Corsi di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio, Chimica ed Informatica

FISICA GENERALE L-A

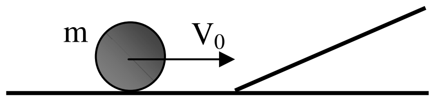
(9 Settembre 2008)

Proff. Roberto Spighi e Antonio Zoccoli

(A)

1) Una sfera omogenea di massa M=1 kg e raggio R=10 cm rotola senza strisciare su un piano orizzontale con una velocità iniziale del suo centro di massa v_o=1 m/s. Sapendo che la sfera incontra sul suo percorso un piano inclinato, determinare:

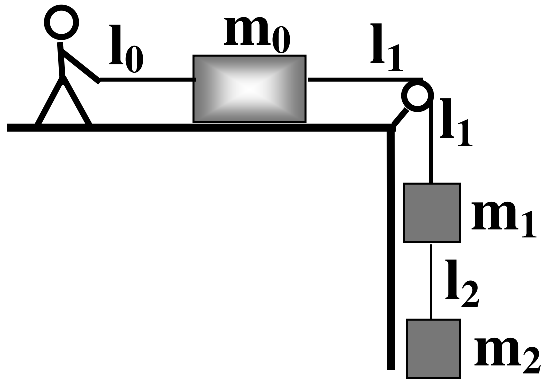
a) L'energia cinetica iniziale;
b) l'altezza massima rispetto all'orizzontale che il centro di massa può raggiungere sul piano inclinato;
c) La velocità di rotazione della sfera quando il suo centro si è alzato rispetto al piano orizzontale di metà dell'altezza massima raggiungibile.



(Si ricorda che il momento d'inerzia di una sfera rispetto al centro di massa è $I_o = \frac{2}{5}mR^2$)

2) Stabilire se il campo di forze $\vec{F} = -\alpha xy^2z^2\hat{i} - \alpha x^2yz^2\hat{j} - \alpha x^2y^2z\hat{k}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, la funzione energia potenziale; determinare inoltre le unità di misura della costante α.

3) Un sistema è costituito da tre masse m_0=m_1=m_2=M collegate tra loro da due fili inestensibili l_1 ed l_2 di massa trascurabile attraverso una carrucola ideale anch'essa di massa trascurabile (vedi figura). Il sistema è inizialmente fermo in quanto tenuto da un ragazzo attraverso il filo inestensibile l_0. Determinare:
a) le tensioni dei fili l_0, l_1 e l_2.
Ad un certo punto il ragazzo lascia il filo l_0, determinare:
b) l'accelerazione del sistema;
c) le tensioni dei fili l_0, l_1 e l_2.



4) Un punto materiale di massa *m* si muove su di un piano orizzontale liscio secondo le seguenti equazioni orarie: $x(t) = At + B$, $y(t) = A + Bt^2$. Determinare:
a) l'angolo che l'accelerazione del punto forma con la direzione del moto in funzione del tempo;
b) il momento della forza rispetto all'origine del sistema al tempo t=0;
c) il raggio di curvatura ρ al tempo t=0.

5) Enunciare e discutere le equazioni cardinali della meccanica.

Soluzioni compito A

Esercizio 1

a) L'energia cinetica iniziale della sfera si può calcolare in due modi differenti:

1) energia cinetica rotazionale del centro di massa (cm) della sfera più l'energia cinetica traslazionale del cm

$$T=\frac{1}{2}I_o\omega^2{}_o+\frac{1}{2}mv_o{}^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\omega^2{}_o+\frac{1}{2}mR^2\omega^2{}_o=\frac{7}{10}mR^2\omega^2{}_o=\frac{7}{10}mv_o{}^2=0.7\,joule$$

dove I_o è il momento d'inerzia rispetto al cm, ω_o è la velocità angolare iniziale e $v_o=\omega_o R$ in quanto la sfera rotola senza strisciare.

2) oppure come rotazione attorno al punto di contatto della sfera con il piano orizzontale senza aggiunta della sua energia cinetica traslazionale perché il punto di contatto è fermo rispetto al piano orizzontale

$$T=\frac{1}{2}I_c\omega^2{}_o=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}mR^2+mR^2\right)\omega^2{}_o=\frac{7}{10}mR^2\omega^2{}_o=\frac{7}{10}mv_o{}^2$$

dove I_c è il momento d'inerzia rispetto al punto di contatto calcolato utilizzando il teorema di Huygens-Steiner.

b) Le forze in gioco sono la forza peso (conservativa) e la reazione del vincolo (che essendo attrito statico non compie lavoro) dunque si può applicare la conservazione dell'energia: $E_{ini}=E_{fin}$.
Scegliendo un sistema di riferimento con l'asse x sovrapposto al piano orizzontale posto all'altezza del cm della sfera e l'asse y perpendicolare ad esso, risulta:

$E_{ini}=T_{ini}+V_{ini}=\frac{7}{10}mv^2{}_o$ dove l'energia potenziale V sul piano orizzontale (altezza 0) è nulla.

$E_{fin}=T_{fin}+V_{fin}=mgh_{\max}$ in quanto nel punto di massima altezza la velocità della sfera è nulla.

Dalla conservazione dell'energia risulta: $\frac{7}{10}mv^2{}_o=mgh_{\max}\rightarrow h_{\max}=\frac{7}{10}\frac{v^2{}_o}{g}\cong 0.07m=7cm$

c) Utilizzando ancora la conservazione dell'energia $E_{ini}=E_{fin}$ si ottiene:

$E_{ini}=T_{ini}+V_{ini}=\frac{7}{10}mv^2{}_o=\frac{7}{10}mR^2\omega^2{}_o$ valutata precedentemente e

$$E_{fin}=\frac{1}{2}I_o\omega^2+\frac{1}{2}mv^2+mg\frac{h_{\max}}{2}=\frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega^2+\frac{1}{2}mR^2\omega^2+\frac{7}{10}\frac{mR^2\omega^2{}_o}{2}=\frac{7}{10}mR^2\omega^2+\frac{7}{20}mR^2\omega^2{}_o$$

ricavata sommando l'energia cinetica rotazionale rispetto al cm, l'energia cinetica traslazionale del cm e l'energia potenziale della sfera a metà altezza ottenuta dal punto b (ω è la velocità angolare della sfera a metà altezza). Svolgendo i calcoli si ottiene: $\omega^2=\frac{1}{2}\omega^2{}_o\rightarrow\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_o$

Esercizio 2

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine e il punto generico C(*x,y,z*) si ottiene l'energia potenziale
$V=\frac{\alpha}{2}x^2y^2z^2$. La costante α ha le dimensioni [M $L^{-4}T^{-2}$] e unità di misura N/m^5 (o $Kg/m^4\,s^2$).

Esercizio 3

Per risolvere il problema bisogna applicare la $\vec{F} = m\vec{a}$ separatamente sui 3 corpi. Scegliamo un sistema di riferimento unidimensionale diretto come il moto del sistema con il verso positivo verso destra per il corpo m_0 e verso il basso per i corpi m_1 e m_2. Chiamiamo T_0, T_1 e T_2 rispettivamente le tensioni dei fili l_0, l_1 e l_2 ; omettiamo di mettere il simbolo di vettore sulle tensioni in quanto tutte dirette lungo l'asse di riferimento scelto.

a) In questo caso il sistema è fermo dunque l'accelerazione dei 3 corpi è 0. Scriviamo la $\vec{F} = m\vec{a}$ lungo l'asse di riferimento per tutti e tre i corpi; sul corpo m_0 agiscono anche la forza peso e la reazione del vincolo che omettiamo di scrivere in quanto le due forze sono perpendicolari all'asse di riferimento scelto (equilibrandosi) e non danno alcuna informazione per la soluzione del problema.

$$\begin{cases} m_0 \rightarrow T_1 - T_0 = 0 \\ m_1 \rightarrow T_2 + m_1 g - T_1 = 0 \\ m_2 \rightarrow m_2 g - T_2 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} T_0 = T_1 \\ T_1 = m_1 g + m_2 g = 2Mg \\ T_2 = m_2 g = Mg \end{cases}$$

b,c) Il sistema è in movimento. Si deve riscrivere la $\vec{F} = m\vec{a}$ separatamente per i tre corpi considerando che l'accelerazione $\vec{a}$ è la stessa per tutti i corpi (in quanto collegati tra loro da fili in estensibili) e che la tensione T_o è nulla.

$$\begin{cases} m_0 \rightarrow T_1 = m_0 a \\ m_1 \rightarrow T_2 + m_1 g - T_1 = m_1 a \\ m_2 \rightarrow m_2 g - T_2 = m_2 a \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} a = \dfrac{(m_1 + m_2)g}{m_0 + m_1 + m_2} = \dfrac{2}{3} g \\ T_1 = m_0 \cdot \dfrac{(m_1 + m_2)g}{m_0 + m_1 + m_2} = \dfrac{2}{3} Mg \\ T_2 = \dfrac{m_0 m_2 g}{m_0 + m_1 + m_2} = \dfrac{1}{3} Mg \end{cases}$$

Esercizio 4

a) $\begin{cases} \dot{x}(t) = A \\ \dot{y}(t) = 2Bt \end{cases}$ e $\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = 2B \end{cases}$ → $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{|\vec{a}||\vec{v}|} = \dfrac{4B^2 t}{\sqrt{A^2 + 4B^2 t^2}\sqrt{4B^2}} = \dfrac{2Bt}{\sqrt{A^2 + 4B^2 t^2}}$

b) $\vec{F} = m\vec{a}$ → $\vec{F}(t=0) = \vec{F}_0 = m(a_x + a_y) = 2mB\hat{j}$ e $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 = B\hat{i} + A\hat{j}$

→ $\vec{M}(t=0) = \vec{r}_o \wedge \vec{F}_0 = (B\hat{i} + A\hat{j}) \wedge 2mB\hat{j} = 2mB^2\hat{k}$

c) $r = v^2 / |\vec{a}|$ dove $v^2(t=0) = v_x^2 + v_y^2 = A^2$ ed $|\vec{a}(t=0)| = 2B$ da cui $r = A^2 / 2B$