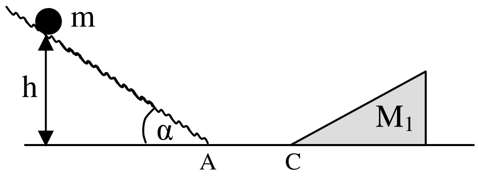
FISICA GENERALE T-A 14 giugno 2012
prof. roberto spighi (CdL ingegneria Energetica)

1) L'equazione del moto di un punto materiale è data da: $x(t)=\alpha;\quad y(t)=\beta t;\quad z(t)=\gamma t^2;$ con α, β e γ costanti positive, determinare:
a) le dimensioni fisiche di α, β e γ;
b) la velocità vettoriale media in un tempo compreso tra $t=0\ s$ e $t=2\ s$;
c) la velocità scalare media in un tempo compreso tra $t=0\ s$ e $t=2\ s$;
d) la componente tangenziale e centripeta dell'accelezione al tempo $t=2\ s$.

2) Una sfera di massa $m=1\,\text{kg}$ e raggio R è tenuta ferma ad un'altezza $h=1\,m$ su un piano inclinato di $\alpha=\pi/4$ scabro con coefficiente di attrito statico μ_S. Ad un certo istante la sfera non viene più trattenuta e scende fino al piano orizzontale liscio. Determinare la velocità della sfera quando arriva sul piano orizzontale nell'ipotesi che:

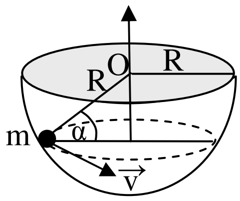


a) rotoli senza strisciare
b) $\mu_S=0$;

Supponendo che la sfera incontri nel punto C un altro piano inclinato liscio di massa $M_1=9\,\text{kg}$ libero di scorrere senza attito sul piano orizzontale, determinare, nell'ipotesi del punto "b",
c) la velocità del piano inclinato quando la sfera ha raggiunto su di esso l'altezza massima $h_{\max}$;
d) l'altezza massima $h_{\max}$ raggiunta dalla sfera sul piano inclinato .

Il momento di inerzia di una sfera (massa M e raggio R) rispetto al suo centro di massa è: $I_{sfera}=\frac{2}{5}MR^2$

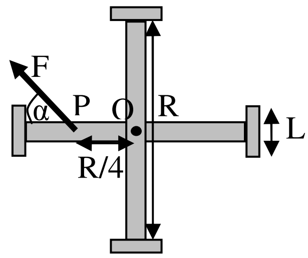
3) All'interno di una semisfera di raggio $R=1\,m$, un punto materiale di massa $m=1\,kg$ percorre un moto circolare uniforme con velocità $\vec{v}=2.63\,m/s$ ad una certa altezza definita dall'angolo $\alpha=\pi/4$ (vedi figura). Determinare, rispetto ad un sistema di riferimento solidale con il punto materiale, modulo, direzione e verso



a) della forza fittizia agente sul punto materiale;
b) della reazione vincolare che la superficie della semisfera esercita sul punto materiale.
c) Facoltativo: determinare la dipendenza della velocità del punto materiale dall'angolo α.

4) Data la forza $\vec{F}(x,y,z)=\left(2Axy+By^2z+Cz^4\right)\hat{\imath}+\left(Ax^2+2Bxyz\right)\hat{\jmath}+\left(Bxy^2+4Cxz^3\right)\hat{k}$ determinare:
a) le dimensioni fisiche delle costanti A, B e C;
b) se il campo è conservativo e nel caso calcolare l'energia potenziale in un punto P(x,y,z);
c) il lavoro compiuto dalla forza quando sposta il punto di applicazione da R(0,0,0) a S(1,1,1).

5) Un mulino a 2 pale con bracci uguali ed omogenei lunghi $R=10\,m$ è inizialmente a riposo. Ogni pala, schematizzabile come una sbarra sottile, ha massa $M=24\,kg$ e ad ogni sua estremità è fissata una sbarra trasversale anch'essa di spessore infinitesimo, lunga $L=1\,m$ e di massa $m=6\,kg$; ad un certo istante è applicata nel punto P la forza $F=1.84\times10^3\,N$ inclinata di $\alpha=30^\circ$ rispetto al braccio stesso e diretta come in figura. Calcolare:



a) il momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse passante per O e perpendicolare al piano del mulino;
b) il vettore accelerazione angolare del sistema.

Il momento d'inerzia di una sbarra sottile (massa M e lunghezza L) rispetto al suo cm è: $I_{sbarra}=\frac{1}{12}ML^2$

6) Enunciare, discutere e dimostrare il teorema delle forze vive.

Soluzioni compito:

Esercizio 1:

a)

Le dimensioni fisiche di α, β e γ sono:

$[\alpha] = [L]$

$[\beta] = [L][T]^{-1}$ cioè una velocità

$[\gamma] = [L][T]^{-2}$ cioè un'accelerazione

b)

Per ottenere la velocità vettoriale media bisogna calcolare lo spazio vettoriale percorso nell'intervallo di tempo richiesto

$$\vec{v}_m(t) = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{s}(t=2) - \vec{s}(t=0)}{2} = \frac{(\alpha\hat{i} + 2\beta\hat{j} + 4\gamma\hat{k}) - (\alpha\hat{i})}{2} = \frac{2\beta\hat{j} + 4\gamma\hat{k}}{2} = \beta\hat{j} + 2\gamma\hat{k}$$

c)

Per ottenere la velocità scalare media bisogna calcolare lo spazio percorso nell'intervallo di tempo richiesto.che é dato da:

$$\Delta s = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} |\vec{v}|\,dt \qquad \text{con } |\vec{v}| \text{ modulo della velocità.}$$

Per calcolare il modulo della velocità valutiamo la velocità vettoriale istantanea:

$\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 0\,\hat{i} + \beta\,\hat{j} + 2\alpha t\,\hat{k}$ e facciamone il modulo

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\beta^2 + 4\alpha^2 t^2}$$

A questo punto integriamo $\Delta s = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} |\vec{v}|\,dt = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} \sqrt{\beta^2 + 4\alpha^2 t^2}\,dt$ ponendo $\dfrac{4\alpha t}{\beta} = y$ otteniamo

$= \dfrac{\beta^2}{4\alpha} \displaystyle\int_{4\alpha t_{in}/\beta}^{4\alpha t_{fin}/\beta} \sqrt{1+y^2}\,dy$ che non é un integrale di facile integrazione (si fa per parti) il cui risultato é

$= \dfrac{\beta^2}{4\alpha}\left(\dfrac{y}{2}\sqrt{1+y^2} + \dfrac{1}{2}\log\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)\right)\Bigg|_{\frac{4\alpha t_{in}}{\beta}}^{\frac{4\alpha t_{fin}}{\beta}}$ sostituendo $t_{in} = 0$ e $t_{fin} = 2\,s$ si ottiene:

$$\Delta s = \frac{\beta^2}{4\alpha}\left[\frac{4\alpha}{\beta}\sqrt{1+\frac{64\alpha^2}{\beta^2}} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{8\alpha}{\beta} + \sqrt{1+\frac{64\alpha^2}{\beta^2}}\right)\right]$$

e dunque la velocità scalare media risulta:

$$v_m(t)=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\frac{\beta^2}{4\alpha}\left[\frac{4\alpha}{\beta}\sqrt{1+\frac{64\alpha^2}{\beta^2}}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{8\alpha}{\beta}+\sqrt{1+\frac{64\alpha^2}{\beta^2}}\right)\right]}{2}$$

Ovviamente il risultato da ottenere era matematicamente difficile e mi bastava l'impostazione del problema.

d)

La velocità istantanea al tempo generico t è data da:

$\vec{v}=\frac{d\left(x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}\right)}{dt}=\frac{d\left(\alpha\hat{i}+\beta t\hat{j}+\gamma t^2\hat{k}\right)}{dt}=\beta\hat{j}+2\gamma t\hat{k}$ che è costante lungo $\hat{j}$ e lineare nel tempo (moto uniformemente accelerato) lungo $\hat{k}$.

La velocità istantanea al tempo $t=2\ s$ è data da:

$$\vec{v}=\beta\hat{j}+4\gamma\hat{k}$$

L'accelerazione istantanea, in un generico istante, è data da:

$\vec{a}=\frac{d\left(v_x(t)\hat{i}+v_y(t)\hat{j}+v_z(t)\hat{k}\right)}{dt}=\frac{d\left(\beta\hat{j}+2\gamma t\hat{k}\right)}{dt}=2\gamma\hat{k}$ che è costante lungo $\hat{k}$ (tipo gravità) e dunque è la stessa anche al tempo $t=2\ s$.

La componente tangenziale dell'accelerazione (al tempo $t=2\ s$) è data da:

$$\vec{a}_t=a_t\hat{t}=\frac{\vec{a}\bullet\vec{v}}{|\vec{v}|}\hat{t}=\frac{\vec{a}\bullet\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}=\frac{8\gamma^2}{\beta^2+16\gamma^2}\left(\beta\hat{j}+4\gamma\hat{k}\right)$$

Mentre quella centripeta è:

$$\vec{a}_c=\vec{a}-\vec{a}_t=2\gamma\hat{k}-\frac{8\gamma^2}{\beta^2+16\gamma^2}\left(\beta\hat{j}+4\gamma\hat{k}\right)=-\frac{8\gamma^2}{\beta^2+16\gamma^2}\left(\beta\hat{j}+\left(-2\gamma\frac{\beta^2+16\gamma^2}{8\gamma^2}+4\gamma\right)\hat{k}\right)=$$

$$=-\frac{8\gamma^2}{\beta^2+16\gamma^2}\left(\beta\hat{j}+\left(-\frac{\beta^2+16\gamma^2}{4\gamma}+4\gamma\right)\hat{k}\right)=-\frac{8\gamma^2}{\beta^2+16\gamma^2}\left(\beta\hat{j}+\left(\frac{-\beta^2-16\gamma^2+16\gamma^2}{4\gamma}\right)\hat{k}\right)=$$

$$=-\frac{8\beta\gamma^2}{\beta^2+16\gamma^2}\left(\hat{j}-\frac{\beta}{4\gamma}\hat{k}\right)$$

Esercizio 2

a)

Sulla sfera agisce la forza peso, la reazione vincolare e la forza di attrito statico; a causa di quest'ultima la sfera rotola senza strisciare. Per determinare la velocità della sfera in fondo al piano utilizziamo la formula del Lavoro delle sole forze non conservative (in questo caso è la sola forza di attrito statico) sapendo però che L_{NC} per una forza di attrito statico è nullo, dunque è equivalente ad usare la conservazione dell'energia

$$L_{NC}=E_A-E_{ini}$$

dove

$$E_A = \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\frac{v_a^2}{R^2} = \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{5}mv_a^2 = \frac{7}{10}mv_a^2$$

è l'energia meccanica nel punto A,

$E_{ini} = mgh$ è quella nel punto iniziale quando la sfera è ferma ad altezza h e

$$L_{NC} = \int_{ini}^{A} \vec{F}_{attr,S} \bullet d\vec{s} = \int_{ini}^{A} -\mu_S mg\cos\alpha \, ds = -\mu_S mg\cos\alpha \int_{ini}^{A} ds = 0$$

poiché $ds = 0$ in quanto il punto di contatto non si muove rispetto alla superficie del piano inclinato. Mettendo insieme i "pezzi" si ottiene:

$$\frac{7}{10}mv_a^2 - mgh = 0 \rightarrow v_a^2 = \frac{10}{7}gh \rightarrow v_a = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 3.7\,m/s.$$

.

b)

Sulla sfera agiscono solo la forza peso (forza conservativa) e la reazione vincolare (non fa lavoro); non essendoci alcuna forza di attrito la sfera striscia senza rotolare. Per la soluzione utilizziamo la conservazione dell'energia meccanica:

$E_A = E_{ini}$

dove

$E_A = \frac{1}{2}mv_a^2$ è l'energia meccanica nel punto A e

$E_{ini} = mgh$ è quella nel punto iniziale quando la sfera è ferma ad altezza h.

Dunque $v_a^2 = 2gh \rightarrow v_a = \sqrt{2gh} = 4.4\,m/s$.

c)

Il sistema è costituito dalla sfera e dal piano inclinato di massa M_1; le forze esterne che agiscono sul sistema sono la forza peso e la reazione vincolare del piano orizzontale; queste forze sono entrambe dirette lungo la verticale e dunque si può conservare la quantità di moto $\vec{Q}_{sist}$ del sistema lungo la direzione orizzontale. La forza di reazione del piano inclinato che agisce sulla sfera è una forza interna poiché è una forza che nasce da un corpo appartenente al sistema. Dalla conservazione della quantità di moto del sistema si ottiene:

$\vec{Q}_{sist}(ini) = \vec{Q}_{sist}(fin)$

dove ini è l'istante iniziale quando la sfera è sul piano orizzontale con velocità $\vec{v}_a$ ed il piano inclinato è fermo e fin è l'istante finale in cui la sfera è nel punto di massima altezza con una velocità nulla rispetto al piano inclinato ed il piano inclinato con la sua velocità $\vec{v}$ (che è anche la velocità della sfera), in formule:

$$m\vec{v}_a = (m + M_1)\vec{v}$$

dove si può omettere il segno di vettore in quanto le velocità sono dirette lungo l'orizzontale →

$$v = \frac{m}{(m+M_1)}v_a = \frac{m}{(m+M_1)}\sqrt{2gh} = \frac{1}{10}\sqrt{2gh} = 0.44\,m/s$$

d)

Le forze in gioco sono o conservative o non compiono lavoro dunque applichiamo la conservazione dell'energia meccanica $E_{sist}(ini) = E_{sist}(fin)$

dove, come per la risposta "c", ini è l'istante iniziale quando la sfera è sul piano orizzontale con velocità $\vec{v}_a$ ed il piano inclinato è fermo e fin è l'istante finale in cui la sfera è nel punto di massima altezza con una velocità nulla rispetto al piano inclinato ed il piano inclinato con la sua velocità $\vec{v}$ (che è anche la velocità della sfera), in formule:

$$E_{sist}(ini) = \frac{1}{2} m v_a{}^2$$

$$E_{sist}(fin) = \frac{1}{2}(m + M1)v^2 + mgh_{\max}$$

Da cui $\frac{1}{2} m v_a{}^2 = \frac{1}{2}(m + M1)v^2 + mgh_{\max}$ → $\frac{1}{2} m\, 2gh = \frac{1}{2}(m + M1)\frac{1}{100} 2gh + mgh_{\max}$

Attenzione: non confondere h che è l'altezza dove era posizionata inizialmente la sfera nel primo piano inclinato (quello fisso) e $h_{\max}$ che è l'altezza massima raggiunta dalla sfera nel secondo piano inclinato (quello mobile). Risolvendo la precedente espressione della conservazione dell'energia si ottiene:

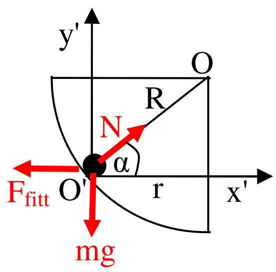
$$mgh_{\max} = \frac{1}{2} m\, 2gh - \frac{1}{2}(m + M1)\frac{1}{100} 2gh = mgh - \frac{m + M1}{100} gh = gh\left(m - \frac{1}{10}\right)$$

da cui $h_{\max} = \frac{h}{m}\left(m - \frac{1}{10}\right) = 0.9\, m$

Esercizio 3

a)

Scegliamo un sistema di riferimento (SdR) mobile come mostrato in figura: l'origine è posto sul punto materiale e rimane solidale ad esso, l'asse $\vec{x}'$ perpendicolare all'asse di rotazione e l'asse $\vec{y}'$ diretta parallelamente all'asse di rotazione. Rispetto a questo SdR, il punto materiale è fermo e dunque la risultante di tutte le forze deve essere nulla. Le forze che agiscono sono la forza peso lungo $\vec{y}'$, la reazione vincolare della superficie della semisfera $\vec{N}$ che punta verso il centro della semisfera stessa e la forza fittizia $\vec{F}_{fitt}$ che vedremo essere diretta lungo $\vec{x}'$ e che nasce dal fatto che il sistema mobile in questione non è inerziale.



La forza fittizia $\vec{F}_{fitt}$ è data da:

$$\vec{F}_{fitt} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - ma_{oo'}$$

dove tutti i termini sono nulli ad eccezione dell'ultimo →

$$\vec{F}_{fitt} = -ma_{oo'} = -m\omega^2 r\hat{x}' = -m\frac{v^2}{r}\hat{x}' = -m\frac{v^2}{R\cos\alpha}\hat{x}' = 9.8\, N\, \hat{x}'$$

poiché l'origine del sistema mobile (che è fissato sul punto materiale) compie un moto circolare uniforme rispetto al sistema fisso e dunque è soggetto ad una forza centripeta con r raggio dell'orbita circolare. Stesso risultato sarebbe stato ottenuto prendendo un SdR centrato sull'asse di rotazione (all'altezza del punto materiale), asse $\vec{x}'$ puntante verso il punto materiale e asse $\vec{y}'$ parallelo all'asse di rotazione: in questo caso l'unico termine delle forze fittizie non nullo sarebbe stato quello centrifugo con medesima espressione di quello già trovato.

b)

Come già anticipato, rispetto al SdR di cui sopra, il punto materiale è fermo e dunque la risultante di tutte le forze deve essere nulla:

$\vec{N}+m\vec{g}+\vec{F}_{fitt}=0$ che lungo gli assi $\vec{x}'$ e $\vec{y}'$ diventa:

$$\begin{cases}-F_{fitt}+N_{x'}=0\\ N_{y'}-mg=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}N_{x'}=m\dfrac{v^2}{R\cos\alpha}\\ N_{y'}-mg=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}N_{x'}=m\dfrac{v^2}{R\cos\alpha}\\ N_{y'}=mg\end{cases}$$ da cui segue che

$$\vec{N}=m\frac{v^2}{R\cos\alpha}\hat{x}'+mg\,\hat{y}'=\left(9.8\,\hat{x}'+9.8\,\hat{y}'\right)N$$

c) Facoltativo

La dipendenza della velocità del punto materiale dall'angolo α può essere determinata da:

$$\begin{cases}N_{x'}=N\cos\alpha\\ N_{y'}=Nsen\alpha\end{cases} \rightarrow \begin{cases}N=m\dfrac{v^2}{R\cos^2\alpha}\\ N=\dfrac{mg}{sen\alpha}\end{cases} \rightarrow m\frac{v^2}{R\cos^2\alpha}=\frac{mg}{sen\alpha} \rightarrow v^2=\frac{gR\cos^2\alpha}{sen\alpha} \rightarrow$$

$$v=\sqrt{\frac{gR\cos^2\alpha}{sen\alpha}}$$

Esercizio 4

a)

Le costanti *A*, *B* e *C* hanno le seguenti dimensioni fisiche:

[A] = [F]/[L^2]=[M][L^{-1}][T^{-2}] e unità di misura N/m^2 oppure $Kg/(ms^2)$.

[B] = [F]/[L^3]=[M][L^{-2}][T^{-2}] e unità di misura N/m^3 oppure $Kg/(m^2s^2)$.

[C] = [F]/[L^4]=[M][L^{-3}][T^{-2}] e unità di misura N/m^4 oppure $Kg/(m^3s^2)$.

b)

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine O(0,0,0) ed un punto generico C(*x,y,z*)

$$L_{OP}=\int_{000}^{x00}F_x\,dx+\int_{x00}^{xy0}F_y\,dy+\int_{xy0}^{xyz}F_z\,dz=$$

$$L_{OP}=\int_{000}^{x00}\left(2Axy+By^2z+Cz^4\right)dx+\int_{x00}^{xy0}\left(Ax^2+2Bxyz\right)dy+\int_{xy0}^{xyz}\left(Bxy^2+4Cxz^3\right)dz=$$

$$=\left[Ax^2y+Bxy^2z+Cxz^4\right]_{000}^{x00}+\left[Ax^2y+Bxy^2z\right]_{x00}^{xy0}+\left[Bxy^2z+Cxz^4\right]_{xy0}^{xyz}=0+Ax^2y+Bxy^2z+Cxz^4$$

dunque $L_{OP}=V(0,0,0)-V(x,y,z)=Ax^2y+Bxy^2z+Cxz^4$ da cui segue l'energia potenziale $V(x,y,z)=-\left(Ax^2y+Bxy^2z+Cxz^4\right)$.

c)

Visto che il campo è conservativo, il lavoro tra i punti R(0,0,0) e S(1,1,1) si ottiene dalla relazione:

$$L_{RS}=V(R)-V(S)=V(0,0,0)-V(1,1,1)=A+B+C$$

Esercizio 5

a)

Il momento di inerzia del sistema rispetto ad un asse passante per O e perpendicolare al piano del mulino è dato da:

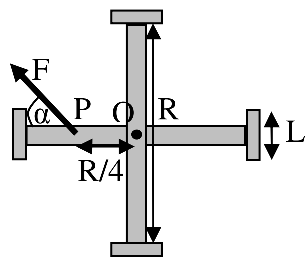
$$I=2\left(\frac{1}{12}MR^2\right)+4\left(\frac{1}{12}mL^2+m\left(\frac{R}{2}\right)^2\right)$$

Dove il primo termine si riferisce alle 2 pale passanti per O, mentre il secondo alle 4 pale piccole trasversali. Mettendo i dati del problema si ottiene:

$$I=2\left(\frac{1}{12}24\times10^2\right)+4\left(\frac{1}{12}6\times1^2+6\times5^2\right)=400+4\left(\frac{1}{2}+150\right)=400+4\left(\frac{1}{2}+150\right)=1002\,kgm^2$$

b)

Usiamo la seconda equazione cardinale della meccanica $\vec{M}=I\vec{\alpha}$ dove tutti i termini sono calcolati rispetto ad un'asse passante per O e perpendicolare al piano del mulino:



$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=-\frac{R}{4}F\,sen\alpha\,\hat{k}$ dove il segno meno deriva dal fatto che, come si vede dal disegno, la forza tende a far ruotare il mulino in senso orario. Mettendo i numeri del problema si ottiene:

$$\vec{M}=-2.5\times1.84\times10^3\frac{1}{2}\hat{k}=-2.3\times10^3\,\hat{k}\,N$$

A questo punto l'accelerazione angolare è data da

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{M}}{I} = \frac{-2.3 \times 10^{3}\,\hat{k}}{1002} = -2.3\hat{k}\ rad/s^{2}$$