

Compito A

- 1) Un corpo di massa $m_1=1\text{kg}$ è in moto lungo l'asse x con una velocità $u_1=1\text{ m/s}$; ad un certo istante è urtato elasticamente da un altro corpo di massa m_2 che procede nello stesso verso con velocità $u_2=4\text{ m/s}$. Nell'ipotesi in cui si abbia il massimo trasferimento di energia cinetica al corpo urtato, calcolare:

- la massa del corpo m_2 ;
- la velocità dopo l'urto dei 2 corpi;

Nell'ipotesi in cui l'urto sia invece anelastico e che la velocità finale sia $v=2\text{ m/s}$, determinare:

- la massa del corpo m_2 .

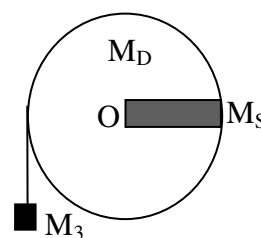
- 2) Un sistema è formato da un disco di raggio r e massa M_D sulla cui superficie è incollata una sbarra di lunghezza r e massa M_S . Il sistema è fissato ad un piano verticale mediante un chiodo passante per il suo centro ed è libero di ruotare attorno ad esso. Attorno al disco è arrotolata una corda inestensibile e di massa trascurabile al cui estremo è appesa una massa puntiforme M_3 . Nell'ipotesi che il sistema sia in condizioni statiche con la sbarra in posizione orizzontale (figura), determinare:

- la massa M_3 ;
- la reazione del vincolo sul chiodo.

Ad un certo istante ($t=0$) la corda viene tagliata, determinare:

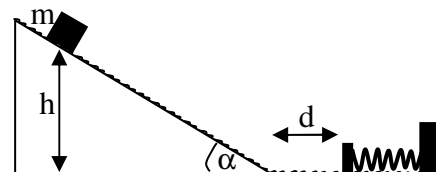
- l'accelerazione angolare del sistema a $t=0$.

Si risolva l'esercizio utilizzando i seguenti valori: $M_D = 4\text{ kg}$, $M_S = 2\text{ kg}$ e $r = 1\text{ m}$.



- 3) Un corpo di massa $m=1\text{ kg}$ inizialmente fermo ad un'altezza $h=1\text{ m}$ scende da un piano inclinato di $\alpha=30^\circ$ scabro e successivamente percorre un tratto rettilineo infinitamente lungo e anch'esso scabro fino ad incontrare dopo una distanza $d=1\text{ m}$ una molla fissata al terreno di costante elastica $k=100\text{ N/m}$ (vedi figura). Nell'ipotesi che i due tratti scabri abbiano coefficiente di attrito dinamico $\mu_D=0.2$, determinare:

- la velocità del corpo alla fine del piano inclinato;
- la massima compressione della molla.



- 4) Dato il campo di forze $\vec{F}(\vec{r}) = (2\alpha xz^2 - \beta y)\hat{i} - \beta x\hat{j} + 2\alpha x^2 z\hat{k}$ determinare:
- le dimensioni fisiche delle costanti α e β ;
 - stabilire se il campo di forze è conservativo e calcolarne eventualmente l'energia potenziale;
 - trovare il lavoro compiuto dalla forza quando sposta il suo punto di applicazione dal punto A di coordinate cartesiane $(0,0,0)$ al punto B di coordinate $(2,2,2)$.

- 5) Su un disco orizzontale di massa $M=4\text{ kg}$ e raggio $R=1\text{ m}$ e che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}=2\hat{k}\text{ rad/s}$, è appoggiato un corpo puntiforme di massa $m=1\text{ kg}$. Nell'ipotesi che tra il disco ed il corpo ci sia un attrito statico con coefficiente massimo $\mu_s=0.2$, determinare, rispetto ad un asse passante per il centro del disco:

- la distanza minima alla quale il corpo inizierà a strisciare;
- l'energia cinetica del sistema quando il corpo inizia a strisciare.

- 6) Enunciare e discutere il terzo principio della dinamica.

I momenti d'inerzia di un disco di raggio r e di una sbarra lunga l rispetto ai loro cm sono $\frac{mr^2}{2}$ e $\frac{ml^2}{12}$

Soluzioni compito A:

Esercizio 1:

a,b) Il massimo trasferimento di energia cinetica lo si ha quando il corpo che urta si ferma dopo l'urto, così la sua energia cinetica (sempre dopo l'urto) risulta uguale a zero e si è totalmente trasferita al corpo urtato. Essendo un urto elastico si conserva sia la quantità di moto che l'energia cinetica del sistema. Indichiamo con u la velocità prima dell'urto (come nel testo) e con v quella dopo l'urto (con i pedici 1 e 2 per indicare i due corpi) e non ricorriamo alla notazione vettoriale in quanto tutte le velocità hanno la stessa direzione:

$$\begin{cases} \vec{Q}_{in} = \vec{Q}_{fin} \\ T_{in} = T_{fin} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 \\ \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} v_1 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1} \\ \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1} \right)^2 \end{cases}$$

Questo è un sistema di 2 equazioni in 2 incognite (m_2 e v_1) e dopo qualche calcolo si ottiene:

$$\begin{cases} m_2 = m_1 \frac{u_2 - 2u_1}{u_2} \\ v_1 = u_2 - u_1 \end{cases} \quad \text{inserendo i valori numerici} \quad \begin{cases} m_2 = 0.5 \, \text{kg} \\ v_1 = 3 \, \text{m/s} \end{cases}$$

c) Nel caso di urto anelastico, i due corpi dopo l'urto formano un unico corpo e procedono insieme. In questo tipo di urto si conserva solo la quantità di moto del sistema, dunque

$$\vec{Q}_{in} = \vec{Q}_{fin} \rightarrow m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) v \quad \text{da cui si ricava l'unica incognita del problema } (m_2)$$

$$m_2 = m_1 \frac{v - u_1}{u_2 - v} = 0.5 \, \text{kg}$$

Esercizio 2:

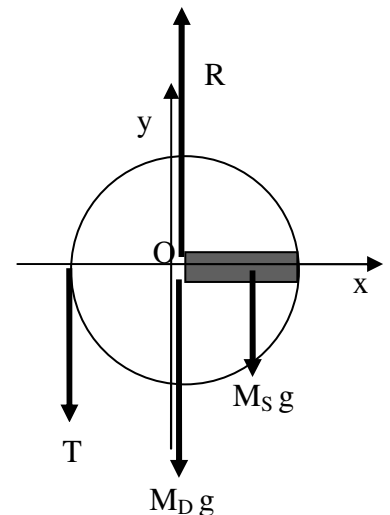
a) Scegliamo un sistema di riferimento come mostrato in figura (con l'asse z uscente dal foglio verso l'alto). Le forze che agiscono sul sistema formato dal disco e dalla sbarra sono: il peso del disco $M_D \vec{g}$, il peso della sbarra $M_S \vec{g}$, la Tensione $\vec{T}$ del filo dovuta al peso della massa M_3 e la reazione del vincolo sul chiodo $\vec{R}$, applicati come mostrato in figura (l'asse y si dovrebbe sovrapporre al vettore $\vec{R}$ e a $M_D \vec{g}$).

Poichè il sistema è in equilibrio statico dobbiamo applicare $\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M} = 0 \end{cases}$

sia sul sistema disco+sbarra che sulla massa M_3 .

$$\text{sistema disco+sbarra} \rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \rightarrow R - T - M_D g - M_S g = 0 \\ \sum \vec{M} = 0 \rightarrow rT - M_S g \frac{r}{2} = 0 \end{cases}$$

dove le forze sono dirette lungo y ed i momenti delle forze lungo z (attenzione a non confondere r che è il raggio con R che è la reazione vincolare sul chiodo). Nell'equazione $\sum \vec{M} = 0$ non sono presenti le forze applicate nell'origine il cui momento è nullo.



Per ottenere il modulo della tensione della corda T applichiamo, come anticipato, la condizione di staticità sulla massa M_3 :

$$\text{massa puntiforme } M_3 \rightarrow \left\{ \sum \vec{F} = 0 \rightarrow T - M_3 g = 0 \Rightarrow T = M_3 g \right.$$

dove non ha senso imporre la sommatoria del momento delle forze $=0$ in quanto la massa M_3 è puntiforme.

Da quest'ultima relazione si ricava che $T = M_3 g$ che sostituendola a $\sum \vec{M} = 0$ del sistema disco+sbarra si

$$\text{ottiene: } rT - M_s g \frac{r}{2} \rightarrow rM_3 g - M_s g \frac{r}{2} = 0 \rightarrow M_3 = \frac{1}{2} M_s = 1 \text{ kg}$$

b) Per la determinazione la reazione del vincolo $\vec{R}$ sul chiodo si usa la $\sum \vec{F} = 0$ del sistema disco+sbarra scritta precedentemente e si ottiene:
 $R = T + M_D g + M_s g = M_3 g + M_D g + M_s g = (M_3 + M_D + M_s)g = 68.6 \text{ N}$
 diretta lungo y.

c) Una volta tagliata la corda, il disco comincia a ruotare perchè è sottoposto all'azione della forza peso applicata nel centro della sbarra. Utilizzando la seconda equazione cardinale della meccanica si ottiene:

$$\vec{M} = I_o \vec{\alpha} \quad \text{dove}$$

$$I_o = I_{D,O} + I_{S,O} = \frac{M_D r^2}{2} + \frac{M_s r^2}{12} + M_s \left(\frac{r}{2} \right)^2 = \frac{M_D r^2}{2} + \frac{M_s r^2}{3} = \left(\frac{M_D}{2} + \frac{M_s}{3} \right) r^2 \quad (I_{D,O}, I_{S,O} \text{ sono i}$$

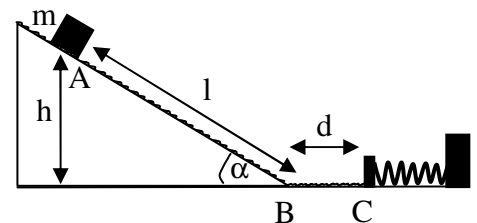
momenti di inerzia del disco e della sbarra rispetto al punto O) e

$$\vec{M} = -\frac{r}{2} M_s g \hat{k} \quad \text{è la risultante del momento della forza.}$$

$$\text{A questo punto } \vec{\alpha} = -\frac{M_s g \frac{r}{2}}{\left(\frac{M_D}{2} + \frac{M_s}{3} \right) r^2} \hat{k} \quad \text{sostituendo i valori } \vec{\alpha} = -3.68 \hat{k} \text{ rad/s}^2$$

Esercizio 3

La soluzione di questo esercizio può essere raggiunta in modi diversi, in particolare utilizzando il teorema delle forze vive oppure utilizzando la seconda legge della dinamica.. Nelle spiegazioni utilizzeremo i punti A, B e C (vedi figura) per indicare rispettivamente il punto iniziale, la fine del piano obliquo ed il punto in cui il corpo tocca la molla (senza comprimerla): il punto dove la molla avrà la massima compressione sarà denotato da $C + \Delta x$. Vediamo entrambi i metodi partendo dal teorema delle forze vive (che è anche il più veloce).



Soluzione domanda a):

TEOREMA delle FORZE VIVE

Le forze che agiscono sul corpo e che compiono lavoro sono la forza di attrito e la componente lungo il moto della forza di gravità:

$$\vec{F}_{ATTR} = -\mu_D R \hat{t} = -\mu_D mg \cos(\alpha) \hat{t}$$

$$\vec{F}_{GR} = mg \sin(\alpha) \hat{t}$$

dove R è la reazione del vincolo e $\hat{t}$ è un versore nella direzione del moto.

Teorema delle forze vive: $L_{TOT} = L_{ATTR} + L_{GR} = T_B - T_A = \frac{1}{2}mv_B^2$ dove:

$$L_{TOT} = L_{ATTR} + L_{GR} = \int_A^B -\mu_D mg \cos(\alpha) \hat{t} \cdot d\vec{l} + \int_A^B mg \sin(\alpha) \hat{t} \cdot d\vec{l} = -\mu_D mg \cos(\alpha) l + mg \sin(\alpha) l =$$

$$= -\mu_D mg \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} h + mgh = mgh \left(1 - \mu_D \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right) \text{ dove abbiamo inserito } l = \frac{h}{\sin(\alpha)}$$

e

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \left(1 - \mu_D \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right)$$

Mettendo insieme le 2 espressioni si ottiene: $v_B = \sqrt{2gh \left(1 - \mu_D \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right)} = 3.58 \text{ m/s}$

Ovviamente si arrivava allo stesso risultato utilizzando la formula del Lavoro delle forze non conservative L_{NC} (ricavabile dal teorema delle forze vive e dal lavoro di forze conservative):

$$L_{NC} = L_{ATTR} = E_B - E_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh \text{ dove (come scritto già sopra)}$$

$$L_{NC} = L_{ATTR} = \int_A^B -\mu_D mg \cos(\alpha) \hat{t} \cdot d\vec{l} = -\mu_D mg \cos(\alpha) l = -\mu_D mg \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} h$$

Da cui segue $-\mu_D mg \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} h = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh$ che risolta dà: $v_B = \sqrt{2gh \left(1 - \mu_D \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right)} = 3.58 \text{ m/s}$

DINAMICA

Alla stessa soluzione si giunge anche attraverso la $\vec{F} = m\vec{a}$ che ci permette di ricavare l'accelerazione che ha il corpo e da qui la sua velocità e posizione. Le forze che agiscono sul corpo nella direzione del moto $\hat{t}$ ed in quella perpendicolare $\hat{n}$ sono:

$$\begin{cases} \hat{t} \rightarrow mg \sin(\alpha) - F_{ATTR} = ma_t \\ \hat{n} \rightarrow -mg \cos(\alpha) + R = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{t} \rightarrow mg \sin(\alpha) - \mu_D mg \cos(\alpha) = ma_t \\ \hat{n} \rightarrow R = mg \cos(\alpha) \end{cases}$$

Da cui si ottiene una accelerazione costante data da $a = g(\sin(\alpha) - \mu_D \cos(\alpha))$

dove è stato omissso il pedice t in quanto l'unica accelerazione esistente è lungo la direzione del moto. Essendo a in modulo costante (moto uniformemente accelerato), l'integrazione per ottenere la velocità è molto semplice:

$$\frac{dv}{dt} = a \rightarrow dv = a dt \rightarrow \int_{v_A}^{v_B} dv = \int_{t_A}^{t_B} a dt = \int_{t_A}^{t_B} g(\sin(\alpha) - \mu_D \cos(\alpha)) dt = g(\sin(\alpha) - \mu_D \cos(\alpha)) \int_{t_A}^{t_B} dt$$

sapendo che all'istante iniziale $t_A = 0$ il corpo è fermo $v_A = 0$ si ottiene:

$$v_B = g(\sin(\alpha) - \mu_D \cos(\alpha))t_B.$$

Per ottenere la velocità alla base del piano v_B bisogna determinare il tempo t_B dalla definizione della velocità:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{dove } x \text{ indica il percorso fatto (nella direzione del moto)} \rightarrow dx = v dt \rightarrow$$

$$\int_A^B dx = \int_{t_A}^{t_B} v dt = \int_{t_A}^{t_B} g(\sin(\alpha) - \mu_D \cos(\alpha)) t dt = g(\sin(\alpha) - \mu_D \cos(\alpha)) \int_{t_A}^{t_B} t dt = g(\sin(\alpha) - \mu_D \cos(\alpha)) \frac{t_B^2}{2}$$

Prendendo un sistema di riferimento con l'origine nella posizione iniziale del corpo si ottiene:

$$l = g(\sin(\alpha) - \mu_D \cos(\alpha)) \frac{t_B^2}{2} \rightarrow t_B = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin(\alpha) - \mu_D \cos(\alpha))}}$$

dove l è il tratto percorso per arrivare alla base del piano inclinato. Sostituendo l'espressione di t_B in quella della velocità si ottiene:

$$v_B = g(\sin(\alpha) - \mu_D \cos(\alpha))t_B = g(\sin(\alpha) - \mu_D \cos(\alpha)) \sqrt{\frac{2l}{g(\sin(\alpha) - \mu_D \cos(\alpha))}} = \sqrt{2lg(\sin(\alpha) - \mu_D \cos(\alpha))}$$

$$\text{sostituendo } l = \frac{h}{\sin(\alpha)} \text{ si ottiene } v_B = \sqrt{2hg \left(1 - \mu_D \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right)} \text{ come nel caso precedente.}$$

Soluzione domanda b):

Per determinare la massima compressione della molla possiamo utilizzare il teorema delle forze vive (o equivalentemente l'espressione del lavoro non conservativo) calcolando il lavoro tra un punto iniziale ed il punto finale caratterizzato dalla massima compressione della molla (e di conseguenza dalla velocità nulla del corpo). Come punto iniziale possono essere scelti a piacimento i punti A o B o C della figura. Per completezza calcoliamo il risultato utilizzando tutti e tre i punti.

Punto iniziale = A

Utilizziamo l'espressione per il lavoro non conservativo:

$$L_{NC} = L_{ATTR} = E_C - E_A = \frac{1}{2} k \Delta x^2 - mgh$$

$$L_{NC} = L_{ATTR} = \int_A^B -\mu_D mg \cos(\alpha) \hat{t} \cdot d\vec{z} + \int_B^{C+\Delta x} -\mu_D mg \hat{t} \cdot d\vec{z} = -\mu_D mg \cos(\alpha) \frac{h}{\sin(\alpha)} - \mu_D mg(d + \Delta x)$$

dove: $\hat{t}$ e $d\vec{z}$ sono rispettivamente il versore e la coordinata lungo l'orizzontale ed Δx è la compressione della molla

Dalle espressioni sopra si ricava:
$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 - mgh + \mu_D mg \cos(\alpha) \frac{h}{\sin(\alpha)} + \mu_D mg(d + \Delta x) = 0$$

che è un'equazione di secondo grado nell'incognita Δx con 2 soluzioni di cui solo una (quella positiva) è fisica (non si può avere compressione negativa). Risolvendo e sostituendo i valori numerici si ottiene: $\Delta x = 0.279 \text{ m}$.

Punto iniziale = B

Utilizziamo l'espressione per il lavoro non conservativo:

$$L_{NC} = L_{ATTR} = \int_B^C -\mu_D mg \hat{t} \cdot d\vec{z} = \int_0^{d+\Delta x} -\mu_D mg \hat{t} \cdot d\vec{z} = -\mu_D mg(d + \Delta x) = E_C - E_B = \frac{1}{2}k\Delta x^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$$

dove: $\hat{t}$ e $d\vec{z}$ sono rispettivamente il versore e la coordinata lungo l'orizzontale ed Δx è la compressione della molla. A questo punto si ottiene:

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 + \mu_D mg\Delta x - \frac{1}{2}mv_B^2 + \mu_D mgd = 0$$

questa equazione di secondo grado ammette 2 soluzioni di cui solo una (quella positiva) è fisica (non si può avere compressione negativa). Risolvendo e sostituendo i valori numerici si ottiene: $\Delta x = 0.279 \text{ m}$.

Punto iniziale = C.

Per determinare la massima compressione della molla bisogna sapere con che velocità il corpo raggiunge la molla (v_C in figura). Alla base del piano il corpo ha $v_B = 3.58 \text{ m/s}$ e poi deve percorrere un tratto lungo d con attrito. La velocità quando tocca la molla si può calcolare come nei 2 casi precedenti, vediamo il solo metodo delle forze vive.

$$L_{TOT} = L_{ATTR} = \int_B^C -\mu_D mg \hat{t} \cdot d\vec{x} = -\mu_D mgd = T_C - T_B = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \rightarrow$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 - 2\mu_D mgd} = 2.98 \text{ m/s}$$

Utilizzando il teorema delle forze vive si ottiene la massima compressione della molla (dove la velocità del corpo è nulla):

$$L_{TOT} = L_{ATTR} + L_{MOLLA} = \int_C^{C+\Delta x} -\mu_D mg \hat{t} \cdot d\vec{x} - \int_C^{C+\Delta x} kx dx = -\mu_D mg\Delta x - \frac{k}{2}\Delta x^2 = -\frac{1}{2}mv_C^2 \quad \text{da cui}$$

$$\Delta x^2 + \frac{2\mu_D mg}{k}\Delta x - \frac{mv_C^2}{k} = 0 \quad \text{come nei casi precedenti, questa equazione di secondo grado ammette 2}$$

soluzioni di cui solo una (quella positiva) è fisica (non si può avere compressione negativa). Risolvendo e sostituendo i valori numerici si ottiene: $\Delta x = 0.279 \text{ m}$.

Esercizio 4

La costante α ha dimensioni $[ML^{-2}T^{-2}]$ e unità di misura N/m^3 oppure Kg/m^2s^2 , mentre β ha dimensioni $[MT^{-2}]$ e si misura in N/m oppure Kg/s^2 .

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine $O(0,0,0)$ ed un punto generico $C(x,y,z)$ si ottiene l'energia potenziale $V = -\alpha x^2 z^2 + \beta xy$.

Il lavoro tra i punti $A(0,0,0)$ e $B(2,2,2)$ si ottiene dalla relazione:

$$L_{AB} = V(A) - V(B) = 16\alpha - 4\beta$$

Esercizio 5

a)

Definiamo un sistema di riferimento non inerziale con origine nel centro del disco e solidale ad esso (cioè in rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$). Rispetto a questo sistema di riferimento, le forze agenti sul corpo di massa m sono:

$$\vec{F}' = \vec{F}_{reali} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m\vec{a}_{oo'}$$

Le uniche forze diverse da zero sono la forza centrifuga

$\vec{F}_c = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = m\omega^2 r_o \hat{r}'$ che dipende dalla distanza r_o del corpo dal centro del disco O (vedi figura) e la forza reale data dalla forza di attrito

$\vec{F}_a = -\mu_s mg \hat{r}'$ (funziona da forza centripeta) che invece è costante.

Entrambe le forze sono dirette lungo $\hat{r}'$ che è il versore radiale diretto come la congiungente del centro del disco con la posizione del corpo. Le altre 2 forze reali sono il peso del corpo e la reazione vincolare del disco sul corpo che però hanno risultante nulla e non sono tenute in considerazione. Poiché più il corpo è posto lontano dal centro e maggiore è la forza centrifuga, la minima distanza dal centro alla quale il corpo inizia a strisciare si ottiene imponendo

$$|\vec{F}_c| = |\vec{F}_a| \rightarrow r_o = \mu_s \frac{g}{\omega^2} \rightarrow r_o = 0.49 \text{ m}$$

b) L'energia cinetica del sistema "disco + corpo" è data da

$$T_{TOT} = T_D + T_C = \frac{1}{2} I_D \omega^2 + \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} I_D \omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r_o^2 = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r_o^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{MR^2}{2} + m r_o^2 \right) \omega^2 = 4.48 \text{ J}$$

ovviamente si poteva ottenere lo stesso risultato scrivendo $T_{TOT} = \frac{1}{2} I_{SIST} \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{MR^2}{2} + m r_o^2 \right) \omega^2$

