Corsi di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio, Chimica ed Informatica

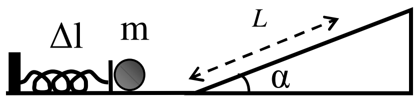
FISICA GENERALE L-A

(9 Aprile 2008)

Proff. Roberto Spighi e Antonio Zoccoli

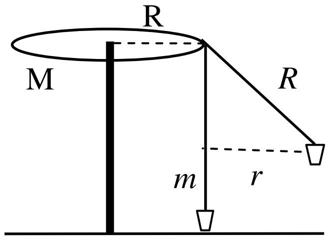
(A)

1) Un punto materiale di massa m è appoggiato ad una molla ideale di costante elastica K ignota, tenuta compressa di un tratto Δl da un filo inestensibile. Ad un certo istante il filo viene tagliato ed il punto materiale comincia a muoversi su di un piano orizzontale liscio finché non incontra un piano inclinato di un angolo α=30°, anch'esso liscio. Supponendo che il punto materiale si fermi dopo aver percorso un tratto L sul piano inclinato calcolare le espressioni delle seguenti quantità:



a. la costante elastica K della molla;
b. la velocità v_0 del punto materiale prima di incontrare il piano inclinato;
c. il tempo necessario per fermarsi dall'istante in cui incontra il piano inclinato.

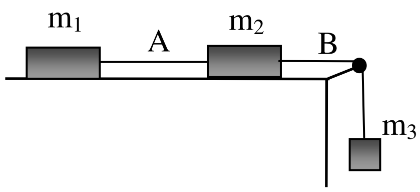
2) Sia data una giostra (vedi figura) schematizzabile da un palo di massa trascurabile, sormontato da un disco sottile omogeneo di massa M e raggio R, liberi di ruotare attorno al proprio asse. Al disco è attaccato un filo di massa trascurabile e lunghezza R al cui estremo è appeso un seggiolino di massa m. Calcolare:



a. il momento d'inerzia del sistema (disco e seggiolino) quando la giostra è ferma;
b. la velocità angolare ω che deve possedere la giostra affinché il seggiolino si muova di moto circolare ed uniforme ad una distanza $r = R/2$ dal disco (vedi figura);
c. l'energia cinetica del sistema (disco e seggiolino) in tali condizioni.

3) Stabilire se il campo di forze $\vec{F} = -(2\alpha x + \beta y^2)\vec{i} - \beta(2xy + z^2)\vec{j} - 2\beta yz \cdot \vec{k}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, la funzione energia potenziale. Quali sono le dimensioni e le unità di misura delle costanti α e β?

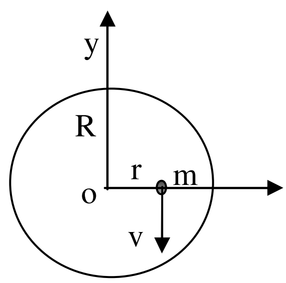
4) Tre masse m_1, m_2 e m_3 rispettivamente di 10, 20 e 30 Kg, composte dallo stesso materiale, sono collegate tra loro da due fili inestensibili A e B, di massa trascurabile (vedi figura). Supponendo che non vi sia alcun attrito tra il piano e le masse m_1 e m_2, calcolare:



a. l'accelerazione del sistema;
b. la tensione delle due corde.
c. Supponendo che ci sia attrito tra il piano e le masse m_1 e m_2 determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_S affinché il sistema non si muova.

5) Una piattaforma di raggio R ruota in senso antiorario, con velocità angolare costante ω_0, su di un piano orizzontale attorno all'asse verticale passante per il suo centro O. Un punto materiale di massa m si trova a distanza $\vec{r} = (R/2)\hat{i}$ dal centro del disco stesso (vedi figura). Determinare, rispetto ad un sistema di riferimento solidale con il disco, l'espressione della forza totale agente sul punto materiale nei casi in cui:

a. il punto materiale sia fermo rispetto alla piattaforma;
b. il punto materiale abbia una velocità $\vec{v} = -\omega_o \frac{R}{4}\hat{j}$ rispetto alla piattaforma.



6) Enunciare e discutere il terzo principio della dinamica.

Soluzioni compito A

Esercizio 1

a) Utilizzando la conservazione dell'energia (iniziale - finale):

$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 = mgh = mgLsen\alpha = mgL/2 \Rightarrow \quad k = \frac{mgL}{\Delta l^2}$$

b) Utilizzando la conservazione dell'energia (iniziale – fine tratto orizzontale):

$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v^2{}_0 = \frac{k\Delta l^2}{m} \Rightarrow v_0 = \sqrt{gl}$$ (sostituito k con il valore trovato al punto a).

3) la forza che agisce sul punto materiale è la sola forza peso $m\vec{g}$ diretta verticalmente verso il basso $\Rightarrow$ la componente dell'accelerazione nella direzione del moto (piano inclinato) è $gsen\alpha$ ed è COSTANTE. Prendendo un sistema di riferimento con l'asse x parallelo al piano inclinato, asse y perpendicolare a questo ed origine O alla base del piano, il tempo impiegato a raggiungere la quota massima ($\vec{v}=0$):

$$v(t) = v_0 - g\sin\alpha t = v_0 - \frac{1}{2}gt = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0}{g} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$$

oppure

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}g\sin\alpha t^2 = L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow gt^2 - 4v_0 t + 4L = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0 \pm \sqrt{4v_0^2 - 4gL}}{g} = \frac{2v_0 \pm \sqrt{4v_0^2 - 4v_0^2}}{g} = \frac{2v_0}{g} = 2\sqrt{L/g}$$

Esercizio 2

a) $I_{TOT} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 = \frac{R^2}{2}(M+2m)$

b) Le forze agenti sul seggiolino rispetto ad un sistema di riferimento che ruota con la giostra (non inerziale) sono la forza di gravità, la tensione del filo e la forza centrifuga, la cui somma vettoriale deve essere nulla.

$$\begin{cases} -T\cos\vartheta + m\omega^2(R+r) = 0 \\ Tsen\vartheta - mg = 0 \end{cases}$$ dove $r = R/2$ e $\vartheta = 60^o$ Risolvendo $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3R\sqrt{3}}}$

c) $E_{CIN} = \frac{1}{2}I_{FIN}\omega^2$ dove $I_{FIN} = \frac{M}{2}R^2 + m(R+\frac{R}{2})^2 = \frac{R^2}{2}(M+\frac{9}{2}m)$ diversa da quella iniziale

$$\Rightarrow E_{CIN} = \frac{1}{2}\frac{R^2}{2}(M+\frac{9}{2}m)\frac{2g}{3R\sqrt{3}} = \frac{Rg}{6\sqrt{3}}(M+\frac{9}{2}m)$$

Oppure

$$E_{CIN} = \frac{1}{2}I_{DISCO}\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(R+\frac{R}{2})^2$$ che risolta dà lo stesso risultato

Esercizio 3

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine e il punto generico C(*x,y,z*) si ottiene l'energia potenziale $V = \alpha x^2 + \beta(xy^2 + yz^2)$. La costante α ha dimensioni $[MT^{-2}]$e unità di misura *N/m* oppure Kg/s^2, mentre β ha dimensioni $[ML^{-1}T^{-2}]$ e si misura in N/m^2.

Esercizio 4

a,b) Sul corpo m_1 agiscono 3 forze: 2 lungo la direzione perpendicolare al moto che sono il peso (m_1g) e la reazione vincolare (R_1) ed una lungo la direzione del moto che è la tensione del filo T_A. Sul corpo m_2 agiscono 4 forze: 2 lungo la direzione perpendicolare al moto che sono il peso (m_2g) e la reazione vincolare (R_2) e due lungo la direzione del moto che sono la tensione del filo T_A (opposta al moto) e la tensione del filo T_B (verso del moto) . Sul corpo m_3 agiscono solo 2 forze lungo la direzione del moto che sono la tensione del filo T_B (opposta al moto) e la forza peso m_3g (verso del moto) . Tutto il sistema si muove con un'accelerazione $\vec{a}$.

Corpo m_1 → $\begin{cases} T_A = m_1 a \\ R_1 - m_1 g = 0 \end{cases}$ Corpo m_2 → $\begin{cases} T_B - T_A = m_2 a \\ R_2 - m_2 g = 0 \end{cases}$ Corpo m_3 → $\begin{cases} m_3 g - T_B = m_3 a \\ \end{cases}$

Risolvendo il sistema (servono solo le equazioni nella direzione del moto), si ottiene $a = \dfrac{m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} = \dfrac{g}{2}$ $\quad T_A = \dfrac{m_1 m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} = 5g$ $\quad T_B = \dfrac{(m_1 + m_2) m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} = 15g$

c) Rispetto alla situazione precedente, su ciascun corpo m_1 ed m_2 agisce in più la forza di attrito lungo la direzione del moto (verso opposto) data rispettivamente da $F_{1A} = \mu_S m_1 g$ e $F_{2A} = \mu_S m_2 g$ ed inoltre il sistema è fermo.

Corpo m_1 → $\begin{cases} T_A - F_{1A} = 0 \\ R_1 - m_1 g = 0 \end{cases}$ Corpo m_2 → $\begin{cases} T_B - T_A - F_{2A} = 0 \\ R_2 - m_2 g = 0 \end{cases}$ Corpo m_3 → $\begin{cases} m_3 g - T_B = 0 \\ \end{cases}$

Risolvendo (servono solo le equazioni nella direzione del moto) si ottiene $\mu_S = \dfrac{m_3}{m_1 + m_2} = 1$

Esercizio 5

a) Nel sistema di riferimento solidale con il disco, il punto materile è fermo dunque su di lui la risultante delle forze è zero $\vec{F}' = \vec{F}_{reali} + \vec{F}_{fittizie} = 0$.

b) Sul punto materiale agiscono 4 forze, di cui 2 sono reali e 2 fittizie. Le due forze reali sono il peso del punto materiale e la reazione del vincolo che però hanno risultante 0, mentre le forze fittizie sono la forza centrifuga e la forza di Coriolis. Tutte le altre forze fittizie sono nulle:

$$\vec{F}_{centrifuga} = -m\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times r') = m\omega_0^{\,2} \frac{R}{2} \hat{i}$$

$$\vec{F}_{coriolis} = -2m\vec{\omega}_0 \times \vec{v}' = -2m\vec{\omega}_0 \times (-\omega_0 \frac{R}{4} \hat{j}) = -m\omega_0^{\,2} \frac{R}{2} \hat{i} = 0 \quad \text{dunque}$$

$$\vec{F}' = \vec{F}_{centrifuga} + \vec{F}_{coriolis} = m\omega_0^{\,2} \frac{R}{2} \hat{i} - m\omega_0^{\,2} \frac{R}{2} \hat{i} = 0$$

La forza è zero solo nell'istante iniziale quando il corpo è nella posizione $\vec{r} = (R/2)\hat{i}$, dopo la sua posizione varia ($\vec{r}$ aumenta) e la risultante delle forze non sarà più nulla.