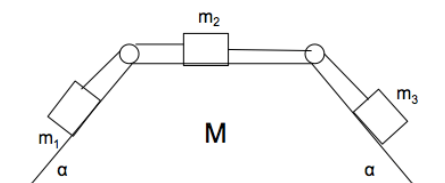


FISICA GENERALE T-A scritto del 14/1/2014
prof. Spighi (CdL ingegneria Energetica)

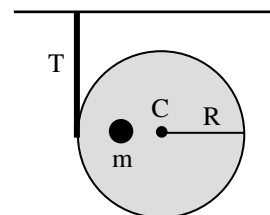
- 1) Dato il campo di forze $\vec{F}(x, y, z) = \alpha \left[(y^2 - x^2) \hat{i} + 3xy \hat{j} \right]$ determinare nel caso $\alpha = 1$, il lavoro fatto per spostare un punto materiale dall'origine $O(0,0)$ del sistema di riferimento XY , al punto $A(2,2)$ lungo un percorso che parte dall'origine, si sposta
- lungo l'asse X fino al punto $B(2,0)$ e poi parallelo all'asse Y fino al punto $A(2,2)$;
 - lungo l'asse Y fino al punto $B(0,2)$ e poi parallelo all'asse X fino al punto $A(2,2)$;
 - giustificare il risultato ottenuto.

- 2) Un blocco di massa $M = 50$ kg con sezione a forma di trapezio isoscele è appoggiato su una superficie orizzontale liscia. L'inclinazione rispetto all'orizzontale dei lati obliqui è 45° . A contatto del blocco si trovano posizionati come in figura tre corpi di masse $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg e m_3 collegati tra loro da due fili inestensibili di massa trascurabile e da due carrucole ideali. Supponendo che non vi sia attrito tra i tre corpi ed il blocco, si calcoli il valore di m_3 affinché i tre corpi siano in equilibrio:



- nel caso il blocco M sia saldato alla superficie orizzontale di appoggio;
- nel caso in cui il blocco M si muova verso destra a velocità costante v sulla superficie di appoggio. Se il blocco M inizia a muoversi verso destra con accelerazione $A = g/2$, si determini
- l'accelerazione delle tre masse, supponendo $m_3 = 1$ kg.

- 3) Un disco omogeneo di massa $M = 2$ kg e raggio $R = 0.2$ m è inchiodato nel suo centro C ad una parete verticale; ad una sua estremità è fissato al soffitto con una corda T (inestensibile e di massa trascurabile) e ad una distanza di $R/2$ dal centro è incollato un oggetto puntiforme di massa $m = M/2$ (vedi figura). Nell'ipotesi che il sistema sia in equilibrio, determinare:



- il momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse perpendicolare al disco e passante per C ;
- la reazione vincolare V esercitata dal chiodo;
- la tensione della corda T .

Ad un certo istante la corda si rompe, determinare

- l'accelerazione angolare del sistema

Il momento d'inerzia di un disco di massa M e raggio R rispetto a un asse perpendicolare a esso e passante per il suo centro

di massa è $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$

- 4) Un disco inizialmente fermo viene fatto ruotare con accelerazione angolare costante $\alpha_1 = 1$ rad/s². Dopo 10 s l'accelerazione angolare cessa e il disco ruota con velocità angolare costante per altri 10 s. Infine il disco decelera costantemente per altri 10 s fino a fermarsi. Si determini:

- la decelerazione angolare durante la fase di frenata;
- quanti giri completi compie il disco complessivamente;
- la velocità angolare media.

- 5) Enunciare, spiegare e eventualmente dimostrare il teorema delle forze vive.

SOLUZIONI

EX 1

Innanzitutto vediamo se il campo é conservativo e per verificarlo calcolo il rotore della forza. Imponendo che il rotore sia nullo ottengo la condizione sulle costanti che rendono il campo di forze conservativo.

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \alpha(y^2 - x^2) & 3\alpha xy & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \hat{i} \left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(3\alpha xy)}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(\alpha(y^2 - x^2))}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial(3\alpha xy)}{\partial x} - \frac{\partial(\alpha(y^2 - x^2))}{\partial y} \right) = \\ &= \hat{i}(0 - 0) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(3\alpha y - 2\alpha y) = \hat{k}(\alpha y) \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = \vec{0} \iff \alpha = 0\end{aligned}$$

Dunque il campo di forze non é conservativo e mi aspetto che il lavoro lungo due percorsi diversi dia un differente risultato.

a)

$$\begin{aligned}L_{AB} &= \int_{0,0}^{x,y} \vec{F} d\vec{s} = \int_{0,0}^{2,0} F_x dx + \int_{2,0}^{2,2} F_y dy = \int_{0,0}^{2,0} \alpha(y^2 - x^2) dx + \int_{2,0}^{2,2} 3\alpha xy dy = \\ &= \left[\alpha \left(y^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \right]_{0,0}^{2,0} + \left[3\alpha x \frac{y^2}{2} \right]_{2,0}^{2,2} = \left[-\alpha \frac{x^3}{3} \right]_{0,0}^{2,0} + \left[3\alpha x \frac{y^2}{2} \right]_{2,0}^{2,2} = -\alpha \frac{8}{3} + 12\alpha = \frac{28}{3} \alpha\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}L_{AB} &= \int_{0,0}^{x,y} \vec{F} d\vec{s} = \int_{0,0}^{0,2} F_y dy + \int_{0,2}^{2,2} F_x dx = \int_{0,0}^{0,2} 3\alpha xy dy + \int_{0,2}^{2,2} \alpha(y^2 - x^2) dx = \\ &= \left[3\alpha x \frac{y^2}{2} \right]_{0,0}^{0,2} + \left[\alpha \left(y^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \right]_{0,2}^{2,2} = \left[\alpha \left(y^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \right]_{0,2}^{2,2} = \alpha \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{16}{3} \alpha\end{aligned}$$

c) il lavoro lungo i due percorsi é diverso, nonostante gli estremi siano gli stessi, poiché il campo non é conservativo.

EX 2

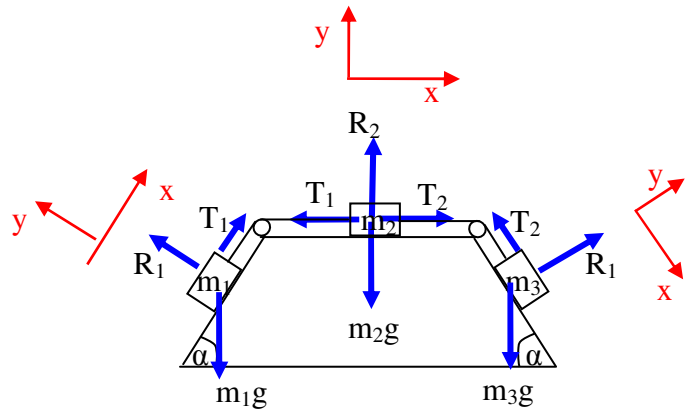
a) Il sistema é fermo dunque si tratta di scrivere la $\vec{F} = m\vec{a}$ per i tre corpi e imporre che l'accelerazione sia nulla. Prendiamo l'asse x lungo la direzione dei lati del trapezio con verso come in figura e scriviamo le forze che agiscono su ogni corpo. Per rispondere alle domande é sufficiente scrivere la $\vec{F} = m\vec{a}$

lungo la direzione x

$$m_1 \rightarrow -m_1 g \sin \alpha + T_1 = 0$$

$$m_2 \rightarrow -T_1 + T_2 = 0$$

$$m_3 \rightarrow m_3 g \sin \alpha - T_2 = 0$$



Questo é un sistema in tre equazioni e tre incognite (T_1 , T_2 e m_3) e risolvendo si trova

$$m_3 = m_1 = 1 \text{ kg}$$

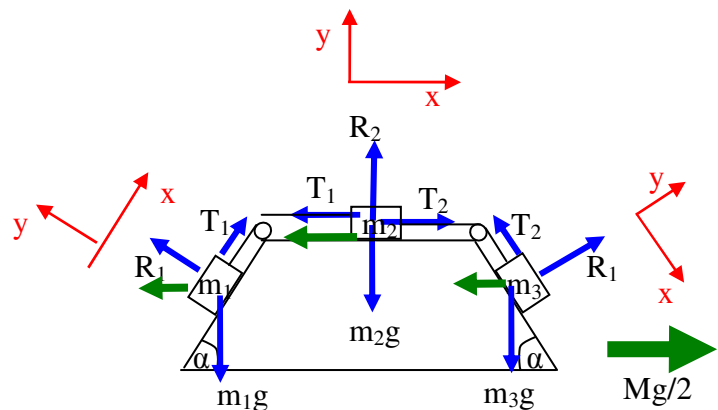
b)

La soluzione é esattamente come nel caso a) poiché in un moto rettilineo uniforme non si genera alcuna forza apparente (o fittizia che dir si voglia).

c)

Il blocco viaggia verso destra con un'accelerazione pari a $g/2$ dunque il sistema non é più inerziale e su ogni corpo si esercita una forza F_i (con $i = 1, 2, 3$ relativo alle masse m_1, m_2, m_3) pari alla massa del corpo per l'accelerazione del blocco (con segno opposto) verso sinistra (vedi figura).

Il sistema non é più in equilibrio dunque scriveremo la seconda legge della dinamica per tutti i corpi (anche in questo caso é sufficiente lungo la direzione x).



$$m_1 \rightarrow -m_1 g \sin \alpha + T_1 - F_1 \cos \alpha = -m_1 a$$

$$m_2 \rightarrow -T_1 + T_2 - F_2 = -m_2 a$$

$$m_3 \rightarrow m_3 g \sin \alpha - T_2 - F_3 \cos \alpha = -m_3 a$$

dove

$$F_1 = m_1 \frac{g}{2}, \quad F_2 = m_2 \frac{g}{2} \quad \text{e} \quad F_3 = m_3 \frac{g}{2}$$

Dunque sostituendo

$$-m_1 g \sin \alpha + T_1 - m_1 \frac{g}{2} \cos \alpha = -m_1 a$$

$$-T_1 + T_2 - m_2 \frac{g}{2} = -m_2 a$$

$$m_3 g \sin \alpha - T_2 - m_3 \frac{g}{2} \cos \alpha = -m_3 a$$

Anche questo é un sistema in tre equazioni in tre incognite (T_1 , T_2 e a), che risolto rispetto all'accelerazione del sistema dà:

$$|\vec{a}| = \frac{g \left(\frac{m_1 \cos \alpha}{2} + m_1 \sin \alpha + \frac{m_2}{2} - m_3 \sin \alpha + \frac{m_3 \cos \alpha}{2} \right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

(la direzione ed il verso dell'accelerazione é ovviamente quella del moto).

Sostituendo si ottiene:

$$|\vec{a}| = \frac{\frac{g\sqrt{2}}{4} \left(3m_1 + \sqrt{2}m_2 + \frac{m_2}{2} - m_3 \right)}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\frac{g\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{2})}{4} = 0.43 \text{ g}$$

Osservazione 1: nel caso l'accelerazione a' del blocco fosse stata maggiore, il corpo m_1 si sarebbe potuto staccare dalla superficie del trapezio e la soluzione proposta non sarebbe più corretta.

L'accelerazione massima possibile del blocco affinché m_1 non si stacchi si può ricavare dalla

$F_y = m_1 a_y$ lungo la direzione y

$$m_1 (y) \rightarrow -m_1 g \cos \alpha + m_1 a' \sin \alpha + R_1 = m_1 a_y$$

Imponendo sia $a_y=0$ che $R_1=0$ (al limite il corpo non tocca il trapezio) si ottiene

$$a' \leq g \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \leq g$$

come era nel testo.

Osservazione 2 : si poteva pensare (erroneamente) che per il terzo principio della dinamica, su ogni

massa m_1, m_2 e m_3 agisse una forza uguale per tutti e tre i corpi data da $F = -\frac{Mg}{2}$

Questo non é vero poiché il terzo principio si riferisce a forze reali tra corpi, mentre qui siamo in presenza di forze apparenti.

EX 3

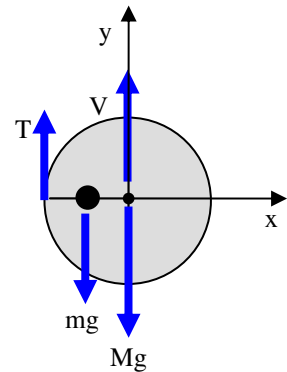
a)

Il sistema é composto dal disco e dalla massa puntiforme, dunque il momento d'inerzia del sistema é dato da:

$$I_s = I_D + I_m = \frac{1}{2} MR^2 + m \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} MR^2 + m \frac{R^2}{4} = \frac{1}{2} MR^2 + \frac{M}{2} \frac{R^2}{4} = \frac{5}{8} MR^2 = 0.05 \text{ kg m}^2$$

b,c)

Imponiamo le condizioni di equilibrio sul sistema cioè la sommatoria delle forze e dei momenti delle forze deve essere nulla. Prendiamo un sistema di riferimento come in figura con l'asse z uscente dal foglio e partente dal centro del disco: tutte le forze hanno direzione verticale, mentre i momenti delle forze (a cui contribuiscono solo T e mg) sono lungo z.



$$\begin{cases} T - Mg - mg + V = 0 \\ -RT + mg \frac{R}{2} = 0 \end{cases}$$

Questo é un sistema in due incognite (T,V) e due equazioni che risolto dà:

$$\begin{cases} V = g \left(M + \frac{m}{2} \right) = \frac{5gM}{4} = 24.5 \text{ N} \\ T = \frac{mg}{2} = \frac{g}{2} = 4.9 \text{ N} \end{cases}$$

d)

Utilizziamo la seconda equazione cardinale della meccanica

$$\vec{M} = I\vec{\alpha}$$

nel momento in cui la corda si spezza il momento della forza $\vec{M}$ é dato dall'unica forza dovuta al peso della massa m.

$$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g} = \vec{r} \times \frac{M}{2} \vec{g} = \frac{RMg}{4} \hat{k}$$

mentre il momento di inerzia é già stato calcolato nel punto a)

$$I_s = I_D + I_m = \frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}MR^2$$

dunque sostituendo in $\vec{M} = I\vec{\alpha}$

$$\frac{RMg}{4} \hat{k} = \left(\frac{5}{8}MR^2 \right) \vec{\alpha}$$

da cui si ottiene

$$\vec{\alpha} = \frac{2g}{5R} \hat{k} = 19.6 \text{ rad} / \text{s}^2$$

EX 4

a,b)

Siamo in presenza di un moto circolare, in particolare:

- prima fase $\rightarrow$ moto circolare uniformemente accelerato con accelerazione costante $\alpha_1=1$ rad/s² della durata di 10 s;
- seconda fase $\rightarrow$ moto circolare uniforme della durata di 10 s;
- terza fase $\rightarrow$ moto circolare uniformemente decelerato della durata di 10 s.

Scriviamo le equazioni che legano l'angolo percorso, la velocità angolare e l'accelerazione angolare per le varie fasi:

$$\text{Prima fase} \rightarrow \vartheta_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 = 50 \text{ rad}$$

dove θ_1 é l'angolo coperto in questa prima fase.

La velocità angolare alla fine della durata di questa fase é

$$\omega_1 = \alpha_1 t_1 = 10 \text{ rad / s}$$

Seconda fase $\rightarrow$

$$\vartheta_2 = \omega_1 t_1 = 100 \text{ rad} \quad \omega_2 = \omega_1 = 10 \text{ rad / s}$$

Terza fase $\rightarrow$

$$\vartheta_3 = \omega_2 t_3 - \frac{1}{2} \alpha_3 t_3^2$$

Per calcolare θ_3 bisogna prima determinare α_3 e per questo scriviamo la relazione tra la velocità angolare e l'accelerazione angolare

$$\omega_{fin} = \omega_{in} - \alpha_3 t_3 = \omega_2 - \alpha_3 t_3$$

imponendo che la ω_{fin} sia nulla , si ricava:

$$\omega_2 - \alpha_3 t_3 = 0 \rightarrow \alpha_3 = \frac{\omega_2}{t_3} = 1 \text{ rad / s}^2$$

Questo risultato era comprensibile anche senza fare calcoli poiché si tratta di un moto totalmente simmetrico dunque la decelerazione della fase 3 deve essere uguale (in modulo) all'accelerazione della fase 1.

A questo punto

$$\vartheta_3 = \omega_2 t_3 - \frac{1}{2} \alpha_3 t_3^2 = 50 \text{ rad}$$

Pertanto il numero di giri percorso é dato da:

$$n = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3}{2\pi} = 31.8$$

c) La velocità angolare media é data da:

$$\langle \omega \rangle = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3}{t_1 + t_2 + t_3} = 6.67 \text{ rad / s}$$