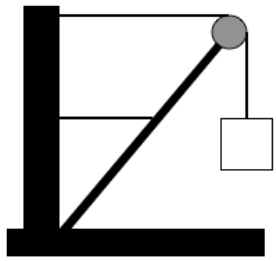
MECCANICA DEI SISTEMI

EX 1

Il sistema di sollevamento pesi in figura è costituito da una sbarra inclinabile lunga L che termina in una carrucola ideale, un filo che tiene il peso che passando per la carrucola arriva su una superficie verticale e un secondo filo che collega direttamente la sbarra con la superficie verticale. Sapendo che in un certo istante il sistema solleva una massa M=20kg, che L=3m, che i due fili collegati alla parete verticale sono perfettamente orizzontali e che la sbarra ideale senza massa è inclinata di 30° rispetto alla direzione orizzontale, trovare le due reazioni vincolari sulla parete verticale e la reazione vincolare sul piano d'appoggio, quando il sistema è in condizioni statiche.

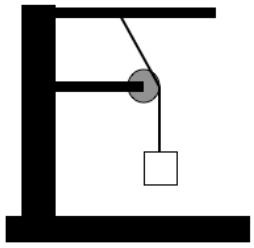


EX 2

Due pesi di massa M1=10kg e M2=3M1 sono appoggiati a una sbarra ideale senza massa di lunghezza L=3m. Sapendo che la massa maggiore si trova al centro della sbarra, quella minore a un suo estremo e che la sbarra poggia su due sostegni posti a 1m dalla due estremità, determinare il valore delle due reazioni vincolari.

EX 3

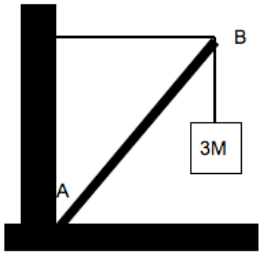
Un peso di massa M1=50kg è sostenuto da un filo ideale che , passando per una carrucola ideale senza massa è collegato al soffitto come da figura. Sapendo che il filo arriva al soffitto facendo un angolo di 45° rispetto alla verticale, determinare le reazioni vincolari sul soffitto e sulla carrucola.



EX 4

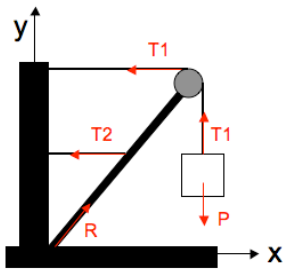
Un sistema di sollevamento pesi in figura è costituito da una sbarra AB lunga L e massa M, con un vincolo puntuale in A ed inclinata di 45° rispetto alla verticale e sostenuta da un cavo orizzontale. Ad un certo istante il sistema solleva un peso pari a

3M. Determinare in condizioni di equilibrio: a) la tensione del cavo orizzontale, b) la reazione vincolare in A.



SOLUZIONI

EX 1



In figura sono riportate tutte le forze che entrano in gioco nel mantenere il sistema in equilibrio.
Considerando la massa appesa si vede che per essere all'equilibrio il peso e la tensione della fune devono uguagliarsi. Siccome la fune è in estensibile e di massa trascurabile e la carrucola ideale, la fune trasporta la tensione lungo tutta la sua direzione uguale a se stessa. Di conseguenza la prima reazione vincolare sulla parete verticale è:
$\vec{T}_1 = -Mg\hat{i}$

Siccome le varie forze in gioco non sono tutte applicate nello stesso punto, per trovare le reazioni vincolari R e T2 non basta utilizzare la prima equazione della statica (somma delle forze nulle) ma dobbiamo considerare anche i momenti. Quindi le 2 equazioni saranno:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$
$$\sum_i \vec{M}_i = 0$$

Utilizzo la seconda per trovare la tensione T2 usando come polo per calcolare i momenti l'origine degli assi di riferimento in modo che il braccio della reazione

vincolare R si annulli e compaiano solo quindi le due tensioni. T1 la conosciamo quindi dall'equazione ricavo T2.

$$\vec{r}_1 \times \vec{T}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{T}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{P} = 0$$

$$\left[(L sen 30 \hat{j}) \times (-Mg\hat{i})\right] + \left[\left(\frac{L}{2} sen 30 \hat{j}\right) \times (-T_2 \hat{j})\right] + \left[(L \cos 30 \hat{i}) \times (-Mg\hat{j})\right] = 0$$

Da ricordare che nella formula dei momenti r sono i bracci delle forze, cioè la distanza della forza dal polo in cui calcoliamo il momento. Deve quindi essere perpendicolare alle nostre forze per definizione di distanza: retta passante per il punto perpendicolare alla retta di partenza in questo caso data dalla direzione della forza. Quindi con qualche passaggio algebrico:

$$-L\frac{1}{2}Mg(-\hat{k}) - T_2\frac{L}{2}\frac{1}{2}(-\hat{k}) - MgL\frac{\sqrt{3}}{2}(\hat{k}) = 0$$

$$Mg + T_2\frac{1}{2} - Mg\sqrt{3} = 0 \Rightarrow T_2 = 2Mg(\sqrt{3}-1) \Rightarrow \vec{T}_2 = 2Mg(\sqrt{3}-1)\hat{i}$$

NB: ripassare come si calcolano i prodotti vettoriali nel dettaglio quelli fra versori. Attenzione a non sbagliare i segni

Per trovare l'ultima reazione vincolare basta utilizzare la prima equazione della statica e proiettarla lungo le due direzioni del sistema di riferimento:

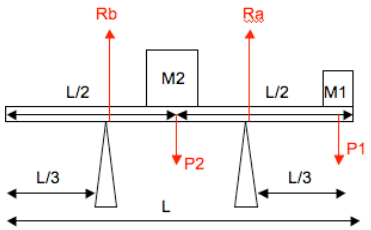
$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$$

$$x) R_x - T_1 - T_2 = 0 \Rightarrow R_x = T_1 + T_2 = 2Mg(\sqrt{3}-1) + Mg = Mg(2\sqrt{3}-1)$$

$$y) R_y - P = 0 \Rightarrow R_y = P = Mg$$

$$\Rightarrow \vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} = Mg(2\sqrt{3}-1)\hat{i} + Mg\hat{j}$$

EX 2



In figura sono mostrati in nero la geometria del sistema sotto esame e in rosso le forze applicate ad esso. In questi caso le due masse M1 e M2 sono da considerarsi come puntiformi.
Siccome è un sistema esteso, le forze non sono applicate tutte nello stesso punto come si vede dal disegno, perciò affinché il sistema sia in equilibrio non basta

imporre che sia nulla la risultante delle forze, ma devo imporre anche che si annulli la risultante dei momenti delle forze.

Quindi:
$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad F)\vec{P}_2 + \vec{P}_1 + \vec{R}_A + \vec{R}_B = 0$$
$$\sum_i \vec{M}_i = 0 \qquad M)\vec{r}_2 \times \vec{P}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_A \times \vec{R}_A + \vec{r}_B \times \vec{R}_B = 0$$

Come centro di riduzione per il calcolo dei momenti conviene prendere un punto per cui mi si semplificano i calcoli senza eliminare le incognite che devo calcolare. In questo caso può essere utile scegliere come centro di riduzione il centro della sbarra in modo tale che il braccio del peso P2 è nulla. Proietto la prima equazione delle forze sull'unica direzione che mi interessa che è quella verticale e svolgo i calcoli per il momento:

$$-M_2 g - M_1 g + R_A + R_B = 0$$
$$\left[(\frac{L}{2}\hat{i}) \times (-M_1 g\hat{j})\right] + \left[-\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right)\hat{i} \times (R_A \hat{j})\right] + \left[\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right)\hat{i} \times (R_B \hat{j})\right] = 0$$

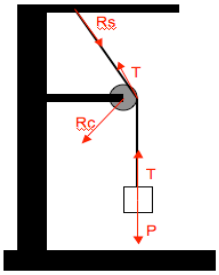
Stando attenti alle regole del prodotto vettore fra versori, si vede che la seconda equazione è un'equazione vettoriale lungo solo l'asse delle z (perpendicolare al foglio), per cui posso proiettarla lungo l'asse e, unita alla prima equazioni, mi dà un sistema di due equazioni nelle due incognite che sono proprio le reazioni vincolare che stavo cercando:

$$\begin{cases} -M_2 g - M_1 g + R_A + R_B = 0 \\ -M_1 g\frac{L}{2} - R_A\frac{L}{6} + R_B\frac{L}{6} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -M_2 g - M_1 g + R_A + R_B = 0 \\ -3M_1 g - R_A + R_B = 0 \end{cases}$$

Sommo le due equazioni e risolvo:

$$\begin{cases} -M_2 g - M_1 g + R_A + R_B = 0 \\ -3M_1 g - R_A + R_B = 0 \end{cases} +$$
$$-M_2 g - M_1 g - 3M_1 g + 2R_B = 0 \Rightarrow R_B = \frac{+M_2 g + M_1 g + 3M_1 g}{2} = 343N$$
$$R_A = -3M_1 g + R_B = 49N$$

EX 3



In figura sono segnate in rosso tutte le forze agenti sul sistema.
Siccome il corpo appeso è in equilibrio, si vede subito che la tensione del filo è uguale e opposta alla forza peso. La fune è in estensibile e di massa trascurabile e la carrucola ideale quindi la tensione del filo che sostiene il peso è trasportata uguale a se stessa lungo tutta la fune. Di conseguenza la prima reazione vincolare del soffitto è in modulo uguale alla tensione della fune. Sapendo che l'angolo minore che il filo forma col soffitto è di 45°, la prima reazione vincolare si scrive come:

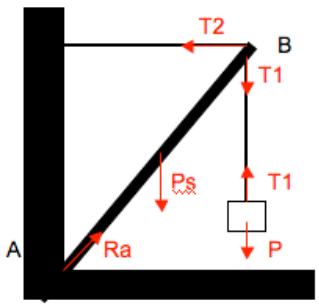
$$\vec{R}_s = Mg\cos 45\hat{i} - Mgsen45\hat{j} = Mg\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - Mg\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$$

Per trovare la seconda reazione vincolare della carrucola considero la carrucola come punto materiale ideale. Siccome è in quiete la risultante delle forze agenti si di essa deve essere nulla. Le forze che insistono sulla carrucola sono il peso dell'oggetto appeso, la reazione vincolare della carrucola stessa è la reazione vincolare del soffitto. Proietto l'equazione nelle due direzioni x e y e trovo le componenti della reazione vincolare della carrucola:

$$\vec{P} + \vec{R}_c + \vec{R}_s = 0 \Rightarrow \begin{cases} x) - R_{cx} + R_{sx} = 0 \\ y) - R_{cy} - R_{sy} - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{cx} = R_{sx} = Mg\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ R_{cy} = -R_{sy} - P = Mg\dfrac{\sqrt{2}}{2} - Mg = Mg(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1) \end{cases}$$

$$\vec{R}_c = -Mg\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + Mg\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\hat{j}$$

EX 4



In figura in rosso sono segnate tutte le forze agenti sul sistema in esame. Per prima cosa osserviamo che il peso 3M è in equilibrio quindi la tensione T1 è uguale e opposta al peso dell'oggetto. Essendo la fune in estensibile e di massa trascurabile, trasporta la tensione uguale a se stessa lungo tutta la fune. Perciò in B si avrà:

$$\vec{T}_1 = -3Mg\hat{j}$$

Osserviamo inoltre che le forze sono applicate in diversi punti del mio sistema, perciò l'equilibrio sarà dato oltre che dalla risultante nulla delle forze anche dalla risultante nulla dei momenti:

$$F)\vec{T}_2 + \vec{T}_1 + \vec{P}_s + \vec{R}_A = 0$$
$$M)\vec{r}_2 \times \vec{T}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{T}_1 + \vec{r}_A \times \vec{R}_A + \vec{r}_s \times \vec{P}_s = 0$$

Ora proiettiamo la prima equazione sui due assi di un sistema xy e svolgiamo i calcoli dei momenti prendendo come centro di riduzione il punto A in modo da semplificarci i calcoli (rispetto ad A la reazione vincolare in A ha braccio nullo, quindi scompare dal calcolo):

$$x) -T_2 + R_{Ax} = 0$$
$$y) -T_1 - P_s + R_{Ay} = 0$$
$$M)(Lsen45\hat{j}) \times (-T_2\hat{i}) + (L\cos 45\hat{i}) \times (-3Mg\hat{j}) + (\frac{L}{2}\cos 45\hat{i}) \times (-Mg\hat{j}) = 0$$

L'ultima equazione è un'equazione vettoriale diretta solo lungo l'asse z perpendicolare al foglio. La proietto quindi sull'asse z e risolvo il sistema trovando tutte le incognite richieste:

$$R_{Ax} = T_2$$
$$R_{Ay} = T_1 + P_s$$
$$T_2 Lsen45 - 3MgL\cos 45 - \frac{L}{2}Mg\cos 45i = 0 \Rightarrow T_2 - 3Mg - \frac{Mg}{2} = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{7}{2}Mg$$

Quindi:

$$\vec{T}_2 = -\frac{7}{2}Mg\hat{i}$$
$$\begin{cases} R_{Ax} = T_2 = \frac{7}{2}Mg \\ R_{Ay} = T_1 + P_s = 3Mg + Mg = 4Mg \end{cases} \Rightarrow \vec{R}_A = \frac{7}{2}Mg\hat{i} + 4Mg\hat{j}$$
$$tg\theta = \frac{R_{Ay}}{R_{Ax}} = \frac{4Mg}{7/2Mg} = \frac{8}{7} \Rightarrow \theta = arctg(\frac{8}{7}) = 48.8$$