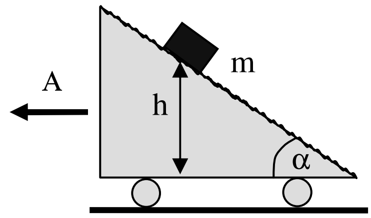
FISICA GENERALE T-A 10 settembre 2012 prof. spighi (CdL ingegneria Energetica)

1) Un carrello scabro inclinato di un angolo $\alpha = 45^\circ$ si muove con accelerazione costante $A = g/20$ (g accelerazione di gravità) in direzione orizzontale (figura). Nell'ipotesi che un corpo puntiforme di massa $m = 1\,kg$ sia fermo rispetto al piano scabro ad un'altezza $h = 1\,m$, determinare:

a) la forza di attrito statico agente sul corpo puntiforme;
b) la reazione vincolare del piano inclinato sul corpo puntiforme.



Ad un certo istante il carrello si muove con accelerazione $A' = g/2$ ed il corpo inizia a scivolare (partendo da fermo all'altezza h), determinare:

c) il tempo necessario affinchè il corpo raggiunga la base del carrello supponendo che il coefficiente di attrito dinamico sia $\mu_D = 0.4$.

2) Dato un punto materiale di massa m posto in un campo di forze la cui energia potenziale ha l'espressione $V(x,y,z) = \alpha y^2$ (con α costante positiva) e sapendo che al tempo $t_o = 0$ il punto si trova nel punto $P = (x_o, y_o, z_o)$ con velocità $\vec{v}_o = v_o\,\hat{i}$, determinare:

a) la forza a cui è soggetto il punto all'istante t_o;
b) le equazioni cartesiane del moto;
c) il lavoro fatto dalla forza dall'istante iniziale al tempo $t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}$.

3) Una molla ideale, di massa trascurabile e costante elastica $k = 45\,N/m$, è ferma su un piano orizzontale liscio. A un estremo è attaccata una massa $m = 100\,g$ mentre l'altro estremo è lasciato libero. Una seconda massa m si muove sullo stesso piano con velocità $v = 3\,m/s$ diretta lungo l'asse della molla fino a urtarla nell'estremo libero. Calcolare:

a) la quantità di moto del sistema dopo l'urto;
b) l'energia immagazzinata nella molla nell'istante di massima compressione;
c) la massima compressione della molla.

Raggiunta la massima compressione, la molla torna a distendersi fino ad acquisire nuovamente la lunghezza a riposo. In quell'istante la massa che l'ha urtata si stacca e prosegue il suo moto liberamente.

d) Calcolare la velocità delle due masse dopo il distacco.

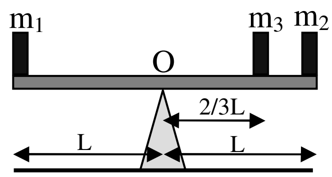
4) Una fune inestensibile di massa trascurabile è avvolta attorno al bordo di un disco di massa *M* e raggio *R*. L'altro estremo della fune è fissato al soffitto. Il disco, inizialmente in quiete, è lasciato libero di cadere facendo srotolare la fune che rimane istantaneamente tesa. Determinare:

a) la velocità del centro di massa del disco dopo una caduta di lunghezza *L*;
b) il modulo dell'accelerazione del centro di massa del disco;
c) la tensione della fune.

Il momento di inerzia di un disco omogeneo (massa M e raggio R) rispetto al suo cm è: $I_{disco} = \frac{1}{2}MR^2$

5) Tre bambini, di massa m_1, m_2 ed m_3, giocano su di un'altalena schematizzabile come un'asta omogenea di massa $m_a = 100\,Kg$ poggiante in O su di un perno centrale di massa trascurabile con quattro seggiolini posti simmetricamente a distanza *2/3L e L* con $L = 1.5\ m$ dal perno (vedi figura). Sapendo che le masse di due dei tre bambini valgono $m_1 = 25$ kg e $m_2 = 17$ kg, calcolare:

a) la massa m_3 del terzo affinché l'altalena sia in equilibrio;
b) la reazione vincolare del perno sull'asta dell'altalena;
c) il momento di inerzia del sistema rispetto ad un'asse perpendicolare all'asta passante per O.



Se m_3 scende dall'altalena, calcolare:

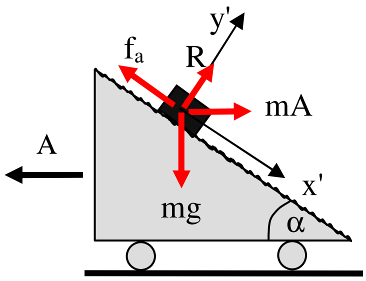
d) la distanza del centro di massa del sistema dal perno lungo l'asta.

Il momento di inerzia di un'asta (massa M e lunghezza L) rispetto al suo cm è: $I_{ASTA} = \frac{1}{12}ML^2$

6) Il lavoro delle forze non conservative: espressione e discussione (ed eventualmente dimostrazione).

Soluzioni compito:

Esercizio 1:



a,b) L'oggetto è fermo sul piano, dunque, scegliendo un sistema di riferimento solidale con il corpo puntiforme con l'asse x' lungo il piano inclinato e y' perpendicolare ad esso (vedi figura), possiamo scrivere che

$\sum \vec{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{f}_{as} + \vec{R} + m\vec{A} + m\vec{g} = 0$ dove

f_{as} è la forza di attrito statico (indicata nel disegno con f_a),
R è la reazione vincolare del piano inclinato sul corpo puntiforme,
mg è la forza peso,
mA è la forza fittizia dovuta alla non inerzialità del sistema di riferimento $O'x'y'$ a causa dell'accelerazione del carrello.

lungo gli assi x' ed y' diventa:

$$\begin{cases} -f_{as} + mA\cos\alpha + mg\,sen\alpha = 0 \\ R - mg\cos\alpha + mA\,sen\alpha = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_{as} = mA\cos\alpha + mg\,sen\alpha \\ R = mg\cos\alpha - mA\,sen\alpha \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} f_{as} = mg\left(\frac{1}{20}\cos\alpha + sen\alpha\right) = 7.3\ N \\ R = mg\left(\cos\alpha - \frac{1}{20}sen\alpha\right) = 6.6\ N \end{cases}$$

c)

Il corpo ha iniziato a scivolare dunque l'unico attrito agente è quello dinamico. Le forze in gioco sono le stesse di quelle rappresentate nella figura sopra con la sola eccezione che adesso l'accelerazione del carrello è $|A'| = g/2$ e la forza di attrito è di tipo dinamico data dall'espressione

$\vec{f}_{ad} = -\mu_D R\hat{i}'$.

Scriviamo la $\vec{F} = m\vec{a}$ sapendo che il moto si sviluppa solo lungo l'asse x':

$$\begin{cases} -f_{ad} + mA'\cos\alpha + mg\,sen\alpha = ma \\ R - mg\cos\alpha + mA'\,sen\alpha = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\mu_D m(g\cos\alpha - A'\,sen\alpha) + mA'\cos\alpha + mg\,sen\alpha = ma \\ R = m(g\cos\alpha - A'\,sen\alpha) \end{cases}$$

dalla prima espressione si può ricavare l'accelerazione a

$$\begin{cases} a = -\mu_D(g\cos\alpha - A'\,sen\alpha) + A'\cos\alpha + g\,sen\alpha = -\mu_D g\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}sen\alpha\right) + g\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + sen\alpha\right) \\ R = m(g\cos\alpha - A'\,sen\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\mu_D g\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + g\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = g\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{\mu_D}{2}\right) = 9.0\ m/s^2 \\ R = m(g\cos\alpha - A'\,sen\alpha) \end{cases}$$

L'accelerazione risulta costante e dunque il moto è di tipo uniformemente accelerato. Sapendo che il corpo puntiforme parte da fermo da un'altezza h si ottiene

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

dove s è lo spazio percorso dato da:

$$s = \frac{h}{sen\alpha} \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{sen\alpha\, a}} = 0.56\ s$$

Esercizio 2:

a)

La forza si ottiene facendo il gradiente (cambiato di segno) dell'energia potenziale:

$$\vec{F} = -\vec{\Delta}V \quad \rightarrow \quad \begin{cases} F_x = -\dfrac{\delta V}{\delta x} = 0 \\ F_y = -\dfrac{\delta V}{\delta y} = -2\alpha y \\ F_z = -\dfrac{\delta V}{\delta z} = 0 \end{cases}$$

(scusate il simbolo rovesciato per il gradiente, ma non ho trovato niente di meglio!)

b)

L'accelerazione a cui è soggetto il corpo è

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \left(0, \frac{-2\alpha y}{m}, 0\right) \quad \text{che in coordinate cartesiane diventa} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -\dfrac{2\alpha}{m} y \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Poiché lungo x e z l'accelerazione è nulla si ha un moto rettilineo uniforme, mentre lungo y si ha

$$F_y = ma_y = -2\alpha y$$

che conduce ad un'equazione differenziale del tipo

$$m\ddot{y} = -2\alpha y \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + \frac{2\alpha}{m} y = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}$$

caratteristica di un moto armonico:

le equazione del moto sono dunque $\begin{cases} x(t)=x_o+v_{ox}t \\ y(t)=A\cos(\omega t+\varphi_o)=A\cos\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\,t+\varphi_o\right) \\ z(t)=z_o+v_{oz}t \end{cases}$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $\begin{cases} x(t)=x_o+v_o t \\ y(t)=y_o\cos\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\,t\right) \\ z(t)=z_o \end{cases}$

c)

Il campo è conservativo dunque il lavoro tra l'istante iniziale (0) e quello finale (1) può essere calcolato come

$$L_{01}=V\left(x_0,y_0,z_0\right)-V\left(x_1,y_1,z_1\right)=\alpha {y_0}^2-\alpha {y_1}^2$$

dove

$$y_1=y\left(t_1\right)=y_o\cos\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\,t_1\right)=y_o\cos\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\right)=y_o\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

dunque

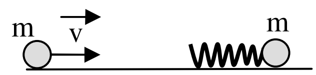
$$L_{01}=\alpha {y_0}^2$$

oppure tramite la definizione di lavoro:

$$L_{01}=\int_{x_0,y_0,z_0}^{x_1,y_0,z_0}F_x\,dx+\int_{x_1,y_0,z_0}^{x_1,y_1,z_0}F_y\,dy+\int_{x_1,y_1,z_0}^{x_1,y_1,z_1}F_z\,dz=-\int_{x_1,y_0,z_0}^{x_1,y_1,z_0}2\alpha y\,dy=-\left[\alpha y^2\right]_{x_1,y_0,z_0}^{x_1,y_1,z_0}=\alpha {y_0}^2-\alpha {y_1}^2=\alpha {y_0}^2$$

Esercizio 3:

a)



La quantità di moto del sistema si conserva in quanto la risultante delle forze esterne è nulla (il sistema è isolato) poichè la forza gravitazionale è equilibrata dalla reazione vincolare del tavolo:

$\vec{Q}_{in}=\vec{Q}_{fin}$

dove $\vec{Q}_{in}=m\vec{v}$

da cui degue che $\vec{Q}_{fin}=m\vec{v}=0.3\ Kgm/s$

b)

Nell'istante di massima compressione le due masse si muovono alla stessa velocità (che coincide con la velocità del centro di massa) e possiamo ancora applicare la conservazione della quantità di moto poiché la forza della molla è una forza interna al sistema; come istante iniziale scegliamo quello in cui la molla è ferma (come fatto nel punto a) e come istante finale ovviamente quello di massima compressione della molla:

$\vec{Q}_{ini} = \vec{Q}_{fin} \quad \rightarrow \quad m\vec{v} = m\vec{v}' + m\vec{v}' = 2m\vec{v}'$ da cui si ricava la velocità $\vec{v}'$ delle due masse data da:

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{2} = 1.5\, m/s$$

il moto delle due masse è rettilineo ed equiverso e dunque il simbolo di integrale può anche essere omesso.

Essendo presenti solo forze conservative, possiamo conservare anche l'energia meccanica:

$E_{ini} = E_{fin} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 + E_{molla} = \frac{1}{4}mv^2 + E_{molla}$ da cui

$$E_{molla} = \frac{1}{4}mv^2 = 0.225\, J$$

dove E_{molla} è l'energia immagazzinata nella molla che altro non è che la sua energia potenziale.

c)

La massima compressione della molla è data da:

$$E_{molla} = \frac{1}{2}kx^2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{2E_{molla}}{k}} = 0.1\, m$$

d)

Nell'istante del distacco la molla non possiede energia potenziale poiché si trova alla sua lunghezza di riposo. Applicando la conservazione della quantità di moto e dell'energia tra l'istante iniziale (quello prima dell'urto) e l'istante finale (quello del distacco) si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{Q}_{ini} = \vec{Q}_{fin} \quad \rightarrow \quad m\vec{v} = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2' \\ E_{ini} = E_{fin} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v = v_1' + v_2' \\ v^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \end{cases}$$

(i segni di vettori sono stati omessi poichè il moto delle due masse ha la stessa direzione)

le soluzioni sono:

$$\begin{cases} v_1' = v \\ v_2' = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v_1' = 0 \\ v_2' = v \end{cases}$$

dove la prima si riferisce alla situazione iniziale (come se le 2 masse non si fossero scontrate), mentre la seconda prevede l'urto dove, avendo la stessa massa, la particella urtante si ferma e l'altra acquisisce la sua velocità.

Esercizio 4:

a)

In assenza di forze dissipative le reazioni vincolari compiono lavoro nullo; dal punto di vista dell'energia meccanica, il disco può dunque essere trattato come se fosse soggetto solamente alla forza peso.
La perdita di energia potenziale per la caduta di un tratto L si converte dunque tutta quanta in energia cinetica calcolabile mediante il teorema di Koenig, cioè:

$$MgL = \frac{1}{2}M{v_{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

dove I_{cm} è il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione passante per il centro di massa, dato da

$$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2 \quad \text{e}$$

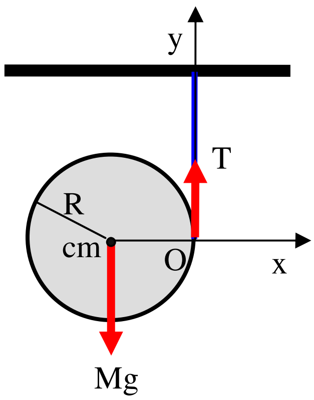
$$\omega = \frac{v_{cm}}{R}$$

per cui si ottiene

$$MgL = \frac{1}{2}M{v_{cm}}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}M{v_{cm}}^2 + \frac{1}{4}MR^2\frac{{v_{cm}}^2}{R^2} = \frac{3}{4}M{v_{cm}}^2$$

da cui $v_{cm} = \sqrt{\dfrac{4gl}{3}}$ o equivalentemente $\omega = \sqrt{\dfrac{4gl}{3R^2}}$

b)



Applichiamo la seconda equazione cardinale della dinamica prendendo come origine il punto O della figura a lato in modo da rendere nullo il momento della forza della tensione del filo della quale non conosciamo il valore:

$$\vec{M}_O = I_O\vec{\alpha}$$

dove $I_O = I_{cm} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

e $\vec{M}_O = -R\,\hat{i} \times -Mg\,\hat{j} = RMg\,\hat{k}$ da cui

$\vec{\alpha} = \dfrac{2g}{3R}\hat{k}$ o se vogliamo l'accelerazione del cm $|\vec{a}_{cm}| = |\vec{\alpha}|R = \dfrac{2g}{3}$

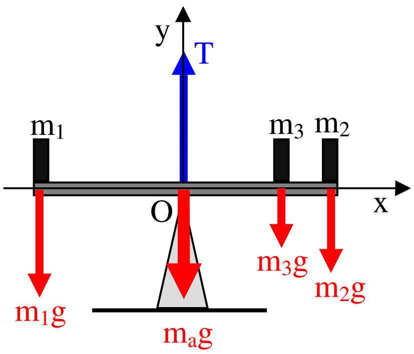
c)

Dalla prima equazione cardinale della dinamica si ottiene,

$\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$ con $\vec{F}$ risultante delle forze esterne → $-Mg + T = -Ma_{cm}$, dove sono stati omessi i simboli di vettori poiché tutto è diretto lungo l'asse y (a_{cm} ha segno negativo perchè opposto all'asse y), da cui si ottiene

$$T = M\left(-a_{cm} + g\right) = Mg\left(-\frac{2}{3}+1\right) = \frac{1}{3}Mg$$

Esercizio 5:



a)

Perché la condizione di equilibrio sia soddisfatta, occorre che sia la risultante delle forze che il momento risultante siano nulli (equazioni cardinali della statica).
Si prenda un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, con l'asse *x* diretto lungo l'asta con il verso positivo verso destra, asse *y* verticale e *z* uscente dal foglio.
Il momento risultante, calcolato rispetto al perno dell'altalena, è il seguente:

$$\vec{M} = -L\hat{i}\times -m_1 g\,\hat{j} + \frac{2}{3}L\hat{i}\times -m_3 g\,\hat{j} + L\hat{i}\times -m_2 g\,\hat{j} = m_1 gL\hat{k} - \frac{2}{3}m_3 gL\hat{k} - m_2 gL\hat{k} = 0$$

da cui

$$m_1 - \frac{2}{3}m_3 - m_2 = 0 \;\rightarrow\; m_3 = \frac{3}{2}\left(m_1 - m_2\right) = 12\;Kg$$

b)

Imponendo che la risultante delle forze sia nulla (prendendo come verso positivo delle forze quello verso l'altro) si ottiene:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0 \quad\rightarrow\quad T - \left(m_1 + m_2 + m_3 + m_a\right) g = 0 \quad\rightarrow\quad T = 1511\,N$$

c)

Il sistema è composto dall'asta e dai tre bambini (assimilabili a punti materiali) in posizione –L, 2/3 L ed L lungo l'asta. Il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per O è dato da:

$$I_{tot} = I_{asta} + I_{m_1} + I_{m_2} + I_{m_3}$$

dove $I_{asta} = \frac{1}{12}m_a\left(2L\right)^2 = \frac{1}{3}m_a L^2$ $\quad I_{m_1} = m_1 L^2$ $\quad I_{m_2} = m_2 L^2$ $\quad I_{m_3} = m_3\left(\frac{2L}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}m_3 L^2$

: da cui

$$I_{tot} = \frac{1}{3} m_a L^2 + m_1 L^2 + m_2 L^2 + \frac{4}{9} m_3 L^2 = \left(\frac{1}{3} m_a + m_1 + m_2 + \frac{4}{9} m_3 \right) L^2 = \left(\frac{1}{3} 100 + 25 + 17 + \frac{4}{9} 12 \right) 1.5^2 = 181.5\ kgm^2$$

d)

Il centro di massa giace sull'asse x

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{-m_1 L + m_2 L}{m_1 + m_2 + m_a} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m_a} L = -\frac{8}{142} 1.5 = -0.085\ m$$