + \mu_d R = -ma \Rightarrow -mg + \mu_d F = -ma \end{cases}$$

$$F = \frac{-ma + mg}{\mu_d} = \frac{2.2(9.8 - \frac{1}{3} * 9.8)}{0.1} = 143.7 \text{ N}$$

EX 9



In figura sono evidenziate le forze agenti sul corpo. Si deve scrivere l'equazione della dinamica e proiettarla sui due assi verticale e orizzontale.

Prima che il corpo si muova si tratta di un caso di statica per cui l'accelerazione del corpo è nulla e da questa condizione siamo in grado di ricavare il valore di F.

$$\vec{F}^{tot} = \vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_{attr} + \vec{P} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x) F - F_{attr} = 0 \\ y) -mg + R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x) F = F_{attr} = \mu_s R = \mu_s mg = 0.3 * 1.9 * 9.8 = 5.6 \text{ N} \\ y) R = mg \end{cases}$$

Quando il corpo inizia muoversi l'equazione della dinamica diventa:

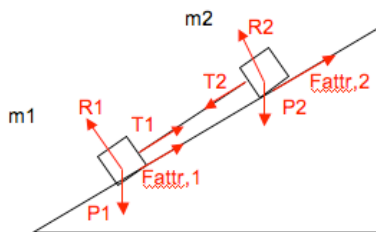
$$\vec{F}^{tot} = \vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_{attr} + \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} x) F - F_{attr} = ma \\ y) -mg + R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x) F - F_{attr} = F - \mu_d R = F - \mu_d mg = ma \\ y) R = mg \end{cases}$$

$$a = \frac{F - \mu_d mg}{m} = \frac{5.6 - 0.15 * 1.9 * 9.8}{1.9} = 1.48 m/s^2$$

Avendo trovato l'accelerazione, uso la formula del moto uniformemente accelerato per trovare la velocità raggiunta dopo un tempo $t=2.4s$

$$v = v_0 + a * t = 0 + 1.48 * 2.4 = 3.5 m/s$$

EX 10



In figura sono mostrate le forze agenti su ciascuno dei due corpi supponendo che il blocco 2 sia quello trainato. Bisogna scrivere l'equazione della dinamica separatamente per i due corpi e andarla a proiettare sulle due direzioni del sistema di riferimento scelto, in questo caso l'asse x positivo verso l'alto lungo il piano inclinato e l'asse y perpendicolare al piano stesso. Si ricordi che essendo la fune ideale $T1=T2$. Quindi si ottiene:

$$\begin{cases} 1) \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{attr,1} = m_1 \vec{a} \\ 2) \vec{P}_2 + \vec{R}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{attr,2} = m_2 \vec{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x) -m_1 g \sin \alpha + T + F_{attr,1} = -m_1 a \\ 1y) R_1 - m_1 g \cos \alpha = 0 \\ 2x) -m_2 g \sin \alpha - T + F_{attr,2} = -m_2 a \\ 2y) R_2 - m_2 g \cos \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1y) R_1 = m_1 g \cos \alpha \\ 2y) R_2 = m_2 g \cos \alpha \\ 1x) -m_1 g \sin \alpha + T + \mu_1 R_1 = -m_1 g \sin \alpha + T + \mu_1 m_1 g \cos \alpha = -m_1 a \\ 2x) -m_2 g \sin \alpha - T + \mu_2 R_2 = -m_2 g \sin \alpha - T + \mu_2 m_2 g \cos \alpha = -m_2 a \end{cases}$$

$$1x)a = \frac{-m_1 g \sin \alpha + T + \mu_1 m_1 g \cos \alpha}{-m_1} = \frac{-12 * 9.8 * \sin 30 + 6 + 1/\sqrt{3} * 12 * 9.8 * \cos 30}{-12} = -0.5 m/s^2$$

Abbiamo ottenuto un'accelerazione negativa, che vorrebbe dire che il sistema si muove verso destra, cosa impossibile. Quindi l'assunzione per cui sia 1 il blocco che traina e 2 quello trainato è sbagliata: 1 è trainato e 2 traina. Rifacendo i calcoli invertendo i segni delle tensioni 1 e 2 nelle equazioni si ottiene:

$$\begin{cases}
1) \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{attr,1} = m_1 \vec{a} \\
2) \vec{P}_2 + \vec{R}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{attr,2} = m_2 \vec{a}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
1x) -m_1 g \sin \alpha - T + F_{attr,1} = -m_1 a \\
1y) R_1 - m_1 g \cos \alpha = 0 \\
2x) -m_2 g \sin \alpha + T + F_{attr,2} = -m_2 a \\
2y) R_2 - m_2 g \cos \alpha = 0
\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}
1y) R_1 = m_1 g \cos \alpha \\
2y) R_2 = m_2 g \cos \alpha \\
1x) -m_1 g \sin \alpha - T + \mu_1 R_1 = -m_1 g \sin \alpha - T + \mu_1 m_1 g \cos \alpha = -m_1 a \\
2x) -m_2 g \sin \alpha + T + \mu_2 R_2 = -m_2 g \sin \alpha + T + \mu_2 m_2 g \cos \alpha = -m_2 a
\end{cases}$$

$$1x) a = \frac{-m_1 g \sin \alpha + T + \mu_1 m_1 g \cos \alpha}{-m_1} = \frac{-12 * 9.8 * \sin 30 - 6 + 1/\sqrt{3} * 12 * 9.8 * \cos 30}{-12} = 0.5 m/s^2$$

$$2x) \mu_2 = \frac{-m_2 a + m_2 g \sin \alpha - T}{m_2 g \cos \alpha} = \frac{-5 * 0.5 + 5 * 9.8 * \sin 30 - 6}{5 * 9.8 * \cos 30} = 0.38$$

EX 11

Si deve scrivere l'equazione della dinamica per l'oggetto lanciato e proiettarla lungo i due assi di un sistema di riferimento xy con x orizzontale e y verticale. Le forze in gioco agenti sulla massa sono la sua forza peso, la reazione vincolare e la forza di attrito:

$$\vec{F}^{tot} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{attr} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} x) -F_{attr} = ma \\ y) -P + R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y) R = P = mg \\ x) -\mu R = -\mu mg = ma \end{cases} \Rightarrow a = -\mu g$$

Il corpo si muove quindi di moto uniformemente decelerato. Usando le equazioni del moto ricavo il coefficiente di attrito richiesto:

$$v = v_0 + at \Rightarrow 0 = 6 - \mu g * 1 \Rightarrow \mu = \frac{6}{9.8 * 1} = 0.6$$

Se pongo la giostra in rotazione, conviene usare un sistema di riferimento solidale al punto materiale: la direzione radiale (x) rimane quella lungo il raggio della giostra, la direzione verticale (y) perpendicolare alla direzione x. Visto dal sistema di riferimento di un osservatore a terra, il sistema di riferimento scelto si muove sulla circonferenza descritta dal moto del punto materiale sulla giostra. Da notare quindi che non c'è moto lungo la direzione verticale mentre si tratta di un moto circolare lungo la direzione orizzontale. L'accelerazione in direzione x è quindi data dall'accelerazione centripeta.

Le forze in gioco sulla massa sono la forza peso e la reazione vincolare. Non metto alcuna direzione nota a priori sulla reazione vincolare. In questo modo ottengo le due componenti della reazione vincolare lungo le due direzioni del sistema di riferimento scelto e per avere il modulo le sommo in quadratura come per qualsiasi altro vettore. L'equazione della dinamica diventa quindi:

$$\vec{F}^{tot} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R}' = m\vec{a}' \Rightarrow \begin{cases} x) R_x = ma_c = m\omega^2 r \\ y) -mg + R_y = 0 \end{cases}$$

Non c'è moto in direzione y quindi uguagli la seconda equazione a zero, mentre sull'asse x l'accelerazione come detto è quella centripeta. r è il raggio della circonferenza percorsa dall'oggetto, quindi la posizione rispetto al centro della giostra raggiunta dalla massa nel punto precedente del problema, calcolabile come differenza fra il raggio R della giostra e lo spazio percorso nel tempo t=1s. Usando le equazioni del moto uniformemente accelerato:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2 = 0 + 6 * 1 - \frac{1}{2} * 0.6 * 9.8 * 1 = 3m$$

$$r = R - s = 4 - 3 = 1m$$

Sostituendo questo risultato nelle equazioni della dinamica ottengo le componenti orizzontale (radiale) e verticale della reazione vincolare. Combinandole vettorialmente si ha il risultato cercato:

$$\begin{cases} x) R_x = ma_c = m\omega^2 r \\ y) -mg + R_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x) R_x = 0.5 * 2^2 * 1 = 2N \\ y) R_y = 0.5 * 9.8 = 4.9N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} = 2\hat{i} + 4.9\hat{j} \Rightarrow |R| = \sqrt{2^2 + 4.9^2} = 5.3N$$