LAVORO E ENERGIA

EX 1

Dato il campo di forze $\vec{F} = -\alpha(3x^2\hat{i} + 3z^2\hat{j} + 6yz\hat{k})$: a) determinare le dimensioni di α; b) verificare se il campo è conservativo e calcolarne eventualmente l'energia potenziale; c) calcolare il lavoro compiuto dalla forza per portare un oggetto di massa m dal punto A(1,2,-1) al punto B (2,1,1).

EX 2

Una sferetta di massa m=0.5kg è appesa all'estremità di un filo inestensibile di massa trascurabile lungo l=1m fisso all'altro estremo. Soffia il vento in direzione orizzontale e la sfera inizialmente in quiete sulla verticale si solleva fino a quando il filo forma con la verticale un angolo φ=60°. Calcolare: a) il lavoro compiuto dal vento; b) la tensione della fune; c) la velocità cui soffia il vento sapendo che $\vec{F} = -k\vec{v}^2$ con $k = \sqrt{3} * 10^{-2} kg/m$.

EX 3

Un corpo di massa m si muove su un piano orizzontale scabro e all'istante iniziale ha velocità v_0. Dopo un tratto D il corpo comprime di un tratto l una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla fino a fermarsi. Calcolare il coefficiente d'attrito.

EX 4

Un profilo rigido è costituito da un tratto orizzontale OA, da un piano inclinato AB di altezza h=2.5m, da una buca BC di lunghezza L=7.5 m e profondità costante h. Un punto materiale di massa m=100g è appoggiato ad una molla di costante elastica $k=10^3$N/m compressa. Se si lascia libera la molla essa imprime al corpo un impulso di modulo 1.4 Ns. Calcolare: a) la compressione iniziale della molla; b) l'angolo di inclinazione del piano perché il corpo arrivi in C.

EX 5

Un punto materiale di massa m scivola lungo un piano inclinato di un angolo α. Il punto parte da fermo da un'altezza h e s_0 è la lunghezza del piano inclinato. Lungo il piano agisce una forza $\vec{F} = \beta\hat{i}$ costante. Alla fine del piano inclinato m va a colpire una molla di costante elastica k. a) Verificare se F è conservativa e calcolarne eventualmente l'energia potenziale; b) trovare la velocità del punto alla fine del piano inclinato; c) trovare la compressione della molla D.

EX 6

Un corpo di massa m è posto in cima a un piano inclinato di un angolo α scabro con coefficiente di attrito μ ad un'altezza h dal suolo. Alla fine del piano inclinato il corpo è vincolato a muoversi su un piano orizzontale liscio dove incontra una molla di costante elastica k. Determinare: a) la velocità con cui il corpo raggiunge la fine del piano inclinato; b) la compressione della molla al primo urto; c) l'angolo di inclinazione del piano affinché il corpo risalga fino ad un'altezza $h_1=h/2$ supponendo $\mu=1/3$.

SOLUZIONI

EX 1

a) le dimensioni di α si trovano considerando che F è una forza e quindi si misura in Newton (N). Così tutte le componenti di F devono avere la stessa unità di misura e quindi anche le stesse dimensioni:

$$[F]=[N]=\left[kg\cdot\frac{m}{s^2}\right]=\left[MLT^{-2}\right]$$

$$\left[-3\alpha x^2\hat{i}-3\alpha z^2\hat{j}-6\alpha yz\hat{k}\right]=\left[MLT^{-2}\right]\Rightarrow\begin{cases}\left[-3\alpha x^2\hat{i}\right]=\left[MLT^{-2}\right]\\ \left[-3\alpha z^2\hat{j}\right]=\left[MLT^{-2}\right]\\ \left[-6\alpha yz\hat{k}\right]=\left[MLT^{-2}\right]\end{cases}$$

$$1)\left[-3\alpha x^2\hat{i}\right]=\left[MLT^{-2}\right]\Rightarrow[-3][\alpha]\left[x^2\right][\hat{i}]=\left[MLT^{-2}\right]\Rightarrow[\alpha]\left[L^2\right]=\left[MLT^{-2}\right]\Rightarrow[\alpha]=\left[ML^{-1}T^{-2}\right]$$

b) per dimostrare che una forza è conservativa deve risultare che il rotore della forza è nullo. È l'unica condizione che se verificata è necessaria ma anche sufficiente per dimostrare che la forza è conservativa. Tutte le altre proprietà sono necessarie ma non sufficienti.

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ F_x&F_y&F_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ -3\alpha x^2&-3\alpha z^2&-6\alpha yz\end{vmatrix}=$$

$$\hat{i}\left(\frac{\partial(-6\alpha yz)}{\partial y}-\frac{\partial(-3\alpha z^2)}{\partial z}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial(-6\alpha yz)}{\partial x}-\frac{\partial(-3\alpha x^2)}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial(-3\alpha z^2)}{\partial x}-\frac{\partial(-3\alpha x^2)}{\partial y}\right)=\vec{0}$$

quindi F è conservativa. Perciò possiamo calcolarne l'energia potenziale:
Dato che F è conservativa il lavoro non dipende dal percorso di integrazione ma solo dal punto iniziale e da quello finale. Conviene quindi scegliere un percorso di integrazione comodo, che permetta l'integrazione di una sola variabile alla volta.

Prendo quindi un percorso che si muove dall'origine fino ad una x qualsiasi mantenendo le altre coordinate fisse a 0 (000)→(x00). Poi mantenendo fissa la x, mi muovo lungo le y fino ad una y qualsiasi (x00)→(xy0) e infine stessa cosa lungo le z (xy0)→(xyz). Una volta stabilito il percorso calcolo gli integrali:

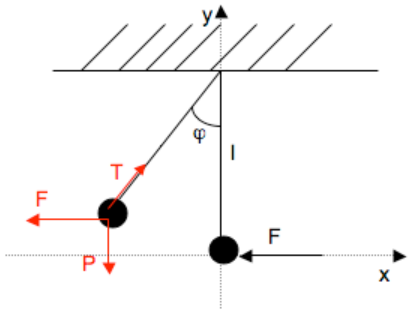
$$U = -\int_{000}^{xyz} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_{000}^{xyz} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -\int_{000}^{x00} F_x dx - \int_{x00}^{xy0} F_y dy - \int_{xy0}^{xyz} F_z dz$$

$$U = -\int_{000}^{x00} (-3\alpha x^2) dx - \int_{x00}^{xy0} (-3\alpha z^2) dy - \int_{xy0}^{xyz} (-6\alpha yz) dz = 3\alpha \left[\frac{x^3}{3}\right]_{000}^{x00} + 3\alpha z \left[y\right]_{x00}^{xy0} + 6\alpha y \left[\frac{z^2}{2}\right]_{xy0}^{xyz} = \alpha x^3 + 3\alpha yz^2$$

In un campo di forze conservative il lavoro si calcola come differenza di en potenziale fra A e B o come differenza di potenziale fra B ad A:

$$L_{AB} = U_A - U_B = V_B - V_A = \left[\alpha x^3 + 3\alpha yz^2\right]_{(1,2,-1)} - \left[\alpha x^3 + 3\alpha yz^2\right]_{(2,1,1)} =$$
$$= (\alpha * 1 + 3\alpha * 2 * 1) - (8\alpha + 3\alpha * 1) = 7\alpha - 11\alpha = -4\alpha Joule$$

EX 2



In figura sono disegnate in rosso tutte le forze in gioco sulla pallina appesa al filo una volta raggiunta la nuova posizione di equilibrio data dal vento.

a) non sapendo se la forza del vento è conservativa oppure no, per calcolare il lavoro compiuto dalla forza possiamo usare il teorema elle forze vive che vale per qualunque tipo di forza e che permette di calcolare il lavoro totale compiuto su un oggetto, dato quindi dalla somma dei lavori di tutte le forze in gioco.

$$L_{tot} = \Sigma_i L_i = L_{peso} + L_{tensione} + L_{vento} = T_f - T_i = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Siccome la massa parte e arriva ferma, le velocità iniziale e finale sono nulle: $L_{tot} = 0$.
La forza peso è una forza conservativa quindi il suo lavoro può essere calcolato come differenza di energia potenziale:
$L_{peso} = U_i - U_f = mg * 0 - mgh = 0 - mg(l - l\cos\varphi) = mgl(\cos\varphi - 1)$

Il lavoro della tensione si calcola dalla definizione di lavoro: $L_{tensione} = \int \vec{T} \cdot d\vec{s}$
Tensione e spostamento però sono punto per punto perpendicolari per cui il loro prodotto scalare è nullo e quindi è nullo anche il lavoro.
Di conseguenza il lavoro totale è dato solo dal lavoro della forza peso.
Unendo le due espressioni ottengo:

$$L_{tot} = L_{peso} + L_{tensione} + L_{vento} = mgl(\cos\varphi - 1) + 0 + L_{vento} = 0$$
$$\Rightarrow L_{vento} = -L_{peso} = -mgl(\cos\varphi - 1) = -0.5 * 9.8 * 1(\cos 60 - 1) = 2.45J$$

b) il sistema raggiunge l'equilibrio per cui posso scrivere l'equazione della statica per il corpo e proiettarla sui due assi di un sistema di riferimento 0xy per trovare T e F. Una volta calcolato F dall'espressione della forza del vento posso calcolare la velocità a cui soffia il vento:

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{P} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x) - F + Tsen\varphi = 0 \\ y) - P + T\cos\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Tsen\varphi = F \\ T\cos\varphi = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{P}{\cos\varphi} = \dfrac{mg}{\cos 60} = 9.8N \\ F = Tsen\varphi = 9.8sen60N \end{cases}$$

$$F = kv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F}{k}} = \sqrt{\frac{Tsen60}{k}} = \sqrt{\frac{9.8sen60}{\sqrt{3} * 10^{-2}}} = 22.1m/s$$

EX 3
Essendoci la forza d'attrito, l'energia meccanica non si conserva ma posso utilizzare il teorema delle forze vive che mi dà la possibilità di calcolare il lavoro totale svolto da tutte le forze in gioco sul sistema conoscendo l'energia cinetica finale e iniziale del corpo.

$$L_{tot} = T_f - T_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Ma il lavoro lo posso calcolare anche a partire dalla definizione:

$$L_{tot} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{D+l} \vec{F}_{attr} \cdot d\vec{s} + \int_D^{D+l} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s}$$

dove la forza di attrito agisce su tutto il tratto D+l compiuto dal corpo mentre la forza elastica agisce solo nel tratto l.
Per calcolare l'espressione della forza di attrito devo prima calcolare la reazione vincolare, che in mancanza di altre forze agenti in direzione è verticale è uguale e opposta alla forza peso, per cui: $\vec{F}_{attr} = -\mu mg\hat{i}$ dove il segno meno indica il verso della forza opposto a quello del moto.
Per la forza elastica invece si ha: $\vec{F}_{el} = -k\Delta x\hat{i}$ dove $\Delta x = l$.
Supponendo che tutto lo spazio percorso durante il moto sia s, dato dalla somma del tratto sul piano scabro D e dalla compressione della molla l, si ha: s=D+l quindi l=s-D e $\vec{F}_{el} = -k(s - D)\hat{i}$.
Sostituendo le forze nell'integrale si ottiene

$$L_{tot} = \int_0^{D+l} \vec{F}_{attr} \cdot d\vec{s} + \int_D^{D+l} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = -\int_0^{D+l} \mu mg\hat{i} \cdot d\vec{s} - \int_D^{D+l} k(s-D)\hat{i} \cdot d\vec{s} =$$

$$= -\int_0^{D+l} \mu mg\, ds - \int_D^{D+l} k(s-D)\, ds = -\mu mg\left[s\right]_0^{D+l} - k\left[\frac{s^2}{2}\right]_D^{D+l} + kD\left[s\right]_D^{D+l} =$$

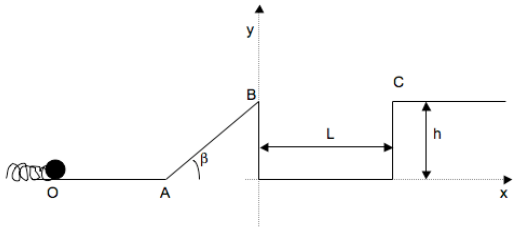
$$= -\mu mg(D+l) - k\left[\frac{(D-l)^2}{2} - \frac{D^2}{2}\right] + kD(D+l-D) =$$

$$= -\mu mg(D+l) - k\frac{D^2 + l^2 + 2Dl - D^2}{2} + kD^2 + kDl - kD^2 = -\mu mg(D+l) - \frac{kl^2}{2}$$

Unendo le due espressioni del lavoro trovo il coefficiente d'attrito cercato:

$$-\mu mg(D+l) - \frac{kl^2}{2} = -\frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow \mu = \frac{mv_0^2 - kl^2}{2mg(D+l)}$$

EX 4



a) per calcolare la compressione della molla consideriamo cosa succede fra i punti O ed A. Non ci sono forze dissipative quindi posso utilizzare la conservazione dell'energia meccanica:

$$E^O_{mecc} = E^A_{mecc} \Rightarrow E^O_{cin} + \Sigma_i E^O_{pot,i} = E^A_{cin} + \Sigma_i E^A_{pot,i} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 + \frac{1}{2}kD^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A$$

Per come abbiamo preso il sistema di riferimento $h_0=h_A=0$. La velocità iniziale dell'oggetto è nulla. Per trovare D manca quindi solo da sapere v_A che possiamo trovare dal teorema dell'impulso:

$$\vec{\Im} = \Delta\vec{q} \Rightarrow \Im_x = \Delta q_x \Rightarrow \Im = mv_A - mv_0 = mv_A - m*0 = mv_A \Rightarrow v_A = \frac{\Im}{m}$$

Quindi sostituendo le varie quantità nella conservazione dell'energia si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 + \frac{1}{2}kD^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A \Rightarrow \frac{1}{2}kD^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 \Rightarrow D = v_A\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\Im}{m}\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.14m$$

b) il corpo arriva in B con una certa velocità diversa da quella posseduta in A e formante un angolo β con l'orizzontale. La traiettoria del corpo da B in poi sarà quindi una parabola (come nel caso del moto di un proiettile sparato con una certa velocità iniziale non nulla).

Per trovare la velocità in B si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica fra A e B o fra O e B. Scelgo di usare quest'ultima:

$$E^0_{mecc} = E^B_{mecc} \Rightarrow E^0_{cin} + \Sigma_i E^0_{pot,i} = E^B_{cin} + \Sigma_i E^B_{pot,i} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 + \frac{1}{2}kD^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}kD^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh \Rightarrow v_B^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}kD^2 - mgh\right) \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}kD^2 - mgh\right)} = 12.12 m/s$$

Una volta trovata la velocità in B uso le equazioni del moto parabolico imponendo che il punto di arrivo sia C=(L,h), in un sistema di riferimento con l'origine nel punto in basso a sinistra della buca.

$$\vec{v}_B = v_B \cos\beta \hat{i} + v_B sen\beta \hat{j}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_B \cos\beta * t \\ y = h + v_B sen\beta * t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

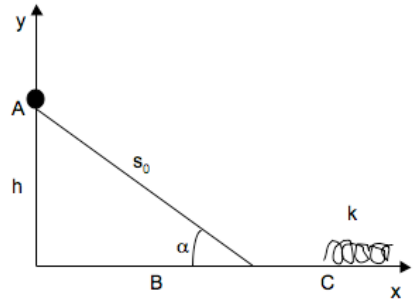
Sostituendo nelle equazioni del moto le coordinate di C si ha quindi:

$$\begin{cases} L = v_B \cos\beta * t \\ h = h + v_B sen\beta * t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{L}{v_B \cos\beta} \\ v_B sen\beta * \dfrac{L}{v_B \cos\beta} - \dfrac{1}{2}g * \left(\dfrac{L}{v_B \cos\beta}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{L}{v_B \cos\beta}\left(v_B sen\beta - \frac{1}{2}g * \left(\frac{L}{v_B \cos\beta}\right)\right) = 0 \Rightarrow v_B sen\beta - \frac{1}{2}g * \left(\frac{L}{v_B \cos\beta}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2{v_B}^2 sen\beta\cos\beta - gL}{2v_B \cos\beta} = 0$$

$$\Rightarrow sen2\beta = \frac{gL}{v_B^2} \Rightarrow 2\beta = arcsen\left(\frac{gL}{v_B^2}\right) \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}arcsen\left(\frac{gL}{v_B^2}\right) = 15°$$

EX 5



a) per verificare se F è conservativa ne calcolo il rotore:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \beta & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right) = \vec{0}$$

F è conservativa quindi ne calcolo l'energia potenziale integrando il lavoro infinitesimo lungo un percorso comodo: sposto dall'origine una coordinata alla volta mantenendo fisse le altre.

$$U = -\int_{000}^{xyz} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_{000}^{xyz} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -\int_{000}^{x00} F_x dx - \int_{x00}^{xy0} F_y dy - \int_{xy0}^{xyz} F_z dz =$$

$$= -\int_{000}^{x00} \beta dx - \int_{x00}^{xy0} 0 dy - \int_{xy0}^{xyz} 0 dz = -\beta \left[x \right]_{000}^{x00} = -\beta x$$

b) per trovare la velocità in B posso utilizzare la conservazione dell'energia meccanica tra in punto di partenza A e quello di arrivo B, perché ho dimostrato che tutte le forze in gioco sul corpo sono conservative. Avvertenza: per la prima volta in questo problema vedete quella che in analisi si chiama discontinuità di una funzione, in questo caso la velocità dell'oggetto. Proviamo a scrivere la conservazione dell'energia meccanica in A e nel punto di arrivo del piano inclinato B:

$$E^A_{mecc} = E^B_{mecc} \Rightarrow E^A_{cin} + \Sigma_i E^A_{pot,i} = E^B_{cin} + \Sigma_i E^B_{pot,i} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh_A - \beta x_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgh_B - \beta x_B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m * 0 + mgh - \beta * 0 = \frac{1}{2} m v_B^2 + mg * 0 - \beta x_B \Rightarrow mgs_0 sen\alpha = \frac{1}{2} m v_B^2 - \beta x_B$$

Il problema è la coordinata x del punto B. Se ci mettiamo un infinitesimo prima della fine del piano inclinato la forza F è ancora presente per cui dovremmo sostituire $x_B = s_0 \cos\alpha$ e la velocità diventa:

$$mgs_0 sen\alpha = \frac{1}{2} m v_B^2 - \beta s_0 \cos\alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2s_0 (mgsen\alpha + \beta \cos\alpha)}{m}}$$

Se ci mettiamo un infinitesimo dopo la fine del piano inclinato, la forza F ha smesso di agire, manca quindi quella parte di energia potenziale e la velocità in B diventa:

$$mgs_0 sen\alpha = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2 s_0 g sen\alpha}$$

c) la compressione della molla la ottengo con la conservazione dell'energia fra A e il punto di massima compressione. Scelgo come punto iniziale A per non incorrere nella problematica della discontinuità della velocità che ho incontrato prima. In questo caso la compressione della molla diventa:

$$E^A_{mecc} = E^C_{mecc} \Rightarrow E^A_{cin} + \Sigma_i E^A_{pot,i} = E^C_{cin} + \Sigma_i E^C_{pot,i} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh_A - \beta x_A = \frac{1}{2} m v_C^2 + mgh_C + \frac{1}{2} kD^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m * 0 + mgs_0 sen\alpha - \beta * 0 = \frac{1}{2} m * 0 + mg * 0 + \frac{1}{2} kD^2 \Rightarrow mgs_0 sen\alpha = \frac{1}{2} kD^2 \Rightarrow D = \sqrt{\frac{2mgs_0 sen\alpha}{k}}$$

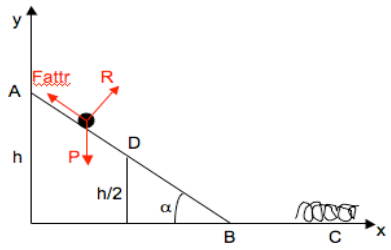
In alternativa avrei potuto scegliere un punto B' qualsiasi oltre la fine del piano inclinato dove scuramente non agisce più la forza F e la velocità dell'oggetto rimane costante per la conservazione dell'energia meccanica di valore pari al secondo trovato nel punto b. In questo caso D diventa:

$$E^{B'}_{mecc} = E^{C}_{mecc} \Rightarrow E^{B'}_{cin} + \Sigma_i E^{B'}_{pot,i} = E^{C}_{cin} + \Sigma_i E^{C}_{pot,i} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2_{B'} + mgh_{B'} = \frac{1}{2}mv^2_C + mgh_C + \frac{1}{2}kD^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2_{B'} + mg*0 = \frac{1}{2}m*0 + mg*0 + \frac{1}{2}kD^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2_{B'} = \frac{1}{2}kD^2 \Rightarrow D = \sqrt{\frac{mv^2_{B'}}{k}} = \sqrt{\frac{m2s_0gsen\alpha}{k}}$$

Che, come è giusto che sia, è lo stesso risultato trovato considerando A come punto iniziale. *NB: non scegliete mai il punto della discontinuità come punto in cui calcolare le vostre quantità perché c'è il rischio di incorrere in incoerenze.*

EX 6



a) l'attrito non è una forza conservativa quindi non posso utilizzare la conservazione dell'energia meccanica. Posso però usare il teorema delle forze vive che mi dà il lavoro totale compiuto da tutte le forze in gioco sul corpo, anche quelle dissipative, usando solo l'energia cinetica iniziale (punto A) e finale (punto B).

$$L_{tot} = T_f - T_i = \frac{1}{2}mv^2_B - \frac{1}{2}mv^2_A = \frac{1}{2}mv^2_B - 0 = \frac{1}{2}mv^2_B$$

Posso però trovare il lavoro totale come somma dei lavori delle diverse forze in gioco, ognuno di essi calcolato usando la definizione generale di lavoro:

$$L_{tot} = L_{peso} + L_{attr} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_i^f \vec{F}_{attr} \cdot d\vec{s} + \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

La forza peso è conservativa quindi per trovare il lavoro compiuto posso usare la differenza di energia potenziale U:

$$L_{peso} = U_i - U_f = mgh_A - mgh_B = mgh - mg*0 = mgh$$

Per trovare la forza di attrito devo calcolare la forza premente sul piano che altro non è che la reazione vincolare R. In un sistema di riferimento con l'asse x lungo la direzione del piano con le x positive rivolte verso destra e l'asse y perpendicolare al

piano, R uguaglia la componente perpendicolare al piano inclinato del peso dell'oggetto, così la forza di attrito risulta $F_{attr} = -\mu R = -\mu mg\cos\alpha$ col segno meno per indicare che agisce verso sinistra, opposta al moto del corpo.

Conoscendo l'altezza del piano inclinato e l'angolo di inclinazione trovo la lunghezza del piano che mi serve per calcolare il lavoro della forza di attrito:

$$sen\alpha = \frac{h}{L} \Rightarrow L = \frac{h}{sen\alpha}$$

$$L_{attr} = F_{attr} * L = -\mu mg\cos\alpha * \frac{h}{sen\alpha} = -\mu mgh\cot g\alpha$$

Unendo le due espressioni per il lavoro trovo la velocità cercata:

$$L_{tot} = \frac{1}{2}mv_B^2 = L_{peso} + L_{attr} = mgh - \mu mgh\cot g\alpha \Rightarrow v_B^2 = 2gh - 2\mu gh\cot g\alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh(1-\mu\cot g\alpha)}$$

b) la massima compressione della molla si ottiene imponendo la conservazione dell'energia meccanica, dato che il piano orizzontale è liscio per ipotesi, fra il punto di arrivo del piano inclinato B e il punto di massima compressione della molla C:

$$E_{mecc}^B = E_{mecc}^C \Rightarrow E_{cin}^B + \Sigma_i E_{pot,i}^B = E_{cin}^C + \Sigma_i E_{pot,i}^C \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C + \frac{1}{2}kD^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 + mg*0 = \frac{1}{2}m*0 + mg*0 + \frac{1}{2}kD^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}kD^2 \Rightarrow D = \sqrt{\frac{mv_B^2}{k}} = \sqrt{\frac{2mgh(1-\mu\cot g\alpha)}{k}}$$

c) come nel caso a), siccome sul piano inclinato è presente una forza dissipativa (l'attrito), per calcolare l'angolo di cui deve essere inclinato il piano perché il corpo raggiunga l'altezza h/2 devo utilizzare il teorema delle forze vive. Considero come punto di arrivo D e come punto di partenza A, in questo modo le velocità del corpo nei due punti sono entrambe nulle. Per cui:

$$L_{tot} = T_f - T_i = \frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = 0 - 0 = 0$$

Come nel caso precedente il lavoro totale è dato dalla somma del lavoro delle forze in gioco su m, cioè la forza peso e la forza di attrito. Essendo la forza peso conservativa posso calcolare il lavoro come differenza di energia potenziale.

$$L_{peso} = U_i - U_f = mgh_A - mgh_D = mgh - mg\frac{h}{2} = mg\frac{h}{2}$$

$$L_{tot} = L_{peso} + L_{attr} = 0 \Rightarrow L_{attr} = -L_{peso} = -mg\frac{h}{2}$$

Per calcolare il lavoro della forza di attrito uso la definizione generale di lavoro tenendo conto che c'è un lavoro svolto quando il corpo scende lungo il piano inclinato e un lavoro quando il corpo risale. Usando lo stesso sistema di riferimento descritto prima, nel lavoro della forza di attrito quando il corpo scende lungo il piano

la forza è negativa mentre lo spostamento è positivo, nel caso in cui il corpo risalga il piano la forza di attrito è positiva mentre lo spostamento è negativo. Si ottiene quindi:

$$L_{attr} = L_{attr}^{giù} + L_{attr}^{su} = \vec{F}_{attr}^{giù} \cdot d\vec{s}^{giù} + \vec{F}_{attr}^{su} \cdot d\vec{s}^{su} = -\mu mg\cos\alpha * \frac{h}{sen\alpha} + \mu mg\cos\alpha * \left(-\frac{h}{2sen\alpha}\right) = -\frac{3}{2}\mu mgh\cot g\alpha$$

Unisco le due espressioni trovate per la forza di attrito e trovo l'angolo cercato:

$$L_{attr} = L_{attr}^{giù} + L_{attr}^{su} = -L_{peso} \Rightarrow -\frac{3}{2}\mu mgh\cot g\alpha = -\frac{1}{2}mg \Rightarrow \cot g\alpha = \frac{1}{3\mu} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$$