FISICA GENERALE T-A 11 gennaio 2013 prof. spighi (CdL ingegneria Energetica)

1) Un satellite artificiale di massa *m* percorre orbite circolari di raggio *R* attorno alla luna di massa *M*. Supponendo che il raggio dell'orbita *R* coincida con il raggio della luna determinare:

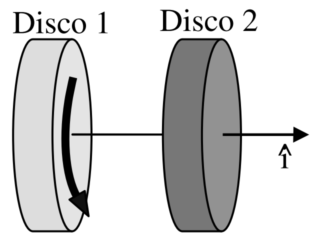
a) il periodo di rivoluzione *T* del satellite.

Assumendo la Luna come un sistema sferico con la massa distribuita uniformemente, determinare:

b) la densità media ρ della Luna.

Dati: $G = 6.6\times10^{-11}\ m^3 / kg \cdot s^2$, $M = 7.3\times10^{22}\ kg$, $R = 1738\ km$.

2) Due dischi hanno momenti d'inerzia I_1 e I_2 rispetto allo stesso asse fisso orizzontale coincidente con l'asse di simmetria ad essi perpendicolare. Inizialmente il disco 2 è fermo, mentre il disco 1 ruota intorno all'asse di simmetria con velocità angolare $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \hat{i}$. Ad un certo istante i due dischi vengono a contatto e, a causa dell'attrito tra le due superfici, assumono la stessa velocità angolare $\vec{\omega}_f = \omega_f \hat{i}$. Determinare:

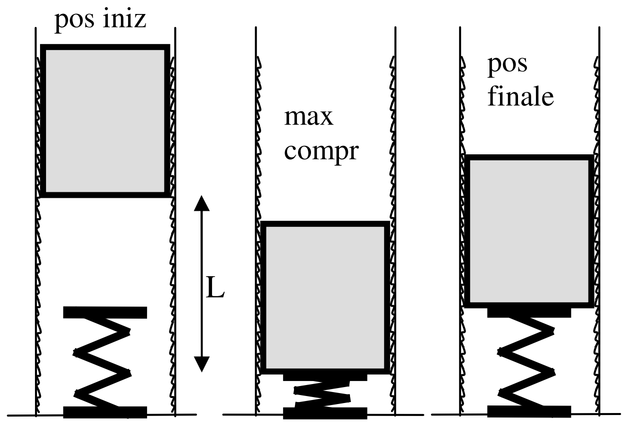


a) il modulo di $\vec{\omega}_f$;

b) l'energia dissipata ΔE.

Dati: $I_1 = 1\ kg\,m^2$, $I_2 = 9\ kg\,m^2$, $|\vec{\omega}_1| = 1\ rad/s$

3) Un ascensore di massa *M* è fermo al primo piano di un condominio. Ad un certo istante il cavo si spezza e la cabina cade lungo le sue guide verso la sottostante molla ammortizzatrice di costante elastica *K*, che l'ascensore comprime percorrendo in totale, all'istante di massima compressione della molla, un tratto verticale lungo *L*. Un dispositivo di sicurezza agisce da freno sulle guide, in modo che esse sviluppino, in caso di emergenza, una forza d'attrito costante di modulo F_a sia in salita che in discesa. Rimbalzando, l'ascensore ritorna ad un'altezza in cui la molla ha riacquistato la sua lunghezza a riposo. Determinare:



a) la massima compressione Δx della molla;

b) l'espressione del modulo della forza F_a (in funzione di L, Δx e *M*).

4) Dato il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left[3x^2 y\hat{i} + \left(x^3 + 4yz^2\right)\hat{j} + 4y^2 z\hat{k}\right]$, determinare:

a) le dimensioni fisiche della costante α;

b) se il campo è conservativo e nel caso calcolare l'energia potenziale in un punto P(x,y,z);

c) il lavoro compiuto dalla forza quando sposta il punto di applicazione da R(0,0,0) a S(1,1,1).

5) Due punti materiali di masse m_1 e m_2 scivolano l'uno verso l'altro su un piano orizzontale liscio con velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Ad un certo istante, urtandosi, essi rimangono attaccati per mezzo di un piccolo gancio. Determinare:

a) il vettore velocità $\vec{v}_F$ assunta dal sistema dopo l'urto;

b) l'energia ΔE persa nell'urto.

Dati: $m_1 = 1\ kg$, $m_2 = 2\ kg$, $\vec{v}_1 = 1\hat{i}\ m/s$, $\vec{v}_2 = -1\hat{i}\ m/s$

6) Enunciare e illustrare il significato dei teoremi sul centro di massa.

Soluzioni compito:

Esercizio 1:

a)

Poichè possiamo considerare la luna come un punto materiale collocato nel centro del pianeta e nel quale sia concentrata tutta la sua massa *M*, dal secondo principio della dinamica si ha che la forza gravitazionale esercitata dalla Luna sul satellite di massa *m*, produce la forza centripeta che mantiene il satellite artificiale sulla sua orbita circolare di raggio *R,* secondo la relazione

$$G\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R \quad \rightarrow \quad G\frac{mM}{R^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \quad \rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM} \quad \rightarrow$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (1738\times10^3)^3}{6.6\times10^{-11}\ 7.3\times10^{22}}} = \sqrt{4.3\times10^7} = 6557\ s \quad \rightarrow \quad \text{1h 49' 17''}$$

b)

Dato che la luna é supposta a simmetria sferica, la densità media ρ é data da:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3\bullet 7.3\times10^{22}}{4\pi(1738\times10^3)^3} = 0.33\times10^4 = 3.3\times10^3\ kg/m^3$$

Sapendo che la densità media della terra é $\rho_{TERRA} = 5.5\times10^3\ kg/m^3$ si ricava che la luna ha una densità media pari a circa il 64% di quella terrestre.

Esercizio 2

a)

Poichè il sistema non é soggetto ad alcuna forza esterna (o meglio la risultante delle forze esterne è nulla), il sistema conserva il momento della quantità di moto:

$\vec{K}_{ini} = \vec{K}_{fin}$ tra l'istante iniziale e quello finale → $I_1\vec{\omega}_1 = (I_1 + I_2)\vec{\omega}_f$ dove entrambi i vettori $\vec{\omega}$ sono diretti lungo la retta $\hat{i}$ e possiamo dunque omettere la notazione vettoriale. Dunque:

$$\omega_f = \frac{I_1}{(I_1 + I_2)}\omega_1 = \frac{1}{10}\ rad/s$$

b)

L'urto tra i due dischi può essere schematizzato come un urto completamente anelastico dove si perde dunque una parte dell'energia.

$\Delta E = E_{ini} - E_{fin}$ dove

$$E_{ini} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 \quad \text{e} \quad E_{fin} = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_f^{\,2} = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\frac{I_1^{\,2}}{(I_1 + I_2)^2}\omega_1^{\,2} = \frac{1}{2}\frac{I_1^{\,2}}{(I_1 + I_2)}\omega_1^{\,2} \quad \text{da cui}$$

$$\Delta E = E_{ini} - E_{fin} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2} \frac{I_1^2}{(I_1 + I_2)} \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \left(1 - \frac{I_1}{I_1 + I_2} \right) = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \left(\frac{I_2}{I_1 + I_2} \right) = \frac{9}{20} J$$

Dove si vede che ΔE é positivo (cioé c'é più energia all'inizio che alla fine) come atteso.

Esercizio 3:

a)

Applichiamo il teorema delle forze vive:

$L_{Ftot} = T_{Fin} - T_{in}$ dove

L_{Ftot} é il lavoro di tutte le forze che agiscono sull'ascensore e $T_{in} (T_{Fin})$ é l'energia cinetica nello stato iniziale (finale), dove per stato iniziale (finale) si intende l'ascensore fermo ad una quota L (l'ascensore fermo ad altezza zero e la molla completamente compressa).

Sull'ascensore agiscono 3 forze: la forza di gravità, la forza di attrito delle guide F_a e la forza della molla.

Essendo l'ascensore fermo sia nell'istante iniziale che in quello finale →

$T_{Fin} = T_{in} = 0$

mentre

$$L_{Ftot} = \vec{F}_g \bullet \vec{L} + \vec{F}_a \bullet \vec{L} + \int_0^{\Delta x} \vec{F}_m \bullet d\vec{x} = (Mg - F_a)L - \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$$

Sostituendo nel teorema delle forze vive si ottiene:

$$(Mg - F_a)L - \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta x = \sqrt{\frac{2(Mg - F_a)}{k} L}$$

b)

Applichiamo il "teorema delle forze vive" per le sole forze non conservative che assume la forma:

$L_{Fnc} = E_{Fin} - E_{in}$ dove

L_{Fnc} é il lavoro delle sole forze non conservative che agiscono sull'ascensore (in questo caso la sola forza di attrito delle guide) e $E_{in} (E_{Fin})$ é l'energia meccanica nello stato iniziale (finale), dove per stato iniziale (finale) si intende l'ascensore fermo alla quota di partenza L (l'ascensore fermo ad altezza Δx e la molla in condizione di riposo).

$$E_{Fin} = Mg\, \Delta x$$

$$E_{in} = Mg\, L$$

$$L_{Fnc} = \vec{F}_a \bullet \vec{L} + \vec{F}_a \bullet \Delta\vec{x} = -F_a L - F_a \Delta x = -F_a (L + \Delta x)$$

Dunque sostituendo a $L_{Fnc} = E_{Fin} - E_{in}$ si ottiene:

$$-F_a (L + \Delta x) = Mg\, \Delta x - MgL \quad \rightarrow \quad F_a = \frac{Mg(L - \Delta x)}{(L + \Delta x)}$$

Esercizio 4:

a)

La costante α ha le seguenti dimensioni fisiche:

$[\alpha] = [F]/[L^3]=[M][L^{-2}][T^{-2}]$ e unità di misura N/m^3 oppure $Kg/(m^2s^2)$.

b)

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine O(0,0,0) ed un punto generico C(x,y,z)

$$L_{OP} = \int_{000}^{x00} F_x\,dx + \int_{x00}^{xy0} F_y\,dy + \int_{xy0}^{xyz} F_z\,dz =$$

$$L_{OP} = -\alpha\left[\int_{000}^{x00} 3x^2y\,dx + \int_{x00}^{xy0}\left(x^3+4yz^2\right)dy + \int_{xy0}^{xyz} 4y^2z\,dz\right] =$$

$$= -\alpha\left\{\left[x^3y\right]_{x00}^{xy0} + \left[2y^2z^2\right]_{xy0}^{xyz}\right\} = -\alpha\left(x^3y+2y^2z^2\right)$$

dunque $L_{OP} = V(0,0,0) - V(x,y,z) = -\alpha\left(x^3y+2y^2z^2\right)$

da cui segue l'energia potenziale $V(x,y,z) = \alpha\left(x^3y+2y^2z^2\right)$

c)

Il lavoro tra il punto R(0,0,0) a S(1,1,1) è dato da:

$$L_{RS} = V(R) - V(S) = V(0,0,0) - V(1,1,1) = 0 - 3\alpha = -3\alpha$$

Esercizio 5:

a)

L'urto é schematizzabile come un urto perfettamente anelastico. Imponendo la conservazione della quantità di moto nell'urto si ottiene:

$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}_F \quad \rightarrow \quad \vec{v}_F = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$ e sostituendo i valori si ottiene:

$$\vec{v}_F = \frac{\hat{i}-2\hat{i}}{3} = -\frac{\hat{i}}{3}$$

b)

L'energia meccanica non si conserva durante l'urto, in particolare

$$E_{INI} = E_{FIN} + \Delta E \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2{}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_F{}^2 + \Delta E$$

dove ΔE è l'energia persa durante l'urto.

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2{}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_F{}^2 = \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{9} = \frac{4}{3}\,J = 1.33\,J$$