Corsi di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio, Chimica ed Informatica

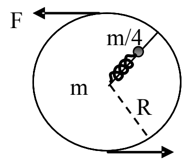
FISICA GENERALE L-A

(19 Marzo 2008)

Proff. Roberto Spighi e Antonio Zoccoli

(A)

1) Un corpo puntiforme di massa *m/4* è appoggiato, con attrito trascurabile, sulla guida radiale ideale di un disco sottile, omogeneo e rigido, di raggio *R* e massa *m*. Il corpo è attaccato al centro del disco tramite una molla ideale, di lunghezza a riposo *R/2*, costante elastica *K* e massa trascurabile. Il sistema è inizialmente in quiete sul piano orizzontale. Ad un certo istante una coppia di forze, di modulo costante pari a *F*, è applicata al sistema come mostrato in figura, per il tempo sufficiente a fargli raggiungere la velocità angolare $|\vec{\omega}_f| = \sqrt{K/m}$. Calcolare le espressioni delle seguenti quantità:

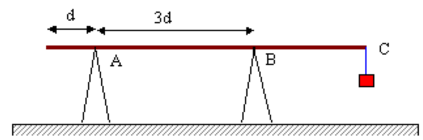


a) il momento d'inerzia iniziale I_o del sistema, rispetto a un asse verticale passante per il centro del disco;

b) l'accelerazione angolare $\dot{\vec{\omega}}$ del sistema nell'istante in cui si applica la coppia;

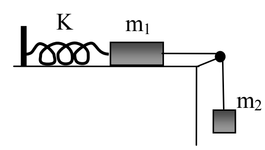
c) l'allungamento finale Δl della molla, quando il sistema ruota e il corpo è nuovamente in quiete rispetto al disco.

2) In condizioni di equilibrio statico un'asta omogenea di massa *3m* e lunghezza *6d* poggia su due supporti lisci in A e B. All'estremità C dell'asta è appeso un corpo di massa m. Determinare in quale punto dell'asta bisogna appoggiare un corpo puntiforme di massa *2m* affinché le reazioni vincolari in A e B siano uguali in modulo.



3) Stabilire se il campo di forze $\vec{F} = \alpha(z^2 - y^2)\cdot\vec{i} - (2\alpha xy + \beta)\cdot\vec{j} + 2\alpha xz\cdot\vec{k}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, la funzione energia potenziale. Determinare inoltre le dimensioni fisiche e le unità di misura delle costanti α e β.

4) Un sistema è costituito da due masse m_1=M ed m_2=2M collegate tra loro da un filo inestensibile di massa trascurabile. Il sistema è inizialmente fermo ed attaccato ad una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo nulla (vedi figura). Determinare:



a) l'allungamento della molla in assenza di attriti;
b) il periodo di oscillazione del sistema se viene spostato dalla posizione di equilibrio;
c) l'accelerazione della massa m_2 nel caso in cui la molla venga tagliata istantaneamente, supponendo che il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo 1 ed il piano sia pari a μ_D=0.5.

5) Enunciare la legge di conservazione dell'energia meccanica ed illustrarne l'applicazione ad un esempio semplice.

6) Un punto materiale di massa *m* si muove su di un piano orizzontale liscio secondo le seguenti equazioni orarie: $x(t) = At$, $y(t) = B\,(t + e^{-t})$. Determinare:

a) l'espressione della forza $\vec{F}$ agente sul punto materiale in funzione del tempo;
b) il momento della forza rispetto all'origine del sistema al tempo t=0;
c) il raggio di curvatura ρ al tempo t=0.

Soluzioni compito A:

Esercizio 1:

1) $I = I_{disco} + I_{corpo} = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}mR^2$

2) Dalla seconda equazione cardinale della dinamica: $I\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}$ dove $\vec{M} = 2r \wedge F = 2RF\hat{k}$ si ottiene:

$\dot{\vec{\omega}} = \frac{\vec{M}}{I} = \frac{32F}{9mR}\hat{k}$. Il vettore è perpendicolare al disco e direzione uscente dal foglio.

3) Quando il disco ruota la molla fornisce la forza centripeta che determina il moto circolare del corpo. Uguagliando la forza elastica all'espressione della forza centripeta otteniamo: $K\Delta l = \frac{m}{4}\omega_f^2(\frac{R}{2} + \Delta l) \Rightarrow K\Delta l = \frac{K}{4}(\frac{R}{2} + \Delta l) \Rightarrow \Delta l = \frac{R}{6}$

Esercizio 2:

Impongo le condizioni di equilibrio statico ($\sum \vec{F}_i = 0$ e $\sum \vec{M}_i = 0$) e scelgo come polo il punto A

$Ra + Rb - 2mg - 3mg - mg = 0$ → $R = 3mg$

$R(3d) - 2mgx - 3mg(2d) - mg(5d) = 0$ → $x = -d$

cioè la massa va posta all'altro estremo dell'asta rispetto al punto C

Esercizio 3 Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine e il punto generico C(*x,y,z*) si ottiene il potenziale *U*. La funzione energia potenziale vale $V = -U = -\alpha x(z^2 - y^2) + \beta y$. La costante α ha dimensioni $[ML^{-1}T^{-2}]$e unità di misura N/m^2, mentre β ha dimensioni $[MLT^{-2}]$ e si misura in *N*.

Esercizio 4 Inizialmente il sistema è fermo. Sul corpo m_1 agiscono 4 forze: 2 lungo la direzione perpendicolare al moto che sono il peso (m_1g) e la reazione vincolare (R_1) e 2 lungo la direzione del moto che sono la forza della molla (Kx) e la tensione del filo (T). Sul corpo m_2 agiscono 2 forze entrambe lungo la direzione del moto: il peso (m_2g) e la tensione del filo.

a) tutto è fermo:
   corpo m_1 → $R_1 - m_1 g = 0$ e $T - kx = 0$
   corpo m_2 → $m_2 g - T = 0$
   Risolvendo il sistema si ottiene $x = m_2 g / k = 2Mg / k$

b) $T = 2\pi / \omega$ con $\omega = \sqrt{k / M_{tot}} = \sqrt{k / m_1 + m_2} = \sqrt{k / 3M}$ → $T = 2\pi\sqrt{3M / k}$

c) Adesso il sistema è in movimento. Sul corpo m_1 agiscono 4 forze: 2 lungo la direzione perpendicolare al moto che sono il peso (m_1g) e la reazione vincolare (R_1) e 2 lungo la direzione del moto che sono la forza di attrito (F_a) e la tensione del filo (T). Le forze su m_2 sono come prima.
   corpo m_1 → $R_1 - m_1 g = 0$ e $T - F_a = m_1 a$ con $F_a = \mu_d m_1 g$
   corpo m_2 → $m_2 g - T = m_2 a$

Risolvendo il sistema si ottiene $a = g / 2$

Esercizio 6

a) $\ddot{x}(t) = 0$ e $\ddot{y}(t) = Be^{-t}$ dunque $\vec{F} = m\vec{a} = mBe^{-t}\hat{j}$

b) $x(0) = 0$, $y(0) = B$ e $\ddot{x}(0) = 0$ e $\ddot{y}(0) = B$ dunque $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0$.

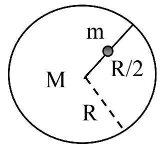
c) $|\vec{a}| = v^2 / r$ → $r = v^2 / |\vec{a}| = A^2 / B$

Corsi di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio, Chimica ed Informatica

FISICA GENERALE L-A
(19 Marzo 2008)
Proff. Roberto Spighi e Antonio Zoccoli

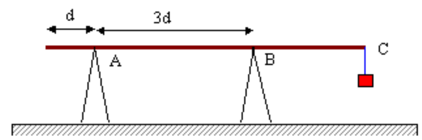
(B)

1) Un disco sottile, omogeneo e rigido, di raggio R e massa M, è vincolato a ruotare su un piano orizzontale liscio attorno all'asse verticale passante per il suo centro, con velocità angolare costante ω_0. Un punto materiale di massa m=M è fissato a distanza R/2 dal centro del disco stesso. Ad un certo istante si applica al sistema una coppia frenante, per il tempo sufficiente a fermarlo. Trascurando ogni attrito, calcolare le espressioni delle seguenti quantità:



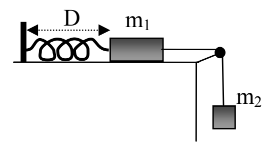
1. Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione.
2. La reazione vincolare agente sulla massa m prima dell'applicazione della coppia frenante.
3. Il lavoro compiuto dalla coppia frenante

2) In condizioni di equilibrio statico un'asta omogenea di massa 3m e lunghezza 6d poggia su due supporti lisci in A e B (come mostrato in figura). All'estremità C dell'asta è appeso un corpo di massa m. Determinare le espressioni delle reazioni vincolari in A e B.



3) Stabilire se il campo di forze $\vec{F} = 2\alpha xy \cdot \vec{i} + \alpha x^2 \cdot \vec{j} + \beta \cdot \vec{k}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, la funzione energia potenziale. Determinare inoltre le dimensioni e le unità di misura delle costanti α e β.

4) Un sistema è costituito da due masse m_1=2M ed m_2=3M collegate tra loro da un filo in estensibile di massa trascurabile. Il sistema è inizialmente fermo ed attaccato ad una molla di lunghezza a riposo nulla, inizialmente allungata di un tratto D (vedi figura). Determinare:



a) la costante elastica K della molla;
b) il periodo di oscillazione del sistema se viene spostato dalla posizione di equilibrio;
c) la tensione del filo nel caso in cui la molla venga tagliata istantaneamente, supponendo che il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo 1 ed il piano sia pari a μ_D=0.4.

5) Enunciare la legge di conservazione del momento della quantità di moto ed illustrarla con un esempio semplice

6) Un punto materiale di massa m si muove su di un piano orizzontale liscio secondo le seguenti equazioni orarie: $x(t) = A\ (t + e^{-t})$, $y(t) = 2Bt$. Determinare:

a) l'espressione della forza $\vec{F}$ agente sul punto materiale in funzione del tempo;
b) il momento della forza rispetto all'origine del sistema al tempo t=0;
c) il raggio di curvatura ρ al tempo t=0.

Soluzioni compito B

Esercizio 1:

1) $I = I_{disco} + I_{corpo} = \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}MR^2$

2) . La reazione vincolare deve equilibrare sia la forza peso che la forza centrifuga.

$\vec{R} = mg \cdot \vec{b} - m\omega_0^2 \frac{1}{2}R \cdot \vec{n}$

3) Il lavoro è uguale alla variazione di energia cinetica del sistema, cioè all'energia cinetica iniziale: $L = -\frac{1}{2}I\omega_0^2 = -\frac{3}{8}MR^2\omega_0^2$

Esercizio 2

Impongo le condizioni di equilibrio statico ($\sum \vec{F}_i = 0$ e $\sum \vec{M}_i = 0$) e scelgo come polo il punto A

$Ra + Rb - 3mg - mg = 0$

$R_B(3d) - 3mg(2d) - mg(5d) = 0$ → risolvendo il sistema $R_A = mg/3$ e $R_B = 11mg/3$

Esercizio 3

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine e il punto generico C(x,y,z) si ottiene il potenziale U. La funzione energia potenziale vale $V = -U = -\alpha x^2 y - \beta z$. La costante α ha dimensioni $[ML^{-1}T^{-2}]$ e unità di misura N/m^2, mentre β ha dimensioni $[MLT^{-2}]$ e si misura in N.

Esercizio 4 Inizialmente il sistema è fermo. Sul corpo m_1 agiscono 4 forze: 2 lungo la direzione perpendicolare al moto che sono il peso (m_1g) e la reazione vincolare (R_1) e 2 lungo la direzione del moto che sono la forza della molla (KD) e la tensione del filo (T). Sul corpo m_2 agiscono 2 forze entrambe lungo la direzione del moto: il peso (m_2g) e la tensione del filo.

a)tutto è fermo:

corpo m_1 → $R_1 - m_1 g = 0$ e $T - kD = 0$

corpo m_2 → $m_2 g - T = 0$

Risolvendo il sistema si ottiene $k = T/D = m_2 g/D = 3Mg/D$

b) $T = 2\pi/\omega$; $\omega = \sqrt{k/M_{tot}} = \sqrt{k/m_1 + m_2} = \sqrt{k/5M}$ e $T = 2\pi\sqrt{5M/k} = 2\pi\sqrt{5D/(3g)}$

c) Adesso il sistema è in movimento. Sul corpo m_1 agiscono 4 forze: 2 lungo la direzione perpendicolare al moto che sono il peso (m_1g) e la reazione vincolare (R_1) e 2 lungo la direzione del moto che sono la forza di attrito (F_a) e la tensione del filo (T). Le forze su m_2 sono come prima.

corpo m_1 → $R_1 - m_1 g = 0$ e $T - F_a = m_1 a$ con $F_a = \mu_d m_1 g$

corpo m_2 → $m_2 g - T = m_2 a$

Risolvendo il sistema si ottiene $T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g(1 + \mu_d) = \frac{6Mg1.4}{5}$

Esercizio 6

a) $\ddot{x}(t) = Ae^{-t}$ e $\ddot{y}(t) = 0$ dunque $\vec{F} = m\vec{a} = mAe^{-t}\hat{i}$

b) $x(0) = A$, $y(0) = 0$ e $\ddot{x}(0) = A$ e $\ddot{y}(0) = 0$ dunque $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0$.

c) $|\vec{a}| = v^2/r$ → $r = v^2/|\vec{a}| = 4B^2/A$