Corso di Laurea in Ingegneria Ambientale, Chimica ed Informatica

FISICA GENERALE LA

(12 Gennaio 2009)

Prof. Roberto Spighi ed Antonio Zoccoli

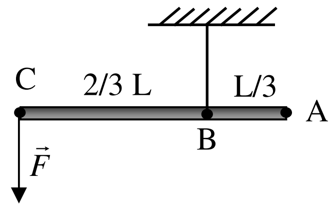
1) Sia data un'asta omogenea di massa *M* e lunghezza *L,* vincolata ad un estremo in un punto A e tenuta orizzontalmente da una fune collegata in un punto B ad una distanza L/3 dall'estremo A perpendicolarmente all'asta stessa. Si supponga che nell'altro estremo (C) sia applicata una forza $\vec{F}$ perpendicolare all'asta, diretta verso il basso e avente modulo pari a (1/3)Mg. Calcolare l'espressione di modulo, direzione e verso:

a) della reazione vincolare R nel punto A;

b) della tensione $\vec{T}$ della fune.

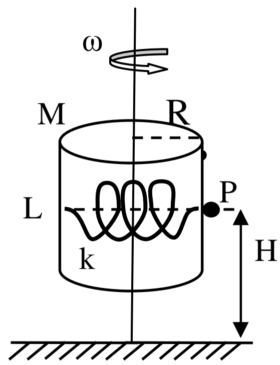
Se ad un certo istante la fune si spezza calcolare:

c) l'espressione dell'accelerazione angolare a cui è soggetta l'asta.



2) Stabilire se la forza $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha(2x-\beta y)\hat{\imath} - \alpha(2y-\beta x)\hat{\jmath} + \alpha\beta z\hat{k}$ è conservativa e calcolarne, eventualmente, la funzione energia potenziale. Determinare inoltre le dimensioni e le unità di misura delle costanti α e β.

3) Sia dato un cilindro cavo omogeneo di massa *M,* raggio *R* ed altezza *L*, contenente una molla compressa di costante elastica *k*, lunghezza a riposo *x* (*x* > *2R*) e massa trascurabile*,* in rotazione con velocità angolare ω attorno all'asse principale di inerzia passante per il centro di massa. Supponendo che il centro di massa del cilindro si trovi ad un'altezza H dal suolo, determinare l'energia totale del sistema. Determinare la stessa quantità nel caso in cui un punto materiale di massa m sia attaccato alla superficie del cilindro nel punto P. (si ricordi che il momento d'inerzia di un cilindro cavo rispetto ad un asse principale passante per il centro di massa è MR^2)



4) Un punto materiale di massa *m* si muove su di un piano orizzontale liscio secondo le seguenti equazioni orarie: $x(t) = \sqrt{3}Asen(\omega t + \frac{\pi}{2})$, $y(t) = Asen(\omega t + \frac{\pi}{2})$, dove A ed ω sono costanti positive. Determinare:

a) l'espressione della forza $\vec{F}$ agente sul punto materiale in funzione del tempo;

b) l'equazione della traiettoria;

b) il momento della forza rispetto al punto (0,A,0) al tempo t=0.

5) Tre punti materiali di massa m_1= 2M, m_2= 3M ed m_3= M si muovono su di un piano orizzontale liscio rispettivamente con velocità $\vec{v}_1 = V_0\hat{\jmath}, \quad \vec{v}_2 = 2V_0\hat{\imath} \quad e \quad \vec{v}_3 = -3V_0\hat{\imath} + V_0\hat{\jmath}$. Supponendo che i tre corpi si urtino in modo completamente anelastico, determinare:

a) la velocità del corpo dopo l'urto;

b) l'energia rilasciata nell'urto;

c) la velocità del centro di massa del sistema prima dell'urto.

6) Enunciare e discutere il principio di conservazione dell'energia meccanica.

Soluzioni

Esercizio 1

a,b) Si prenda una terna di assi cartesiani *xyz*, con l'origine in A, l'asse *x* diretta lungo l'asta verso destra, *y* diretta lungo la fune verso l'alto e di conseguenza *z* perpendicolare al piano *xy* (piano del foglio) e verso uscente. In questo sistema di riferimento, le forze sono tutte dirette lungo l'asse *y* e i momenti delle forze lungo l'asse *z*. Imponendo le condizioni di equilibrio statico si ottiene:

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i = 0 \\ \sum \vec{M}_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_A + \vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = 0 \\ 0 \times \vec{R}_A + \frac{1}{3}\vec{L} \times \vec{T} + \frac{1}{2}\vec{L} \times \vec{P} + \vec{L} \times \vec{F} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A - F - Mg + T = 0 \\ -\frac{1}{3}LT + \frac{1}{2}LMg + LF = 0 \end{cases}$$

Risolvendo
$$\begin{cases} R_A = F + Mg - T = 0 \Rightarrow R_A = -\frac{7}{6}Mg \\ \frac{1}{3}T = \frac{1}{2}Mg + F \Rightarrow T = \frac{5}{2}Mg \end{cases}$$

R_A è diretta lungo *y* verso il basso (stesso verso di g) mentre T è sempre lungo *y*, ma verso opposto.

c) Spezzata la fune, l'asta ruota attorno al punto A.

$\vec{M}_{(A)} = I_A \dot{\vec{\omega}}$; $\quad I = \frac{1}{3}ML^2$ ottenuta applicando il teorema di Huygens-Steiner.

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{\vec{M}_{(A)}}{I} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \left(+LF + \frac{L}{2}Mg \right)\frac{3}{ML^2} = \frac{5}{2}\frac{g}{L}$$

Esercizio 2

$$z \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = +\alpha\beta = \frac{\partial F_y}{\partial x};$$

$$y \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0; \qquad \text{il campo è conservativo.}$$

$$x \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0;$$

$$V = -U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\left(\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} F_x dx + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} F_y dy + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} F_z dz \right) = \alpha\left(x^2 + y^2 - \beta xy - \beta\frac{z^2}{2} \right)$$

$$[\alpha] = [MT^{-2}] \Rightarrow \frac{N}{m} \quad \text{e} \quad [\beta] = [1] \Rightarrow \text{costante adimensionale}$$

Esercizio 3

a) Il sistema è formato da 2 oggetti: la molla ed il cilindro

$$E_{molla} = T_{molla} + V_{molla} = 0 + \frac{1}{2}k(x-2R)^2 \qquad (T_{molla} = 0 \text{ poiché la molla ha massa trascurabile})$$

$$E_{cil} = T_{cil} + V_{cil} = \frac{1}{2}I\omega^2 + MgH = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + MgH$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}k(x-2R)^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + MgH$$

b) In questo caso bisogna aggiungere all'energia, il contributo derivante dalla massa *m* posta ad una altezza H. Il momento d'inerzia

$$E_{cil+massa} = T_{cil+massa} + V_{cil+massa} = \frac{1}{2}I_{cil+massa}\omega^2 + (M+m)gH = \frac{1}{2}(MR^2 + mR^2)\omega^2 + (M+m)gH$$

E_{molla} come nel caso precedente

$$E_{tot} = \frac{1}{2}k(x-2R)^2 + \frac{1}{2}(MR^2 + mR^2)\omega^2 + (M+m)gH$$

Esercizio 4

a) $\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{3}A\omega\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ \dot{y}(t) = A\omega\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$ $\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\sqrt{3}A\omega^2 sen(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ \ddot{y}(t) = A\omega^2 sen(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$ $\vec{F} = -mA\omega^2 sen(\omega t + \frac{\pi}{2})(\sqrt{3}\hat{i} + \hat{j})$

b) L'equazione della traiettoria y=y(x) si ottiene eliminando il tempo dalle equazioni del moto. Il modo più semplice in questo caso è notare che il rapporto tra *x* e *y* è costante :

$\frac{y}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ equazione di una retta passante per l'origine

c) Il polo rispetto cui calcolare il momento della forza è il punto $\vec{P} = (0\hat{i} + A\hat{j} + 0\hat{k}) = (0, A, 0)$. Al tempo $t = 0$, la forza risulta $\vec{F}(t=0) = \vec{F}_0 = -mA\omega^2(\sqrt{3}\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ e la posizione del punto materiale $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 = A(\sqrt{3}\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k})$. Il momento della forza è $\vec{M}(t=0) = \vec{M}_0 = (\vec{r}_0 - \vec{P}) \wedge \vec{F}_0$ dove $\vec{r}_0 - \vec{P} = A(\sqrt{3}\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k}) - (0\hat{i} + A\hat{j} + 0\hat{k}) = A(\sqrt{3}\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) = A\sqrt{3}\hat{i}$, dunque

$$\vec{M}_0 = (\vec{r}_0 - \vec{P}) \wedge \vec{F}_0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \sqrt{3}A & 0 & 0 \\ -mA\omega^2\sqrt{3} & -mA\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \vec{M}_0 = -mA^2\omega^2\sqrt{3}\hat{k}$$

Esercizio 5

a) Imponiamo la conservazione della quantità di moto $\vec{Q}_{ini} = \vec{Q}_{fin}$ dove $\vec{Q}_{ini} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = 2MV_0\hat{j} + 6MV_0\hat{i} - 3MV_0\hat{i} + MV_0\hat{j} = 3MV_0\hat{i} + 3MV_0\hat{j}$ e $\vec{Q}_{fin} = 6M\vec{V}_F = 6M(V_F\hat{i} + V_F\hat{j}) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{V}_F = \frac{1}{2}V_0(\hat{i} + \hat{j})$

b)

En iniz $E_{ini} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} 2MV_o^2 + \frac{1}{2} 12MV_o^2 + \frac{1}{2} 10MV_o^2 = 12MV_o^2$

En fin $E_{fin} = \frac{1}{2} 6M(\frac{V_o^2}{4} + \frac{V_o^2}{4}) = \frac{3}{2} MV_o^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta E = E_{fin} - E_{ini} = \frac{3}{2} MV_o^2 - 12MV_o^2 = -\frac{21}{2} MV_o^2$

c) $\vec{V}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{3MV_o \hat{i} + 3MV_o \hat{j}}{6M} = \frac{1}{2} V_o (\hat{i} + \hat{j})$