Corsi di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio, Chimica ed Informatica

FISICA GENERALE L-A

(17 Luglio 2008)

Proff. Roberto Spighi e Antonio Zoccoli

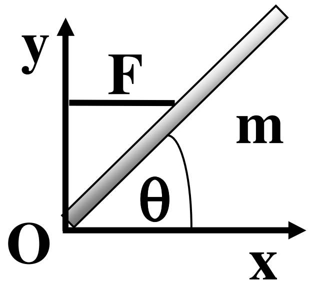
(A)

1) Un'asta omogenea di massa m=10 Kg e lunghezza L=2 m è incernierata nel punto O su di un piano orizzontale ed è libera di ruotare nel piano verticale. La sbarra è inizialmente fissata nel suo baricentro ad una fune F (inestensibile e di massa trascurabile) e forma nell'istante iniziale un angolo θ=30° con il piano orizzontale (vedi figura). Determinare:

a. La tensione della fune e le componenti orizzontale e verticale della reazione vincolare in O.

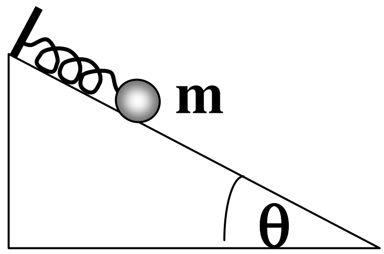
Supponendo che ad un certo istante la fune F venga tagliata, determinare:

b. il modulo dell'accelerazione angolare della sbarra nell'istante iniziale;
c. la velocità v_0 del baricentro della sbarra quando questa tocca il pavimento.



2) Una molla di costante elastica *k* e lunghezza a riposo *0* è appoggiata su di un piano inclinato di un angolo θ. Un estremo della molla è fissato ad una parete e l'altro è collegato ad un oggetto puntiforme di massa m (vedi figura). Determinare:

a) la posizione di equilibrio della massa *m* nell'ipotesi che il piano sia liscio;
b) il coefficiente minimo di attrito statico μ_S che deve avere il piano inclinato nell'ipotesi che il corpo stia fermo nella posizione di riposo della molla (x=0).



3) Stabilire se il campo di forze $\vec{F} = -(2\beta xy + \frac{\alpha}{4}yz)\vec{i} - (\beta x^2 + \frac{\alpha}{4}xz)\vec{j} - (\frac{\alpha}{4}xy + 3\alpha z^2)\vec{k}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, la funzione energia potenziale. Quali sono le dimensioni e le unità di misura delle costanti α e β?

4) Un punto materiale di massa m si muove su di un piano orizzontale liscio con le seguenti equazioni orarie: $x(t) = A\cos(\omega t)$ e $y(t) = B sen^2(\omega t)$ dove A, B ed ω sono costanti positive. Determinare:

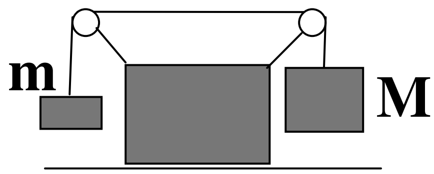
a) l'equazione della traiettoria;
b) l'espressione dei vettori velocità ed accelerazione all'istante t=π/(2ω);
c) il raggio di curvatura ρ della traiettoria allo stesso istante.

5) Un sistema è costituito da due oggetti puntiformi di massa *m* ed *M* (>*m*) collegati da una fune inestensibile di massa trascurabile che scorre senza attrito su due carrucole anch'esse di massa trascurabile (vedi figura). Determinare:

a) la tensione della fune;
b) l'accelerazione del sistema;

Nell'ipotesi che inizialmente la massa *M* sia ferma ad un'altezza *h* e che la massa *m* sia ferma ed appoggiata al suolo, determinare

c) la velocità con cui la massa *M* tocca il suolo.



6) Enunciare e discutere il teorema dell'impulso.

Soluzioni compito A

Esercizio 1

a) Le forze presenti sono: la forza peso $\vec{P}$ della sbarra, la Tensione $\vec{T}$ della fune e la reazione $\vec{R}$ del vincolo in O. Il sistema inizialmente è fermo e per determinare la reazione vincolare in si impone $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i = 0$ sia lungo x che y. Rispetto al sistema di riferimento della figura, il momento della forza della reazione vincolare è 0, dunque:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = 0 \rightarrow \begin{cases} -T + R_x = 0 \\ -mg + R_y = 0 \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} R_x = T \\ R_y = mg = 98N \end{cases} \quad \text{per determinare T}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i = 0 \rightarrow \frac{L}{2}T\sin\theta = \frac{L}{2}P\cos\theta \text{ da cui } T = Pctg\theta = mgctg\theta = 98\sqrt{3}N$$

b) 2° eq. Card. Mecc. $\vec{M} = I_o\vec{\alpha}$ dove $I_o = M\frac{L^2}{3}$ (momento d'inerzia rispetto al punto O) e

$$\vec{M} = -mg\frac{L}{2}\cos\theta\cdot\hat{k} \rightarrow |\vec{\alpha}| = 3\frac{g}{2L}\cos\theta = 3\frac{g}{2L}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}g}{4L}$$

c) conservazione dell'energia: $E_{fin} = E_{ini}$ $\rightarrow$ usando il sistema di riferimento in figura si ottiene:

$$\frac{1}{2}I_o\omega^2 = mg\frac{L}{2}\sin\theta \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3gsen\theta}{L}} \rightarrow v_o = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{3gsen\theta}{L}} = \sqrt{\frac{3gLsen\theta}{4}} = \sqrt{\frac{3gL}{8}}(m/s)$$

dove I è calcolato rispetto al punto O. Scegliendo invece un sistema di riferimento con l'origine sul baricentro della sbarra ed assi paralleli a quelli in figura si ottiene: : $E_{fin} = E_{ini}$ $\rightarrow$

$$\frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}mv_o{}^2 - mg\frac{L}{2}\sin\theta = 0 \text{ dove } I_c = M\frac{L^2}{12}$$ (momento d'inerzia rispetto al baricentro C) ottenendo lo stesso risultato di prima.

Esercizio 2

Scegliamo un sistema di riferimento con l'asse x lungo il piano inclinato, asse y perpendicolare ad esso e l'origine sulla massa m nell'istante iniziale. Sulla massa m agiscono la forza peso, la forza della molla e, per la sola risposta b, la forza di attrito.

a) $$\begin{cases} F_x = -kx + mg\sin\vartheta = m\ddot{x} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{mg\sin\vartheta}{k} \\ F_y = -mg\cos\vartheta + R = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} F_x = mg\sin\vartheta - \mu_S mg\cos\vartheta = m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \mu_S = tg\vartheta \\ F_y = -mg\cos\vartheta + R = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine e il punto generico C(*x,y,z*) si ottiene l'energia potenziale $V=\beta x^2 y+\frac{\alpha}{4}xyz+\alpha z^3$. Le costanti α e β hanno le stesse dimensioni [M $L^{-1}T^{-2}$] e unità di misura N/m^2 (o $Kg/m\,s^2$).

Esercizio 4

a) L'equazione della traiettoria y=y(x) si ottiene eliminando il tempo dalle equazioni del moto. Il modo più semplice in questo caso è notare che $\frac{1}{A^2}x^2+\frac{1}{B}y=1 \rightarrow y=B-\frac{B}{A^2}x^2$ che è una parabola con la concavità rivolta verso il basso.

b) $\begin{cases}\dot{x}(t)=-A\omega sen(\omega t)\rightarrow \dot{x}(\pi/2\omega)=-A\omega \\ \dot{y}(t)=2B\omega sen(\omega t)\cos(\omega t)\rightarrow \dot{y}(\pi/2\omega)=0\end{cases}$

$\begin{cases}\ddot{x}(t)=-A\omega^2\cos(\omega t)\rightarrow \ddot{x}(\pi/2\omega)=0 \\ \ddot{y}(t)=2B\omega^2\left(\cos^2(\omega t)-sen^2(\omega t)\right)\rightarrow \ddot{y}(\pi/2\omega)=-2B\omega^2\end{cases}$

c) $v^2={v_x}^2+{v_y}^2=\dot{x}^2(\pi/2\omega)+\dot{y}^2(\pi/2\omega)=A^2\omega^2$ l'accelerazione è tutta centripeta $|\vec{a}|=2B\omega$ dunque $\rho=v^2/|\vec{a}|=\frac{A^2}{2B}$

Esercizio 5

Sui corpi m ed M agiscono la forza peso e la tensione del filo T dirette entrambe lungo la verticale. Utilizziamo un sistema di riferimento unidimensionale prendendo come asse la direzione del moto diretta verso il basso per la massa M (e dunque diretta verso l'alto per la massa m) . Scriviamo per entrambi gli oggetti puntiformi la $\vec{F}=m\vec{a}$:

a) b) $\begin{cases}Mg-T=Ma \\ -mg+T=ma\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}T=\frac{2Mm}{M+m}g \\ a=\frac{M-m}{M+m}g\end{cases}$

c) Conservazione dell'energia $E_i=E_f \Rightarrow Mgh=mgh+\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v=\sqrt{\frac{2(M-m)gh}{M+m}}$