SITEMI ISOLATI

EX 1
Calcolare la velocità di rinculo di un fucile di 4 kg che spara un proiettile di 0.05kg alla velocità di 280m/s.

EX 2
Un protone che viaggia alla velocità di $v_1 = 6*10^5$m/s colpisce un altro protone fermo. Si osserva che uno dei due protoni dopo l'urto si muove con velocità $v_1' = 4.6*10^5$m/s con un angolo di 40° rispetto la direzione originale. Calcolare le velocità dell'altro protone dopo l'urto.

EX 3
Un blocco di mass m=1kg scende lungo un piano inclinato di 37° alto 3.6m. In fondo al piano inclinato colpisce un secondo blocco di massa M=3kg fermo su un piano orizzontale. In mancanza di attriti, calcolare: a) la velocità dei due oggetti dopo la collisione; b) l'altezza a cui risale il blocco m.

EX 4
Un proiettile di massa M=0.3kg viene lanciato con velocità v0=60m/s in una direzione che forma un angolo di 60° con l'orizzontale. Al vertice della parabola il proiettile si spacca in due frammenti. Uno dei due ha massa m1=0.1kg e la sua velocità è v1=90m/s in direzione verticale verso il basso. Calcolare a) la velocità del secondo frammento; b) la quota massima a cui arriva m2.

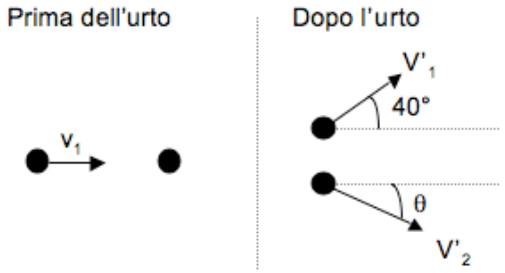
SOLUZIONI

EX 1
Non essendoci forze esterne si tratta di un sistema isolato per cui si conserva la quantità di moto: $\vec{Q}_i = \vec{Q}_f$. Prendo come punto iniziale un attino prima dello sparo e come punto finale un attimo dopo. Ricordiamo inoltre che la quantità di moto è una quantità vettoriale quindi l'equazione sopra racchiude fino a te equazioni scalari una volta che si proietta lungo gli assi di un sistema di riferimento. In questo caso l'unica direzione che ci serve è quella orizzontale, per cui l'equazione diventa:

$$\vec{Q}_i = \vec{Q}_f \Rightarrow 0 = m_{fuc} v_{fuc} + m_{pro} v_{pro} \Rightarrow v_{fuc} = -\frac{m_{pro}}{m_{fuc}} v_{pro} = -\frac{0.05}{4} * 280 = -3.5 m/s$$

La velocità di rinculo viene negativa, come è giusto che sia: se Q deve conservarsi e il proiettile è sparato in avanti la velocità di rinculo deve essere verso le x negative.

EX 2



In figura è schematizzata la cinematica dei due protoni prima e dopo l'urto.
Siamo in presenza di un sistema isolato per cui si conserva la quantità di moto: $\vec{Q}_i = \vec{Q}_f$ dove i = prima dell'urto e f = dopo l'urto. Siccome si tratta di un'equazione vettoriale, la conservazione deve valere in entrambi gli assi, orizzontale e verticale, di un sistema di riferimento: $\vec{Q}_i = \vec{Q}_f \Rightarrow \begin{cases} Q_{ix} = Q_{fx} \\ Q_{iy} = Q_{fy} \end{cases}$

In questo caso si ha: $\vec{Q}_i = m\vec{v}_1 = mv_1\hat{i}$

$$\vec{Q}_f = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2' = mv_1'\cos 40\hat{i} + mv_1'sen40\,\hat{j} + mv_2'\cos\theta\hat{i} - mv_2'sen\theta\hat{j}$$

Ora si devono eguagliare le componenti lungo la stessa direzione:

$$\hat{i})mv_1 = mv_1'\cos 40 + mv_2'\cos\theta$$
$$\hat{j})0 = mv_1'sen40 - mv_2'sen\theta$$

per cui si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite (il modulo della velocità v2 e l'angolo che forma con la direzione orizzontale) perfettamente risolvibile

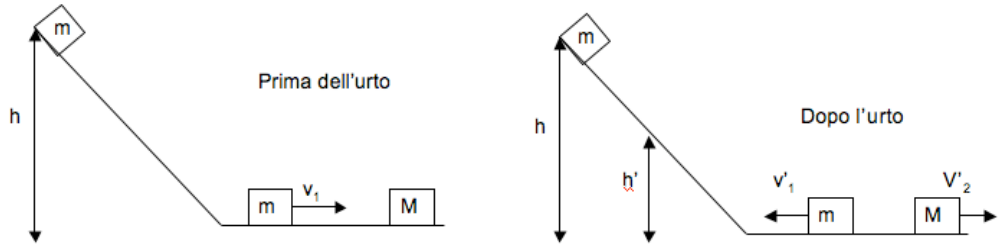
$$\begin{cases} v_1 = v_1'\cos 40 + v_2'\cos\theta \\ 0 = v_1'sen40 - v_2'sen\theta \Rightarrow v_2' = \dfrac{v_1'sen40}{sen\theta} \end{cases}$$

$$v_1 = v_1'\cos 40 + \frac{v_1'sen40}{sen\theta}\cos\theta \Rightarrow v_1 = v_1'\cos 40 + v_1'sen40\cot g\theta \Rightarrow$$

$$\cot g\theta = \frac{v_1 - v_1'\cos 40}{v_1'sen40} = 0.837 \Rightarrow \theta = 49.97° \Rightarrow v_2' = 3.86*10^5 m/s$$

$$\vec{v}_2' = 3.86*10^5\cos(49.97°)\hat{i} - 3.86*10^5 sen(49.97°)\hat{j} = 2.48*10^5\hat{i} - 2.96*10^5\hat{j}$$

EX 3



In figura è schematizzata la cinematica dei due blocchi prima e dopo la collisione.
Per comodità prendiamo un sistema di riferimento con l'asse delle x lungo il piano orizzontale e l'asse delle y in verticale.
Nell'istante dell'urto, il sistema può essere pensato come isolato, per cui si conserva la quantità di moto: $\vec{Q}_i = \vec{Q}_f$. In questo caso l'unica direzione che ci interessa è quella orizzontale per cui proiettando sull'asse x questa equazione si ha:

$$mv_1 = mv_1' + Mv_2'$$

(il blocco M è inizialmente fermo, quindi non ha quantità di moto).
Abbiamo però così facendo una sola equazione in cui le incognite sono 3: la velocità di m prima dell'urto e le velocità di entrambi gli oggetti dopo l'urto.
La velocità di m prima dell'urto la posso calcolare sapendo che m scivola da un piano inclinato di altezza nota partendo da fermo. Posso utilizzare o il teorema delle forze vive (che vale sempre qualsiasi siano le forze in gioco) o la conservazione dell'energia meccanica visto che per ipotesi non ci sono attriti quindi tutte le forze in gioco sono conservative.
Usando il teorema delle forze vive si ha, chiamando A il punto alla sommità del piano inclinato e B il punto finale del piano:

$$L_{AB} = T_B - T_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}m*0 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Usando la definizione di lavoro:

$$L_{AB} = \int \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{s} + \int_A^B \vec{R} \cdot d\vec{s}$$

La reazione vincolare R per definizione è perpendicolare al piano inclinato, quindi perpendicolare anche allo spostamento ds. Di conseguenza per le proprietà del prodotto scalare fra forza e spostamento, il lavoro compiuto dalla reazione vincolare è nullo. Rimane solo il lavoro della forza peso P che essendo conservativa può essere calcolato come differenza di energia potenziale:

$$L_{AB} = U_A - U_B = mgh_A - mgh_B = mgh - mg*0 = mgh$$

Unendo le due espressioni del lavoro ottengo la velocità in B che non è altro che la velocità con cui m va a colpire M:

$$L_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} = 8.4m/s$$

La stessa cosa l'avremmo trovata utilizzando la conservazione dell'energia meccanica tra A e B:

$$E_{cin}^A + \sum E_{pot}^A = E_{cin}^B + \sum E_{pot}^B \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \Rightarrow \frac{1}{2}m*0 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg*0$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

Ci restano ancora due incognite nell'equazione della conservazione della quantità di moto per cui è necessario trovare un'altra equazione. Per ipotesi siamo in una situazione ideale in assenza di attriti, tutte le forze in gioco sono conservative quindi posso applicare la conservazione dell'energia meccanica considerando gli istanti subito prima e subito dopo l'urto:

$$E_{cin}^i + \sum E_{pot}^i = E_{cin}^f + \sum E_{pot}^f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}Mv_2'^2 \Rightarrow mv_1^2 = mv_1'^2 + Mv_2'^2$$

dove non compare più l'energia potenziale gravitazionale perché tutto avviene a quota h=0 nel sistema di riferimento che stiamo considerando.
Ora utilizzando le due leggi di conservazione ottengo un sistema di due equazioni nelle due incognite che sono le velocità finali dei due blocchi dopo l'urto:

$$\begin{cases} 1) mv_1 = mv_1' + Mv_2' \\ 2) mv_1^{\ 2} = mv_1'^2 + Mv_2'^{\ 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) 8.4 = v_1' + 3v_2' \\ 70.56 = v_1'^2 + 3v_2'^{\ 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' = 8.4 - 3v_2' \\ 70.56 = 70.56 + 9v_2'^{\ 2} - 50{,}4v_2' + 3v_2'^{\ 2} \Rightarrow v_2'(12v_2' - 50{,}4) = 0 \end{cases}$$

$$v_2' = 4.2m/s \Rightarrow v_1' = -4.2m/s$$

Due considerazioni: la prima è che la velocità di m dopo l'urto è diminuita, come mi aspettavo che succedesse in quanto se l'energia si conserva parte della sua energia cinetica si è trasferita al blocco M. La seconda è che nell'equazione della conservazione della quantità di moto non avevo fatto alcuna assunzione sulla direzione delle velocità finali. Abbiamo ottenuto per M un valore positivo e per m un valore negativo come da esperienza reale ci saremmo aspettati. Se la massa M fosse stata più piccola di m, avremmo potuto trovare due velocità positive, in quanto M di valore piccolo avrebbe perturbato di poco il moto di m e entrambi avrebbero proseguito il moto lungo l'asse delle x positive. In questo caso essendo M più grande di m ci aspettiamo che m rimbalzi all'indietro, come effettivamente abbiamo trovato.

Una volta che abbiamo la velocità finale di m, possiamo come prima sfruttare o il teorema delle forze vive o la conservazione dell'energia meccanica per trovare l'altezza a cui risale sul piano inclinato. Col teorema delle forze vive chiamando C il nuovo punto di arrivo finale:

$$L_{AB} = T_C - T_B = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}m*0 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\frac{1}{2}mv_B^2$$
$$L_{AB} = U_B - U_C = mgh_B - mgh_C = mg*0 - mgh' = -mgh'$$

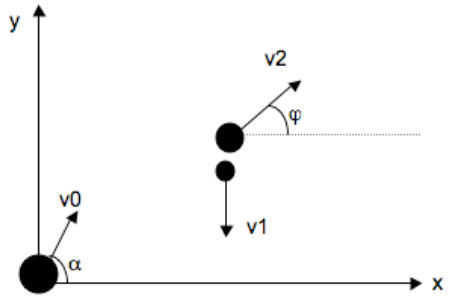
Quindi: $L_{AB} = -\frac{1}{2}mv_B^2 = -mgh' \Rightarrow h' = \frac{v_B^2}{2g} = 0.9m$

Oppure con la conservazione dell'energia:

$$E_{cin}^C + \sum E_{pot}^C = E_{cin}^B + \sum E_{pot}^B \Rightarrow \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \Rightarrow \frac{1}{2}m*0 + mgh' = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg*0$$

$$\Rightarrow mgh' = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow h' = \frac{v_B^2}{2g}$$

EX 4



In figura è schematizzata la cinematica dei vari oggetti.
Nell'attimo dello scoppio del proiettile, quindi solo quando M è arrivata al vertice della parabola, il sistema può essere pensato come isolato quindi vale la conservazione della quantità di moto nell'istante immediatamente prima e immediatamente dopo lo scoppio. In qualunque altro punto il sistema M o m1+m2 è sottoposto all'azione della forza peso, che è una forza esterna, di conseguenza il sistema non può più essere pensato come isolato.
Scriviamo la $\vec{Q}_i = \vec{Q}_f$ nel punto di massima altezza, ricordandoci che a) è un'equazione vettoriale che quindi va scomposta nella direzione x e y , b) da quanto studiato nel moto dei proiettili al punto di massima altezza non c'è più la componente y della velocità, rimane solo quella lungo x. Scomponendo $\vec{v}_0 = v_0\cos\alpha\hat{i} + v_0 sen\alpha\hat{j}$ si ottiene:

$$\vec{Q}_i = M\vec{v}_i = Mv_o\cos\alpha\hat{i}$$
$$\vec{Q}_i = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = -m_1v_1\hat{j} + m_2v_2\cos\varphi\hat{i} + m_2v_2 sen\varphi\hat{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x) Mv_o \cos\alpha = m_2 v_2 \cos\varphi \Rightarrow v_2 = \dfrac{Mv_o \cos\alpha}{m_2 \cos\varphi} \\ y) 0 = -m_1 v_1 + m_2 v_2 sen\varphi \end{cases}$$

$$0 = -m_1 v_1 + m_2 sen\varphi * \frac{Mv_o \cos\alpha}{m_2 \cos\varphi} \Rightarrow 0 = -m_1 v_1 + Mv_o \cos\alpha tg\varphi \Rightarrow tg\varphi = \frac{m_1 v_1}{Mv_o \cos\alpha} = \frac{0.1*90}{0.3*60*\cos 60} = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$$

$$v_2 = \frac{0.3*60*\cos 60}{(0.3-0.1)*\cos 45} = 45\sqrt{2} m/s$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = 45\sqrt{2}\cos 45\hat{i} + 45\sqrt{2} sen45\hat{j} = 45\hat{i} + 45\hat{j} m/s$$

L'altezza massima raggiunta da m2 è data dalla somma dell'altezza massima a cui è arrivato il proiettile di massa M più l'altezza massima a cui è arrivato il proiettile m2 partendo già dall'altezza h. L'altezza a cui arriva M si trova con la conservazione dell'energia meccanica fra il punto iniziale e quello punto finale :

$$E_{cin}^{O} + \sum E_{pot}^{O} = E_{cin}^{\max} + \sum E_{pot}^{\max} \Rightarrow \frac{1}{2} Mv_o^2 + Mgh_o = \frac{1}{2} Mv_{\max}^2 + Mgh_{\max} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} Mv_0^2 + Mg*0 = \frac{1}{2} M(v_0 \cos\alpha)^2 + Mgh_{\max} \Rightarrow \frac{1}{2} Mv_0^2 = \frac{1}{2} M(v_0 \cos\alpha)^2 + Mgh_{\max}$$

$$\Rightarrow Mv_0^2 = M(v_0 \cos\alpha)^2 + 2Mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2(1-\cos^2\alpha)}{2g} = \frac{60^2(1-\cos^2 45)}{2*9.8} = 137.76m$$

Ora considero solo il moto di m2 e impongo come prima la conservazione dell'energia meccanica osservando che per il calcolo dell'energia potenziale iniziale di m2, l'altezza è quella che abbiamo calcolato prima, mentre la velocità finale, essendo nel punto di massima altezza, equivale solo alla componente lungo x della velocità:

$$E_{cin}^{i} + \sum E_{pot}^{i} = E_{cin}^{\max} + \sum E_{pot}^{\max} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_2 gh_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2,\max}^2 + m_2 gh_{\max} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_2 gh_2 = \frac{1}{2} m_2 (v_2 \cos\varphi)^2 + m_2 gh_{\max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2^2 + 2gh_2 = (v_2 \cos\varphi)^2 + 2gh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_2^2(1-\cos^2\varphi) + 2gh_2}{2g} = \frac{(45\sqrt{2})^2(1-\cos^2 45)}{2*9.8} + 137.76 = 241.1m$$