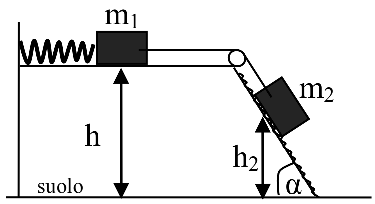
FISICA GENERALE T-A 14 Giugno 2013 prof. Spighi (CdL ingegneria Energetica)

1) La posizione di un punto materiale è $\vec{r}(t) = \frac{t^3}{3}\hat{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\hat{j} + t\hat{k}$ con r in metri e t in secondi.

Calcolare: a) la velocità vettoriale media fra i punti $t_1 = 0$ s e $t_2 = 2$ s;
b) la velocità scalare media fra gli stessi istanti di tempo;
c) il raggio di curvatura al tempo t = 1 s.

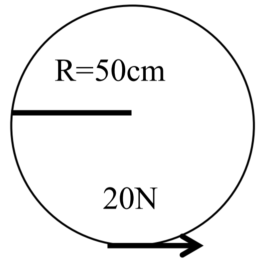
2) Su un piano orizzontale liscio posto ad un'altezza $h = 1\,m$ rispetto al suolo é appoggiata una massa $m_1 = 1\,kg$ collegata da una parte ad una molla di massa trascurabile, costante elastica $k = 100\,N/m$, lunghezza a riposo nulla, fissata al muro e dall'altra ad una corda inestensibile, di massa trascurabile a sua volta attaccata ad una massa $m_2 = 2\,kg$ posta su un piano inclinato di un angolo $\alpha = 45^o$, scabro ($\mu_S = 0.2$ e $\mu_D = 0.1$) e ad un altezza $h_2 = 0.5\,m$ (vedi figura),



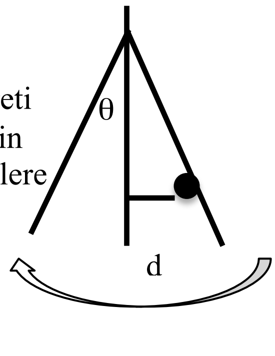
Supponendo la carrucola ideale di massa trascurabile e che il sistema sia in quiete, determinare
a) l'allungamento della molla.
Ad un certo istante la molla si rompe, determinare:
b) l'accelerazione del sistema;
c) la velocità con cui m_2 giunge al suolo (ipotizzando che m_1 si trovi ancora sul piano orizzontale).

3) Dato il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = 2\alpha xz\hat{i} - \beta z^2\hat{j} + (\alpha x^2 - 2\beta yz)\hat{k}$ determinare:
a) le dimensioni fisiche delle costanti α e β;
b) se il campo di forze è conservativo e nel caso calcolarne l'energia potenziale;
c) il lavoro fatto dalla forza quando sposta il punto di applicazione da R(0,1,-2) a S (1,2,2).

4) Un disco omogeneo di massa M=10kg e raggio R=50cm ha la faccia appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito; la figura mostra la visione dall'alto del disco. Una corda è arrotolata lungo il bordo esterno del disco e una forza costante di 20N è applicata alla corda. Determinare:
a) l'accelerazione angolare del disco;
b) l'accelerazione del centro di massa del disco;
c) la velocità del centro di massa dopo che questo ha percorso un tratto di 7m.



5) Un oggetto puntiforme di massa m=0.1kg si trova appoggiato sul bordo di un cono rovesciato (vedi figura) che ruota in senso orario con velocità angolare ω=10rad/s. Le pareti del cono sono inclinate di un angolo θ=30° rispetto alla verticale. Sapendo che il corpo è in equilibrio a una distanza d=50cm dall'asse di rotazione del cono, stabilire quanto deve valere il coefficiente di attrito statico affinchè il corpo non cada.



6) Enunciare e discutere il teorema di Koenig dell'energia cinetica per i corpi rigidi.

SOLUZIONI

EX 1

a) la velocità vettoriale media si calcola tramite la formula

$$<\vec{v}_m>=\frac{\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{\left(\frac{2^3}{3}\hat{i}+\frac{2^2}{\sqrt{2}}\hat{j}+2\hat{k}\right)-\left(0\hat{i}+0\hat{j}+0\hat{k}\right)}{2-0}=\frac{\frac{8}{3}\hat{i}+\frac{4}{\sqrt{2}}\hat{j}+2\hat{k}}{2}=\frac{4}{3}\hat{i}+\sqrt{2}\hat{j}+\hat{k}$$

b) la velocità scalare media invece si ottiene con la formula

$$<v_m>=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove per prima cosa bisogna calcolare il valore Δs che rappresenta la lunghezza del percorso.

Sapendo che $\vec{v}(t)=\frac{d\vec{s}}{dt}$ allora $\Delta s=\int_{t_1}^{t_2}|v|dt$ con |v| modulo della velocità. Quindi:

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=t^2\hat{i}+\sqrt{2}t\hat{j}+\hat{k}\Rightarrow|v|=\sqrt{(t^2)^2+(\sqrt{2}t)^2+1^2}=\sqrt{t^4+2t^2+1}=\sqrt{(t^2+1)^2}=t^2+1$$

$$\Delta s=\int_{t_{10}}^{t_2}|v|dt=\int_0^2(t^2+1)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_0^2=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(0+0\right)=\frac{14}{3}m$$

Quindi

$$<v_m>=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\frac{14}{3}}{2-0}=\frac{1}{2}*\frac{14}{3}=\frac{7}{3}m/s$$

c) per trovare il raggio di curvatura al tempo t=1s devo prima trovare la velocità e l'accelerazione al tempo t=1s. Quindi:

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=t^2\hat{i}+\sqrt{2}t\hat{j}+\hat{k}\Rightarrow\vec{v}(t=1)=1^2\hat{i}+\sqrt{2}*1\hat{j}+\hat{k}=\hat{i}+\sqrt{2}\hat{j}+\hat{k}\Rightarrow|v(t=1)|=\sqrt{1+2+1}=2m/s$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=2t\hat{i}+\sqrt{2}\hat{j}\Rightarrow\vec{a}(t=1)=2*1\hat{i}+\sqrt{2}\hat{j}=2\hat{i}+\sqrt{2}\hat{j}\Rightarrow|a(t=1)|=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}m/s^2$$

Adesso possiamo calcolare il versore tangente alla traiettoria all'istante t=1s

$$\hat{u}_t(t=1)=\frac{\vec{v}(t=1)}{|v(t=1)|}=\frac{\hat{i}+\sqrt{2}\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}}=\frac{\hat{i}+\sqrt{2}\hat{j}+\hat{k}}{2}$$

La componente scalare tangente dell'accelerazione la ottengo proiettando l'accelerazione vettoriale sul vettore tangente (quindi facendo il prodotto scalare):

$$a_t(t=1)=\hat{u}_t(t=1)\cdot\vec{a}(t=1)=\left(\frac{\hat{i}+\sqrt{2}\hat{j}+\hat{k}}{2}\right)\cdot\left(2\hat{i}+\sqrt{2}\hat{j}\right)=\frac{1*2+\sqrt{2}*\sqrt{2}}{2}=\frac{2+2}{2}=2m/s^2$$

Ora la componente normale dell'accelerazione la trovo come differenza vettoriale fra l'accelerazione totale e la componente tangente vettoriale dell'accelerazione (che si ottiene moltiplicando a_t per u_t)

$$\vec{a}(t)=\vec{a}_t(t)+\vec{a}_n(t)\Rightarrow\vec{a}_n(t)=\vec{a}(t)-\vec{a}_t(t)=(2\hat{i}+\sqrt{2}\hat{j})-2(\frac{\hat{i}+\sqrt{2}\hat{j}+\hat{k}}{2})=2\hat{i}+\sqrt{2}\hat{j}-\hat{i}-\sqrt{2}\hat{j}-\hat{k}=\hat{i}-\hat{k}$$

Il modulo della componente normale lo ottengo come

$$a_n(t=1)=\sqrt{a^2(t=1)-a_t^2(t=1)}=\sqrt{6-2^2}=\sqrt{6-4}=\sqrt{2}m/s^2$$

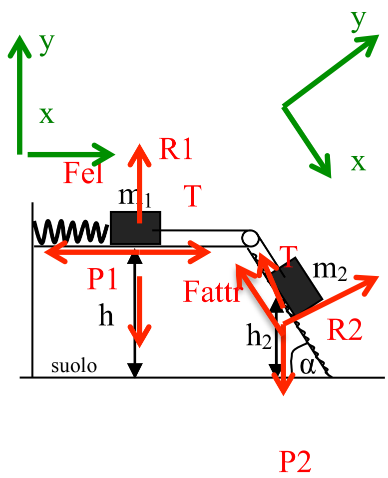
oppure dal vettore trovato prima: $a_n(t=1)=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}m/s^2$

Ora posso calcolare il raggio di curvatura al tempo t=1s:

$$\rho(t=1)=\frac{v^2(t=1)}{a_n(t=1)}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}m$$

EX 2

a) Il sistema è fermo quindi posso applicare le equazioni della statica separatamente per i due oggetti. In figura sono mostrati in rosso per ogni corpo le forze agenti su di essi e in verde il sistema di riferimento scelto.



Per la massa m1: $\sum\vec{F}=0\Rightarrow\vec{F}_{el}+\vec{P}_1+\vec{R}_1+\vec{T}=0$

Per la massa m2: $\sum\vec{F}=0\Rightarrow\vec{P}_2+\vec{R}_2+\vec{T}+\vec{F}_{att}=0$

dove F_{el} è la forza elastica della molla, la forza di attrito è di tipo statico perché il sistema è fermo e le tensioni sui due corpi sono le stesse perché la fune è inestensibile di massa trascurabile e la carrucola ideale per cui il modulo della tensione è sempre uguale lungo tutta la corda stessa.
Ora proietto le due equazioni separatamente per i due oggetti lungo gli assi del sistema di riferimento scelto:

$$1x)-F_{el}+T=0\Rightarrow F_{el}=T\Rightarrow k\Delta x=T$$
$$1y)-P_1+R_1=0\Rightarrow R_1=P_1\Rightarrow R_1=m_1g$$
$$2x)-F_{attr}-T+P_2sen\alpha=0\Rightarrow T=m_2gsen\alpha-F_{attr}$$
$$2y)R_2-P_2\cos\alpha=0\Rightarrow R_2=P_2\cos\alpha$$

La 2y serve per trovare la reazione vincolare sul secondo corpo, che usiamo per trovare la forza d'attrito statico:

$$R_2=P_2\cos\alpha=m_2g\cos\alpha\Rightarrow F_{attr}=\mu_sR_2=\mu_sm_2g\cos\alpha$$

Ora sostituisco la forza di attrito nell'equazione 2x per trovare la tensione della fune:

$$T=m_2gsen\alpha-F_{attr}=m_2gsen\alpha-\mu_sm_2g\cos\alpha$$

Inserisco questa equazione nella 1x e trovo l'allungamento della molla richiesto:

$$k\Delta x = T \Rightarrow k\Delta x = m_2 g sen\alpha - \mu_s m_2 g \cos\alpha \Rightarrow \Delta x = \frac{m_2 g sen\alpha - \mu_s m_2 g \cos\alpha}{k} = 0.11m$$

b) Il sistema non è più fermo quindi devo applicare la seconda equazione della dinamica separatamente per i due corpi. Le forze in gioco sui due corpi sono le stesse mostrate precedentemente tranne la forza elastica che non agisce più. Siccome il sistema si sta muovendo l'attrito che entra in gioco ora è quello dinamico.
Per la massa m1: $\sum \vec{F} = m_1\vec{a} \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a}$

Per la massa m2: $\sum \vec{F} = m_2\vec{a} \Rightarrow \vec{P}_2 + \vec{R}_2 + \vec{T} + \vec{F}_{att} = m_2\vec{a}$

dove essendo il sistema legato le accelerazioni dei duo oggetti sono le stesse.
Come prima proietto le equazioni lungo gli assi del sistema di riferimento che ho scelto notando che il sistema si sta muovendo verso destra per cui le accelerazioni hanno segno positivo:

$$\begin{aligned}
&1x) T = m_1 a \\
&1y) -P_1 + R_1 = 0 \Rightarrow R_1 = P_1 \Rightarrow R_1 = m_1 g \\
&2x) -F_{attr} - T + P_2 sen\alpha = m_2 a \\
&2y) R_2 - P_2\cos\alpha = 0 \Rightarrow R_2 = P_2\cos\alpha
\end{aligned}$$

Come prima dalla 2y ricavo la reazione vincolare che mi serve per trovare la froza di attrito dinamico:
$R_2 = P_2\cos\alpha = m_2 g\cos\alpha \Rightarrow F_{attr} = \mu_d R_2 = \mu_d m_2 g \cos\alpha$

Sostituendo l'espressione della tensione trovata con l'equazione 1x nella 2x ottengo l'accelerazione richiesta:

$$2x) -F_{attr} - T + P_2 sen\alpha = m_2 a \Rightarrow -\mu_d m_2 g\cos\alpha - m_1 a + m_2 g sen\alpha = m_2 a$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 g sen\alpha - \mu_d m_2 g\cos\alpha}{m_1 + m_2} = 4.16 m/s^2$$

che risulta costante nel tempo.

Nel caso si desideri calcolare la tensione basta sostituire l'accelerazione nella 1x:
$1x) T = m_1 a = 4.16N$

c) la velocità con cui l'oggetto 2 arriva al suolo può essere calcolata in vari modi:
1)con le equazioni di un moto uniformemente accelerato una volta che abbiamo trovato l'accelerazione del sistema e notando che lo spazio percorso s sul piano inclinato può essere ricavato da semplici considerazioni geometriche

$$\begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v = v_0 + at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{h}{sen\alpha} = \frac{1}{2}at^2 \\ v = at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{h}{sen\alpha} = \frac{1}{2}a\frac{v}{a^2}^2 \\ t = \frac{v}{a} \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2ah}{sen\alpha}} = \sqrt{\frac{m_2 gh(1-\mu_d \cot g\alpha)}{m_1 + m_2}} 2.42 m/s$$

2) col teorema delle forze vive calcolando il lavoro totale fatto su entrambi i corpi e poi calcolando il lavoro delle singole forze che agiscono separatamente su 1 e su 2.

$$L_{tot} = L_1 + L_2 = T_{fin} - T_{in} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - 0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

Sul corpo 1 fa lavoro solo la tensione perché peso e reazione vincolare sono perpendicolari allo spostamento. Lo spostamento è dato come prima da considerazioni geometriche:

$$L_1 = L_T = Ts$$

Su m2 compiono lavoro la tensione del filo, la forza di attrito dinamico e la componente parallela al piano inclinato della forza peso.

$$L_2 = L_T + L_P + L_{attr} = -Ts + m_2 g sen\alpha s - \mu_d m_2 g \cos\alpha s$$

Da cui mettendo insieme le due espressioni:

$$L_{tot} = L_1 + L_2 = Ts - Ts + m_2 g sen\alpha s - \mu_d m_2 g \cos\alpha s = m_2 g s(sen\alpha - \mu_d \cos\alpha)$$

con $s = \dfrac{h}{2sen\alpha}$

Quindi utilizzando il teorema delle forze vive si ottiene:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = m_2 g s(sen\alpha - \mu_d \cos\alpha) \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = m_2 g \frac{h}{2sen\alpha}(sen\alpha - \mu_d \cos\alpha)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{m_2 g h}{m_1 + m_2}(1 - \mu_d \cot g\alpha)$$

come nel caso precedente.

3) utilizzando la formula del lavoro di forze non conservative:

$$L_{NC} = E_{mecc,fin} + E_{mecc,in}$$

Sul corpo 1 non agiscono forze non conservative per cui $L_{NC} = 0$.

Sul corpo 2 l'unica forza non conservativa che agisce è la forza di attrito dinamico il cui lavoro lo posso calcolare dalla definizione generale di lavoro:

$$L_{attr} = -F_{attr}s = -\mu_d m_2 g \cos\alpha \frac{h}{2sen\alpha} = \frac{-\mu_d m_2 g h \cot g\alpha}{2}$$

L'energia meccanica del sistema nello stato iniziale e finale è data da:

$$E_{mecc,in} = m_1 g h + m_2 g \frac{h}{2}$$

$$E_{mecc,in} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + m_1 g h$$

da cui

$$E_{mecc,fin-}E_{mecc,in} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + m_1 g h - m_1 g h + m_2 g \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + m_1 g h - m_1 g h + m_2 g \frac{h}{2} = -\mu_d m_2 g \cos\alpha \Rightarrow v^2 = \frac{m_2 g h(1 - \mu_d \cot g\alpha)}{m_1 + m_2}$$

come nei casi precedenti.

EX 3

a) le dimensioni delle costanti si ottengo imponendo che tutte le componenti della forza siano nelle dimensioni idonee cioè $[N]=[MLT^{-2}]$. Quindi:

$$[\alpha]=\frac{[MLT^{-2}]}{[xz]}=\frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]}=[ML^{-1}T^{-2}]$$

$$[\beta]=\frac{[MLT^{-2}]}{[yz]}=\frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]}=[ML^{-1}T^{-2}]$$

b) per verificare se il campo è conservativo calcolo il rotore della forza:

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \delta/\delta x & \delta/\delta y & \delta/\delta z\\ F_x & F_y & F_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \delta/\delta x & \delta/\delta y & \delta/\delta z\\ 2\alpha xz & -\beta z^2 & \alpha x^2-2\beta yz\end{pmatrix}=$$

$$=\hat{i}\left(\frac{\partial(\alpha x^2-2\beta yz)}{\partial y}-\frac{\partial(-2\beta z^2)}{\partial z}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial(\alpha x^2-2\beta yz)}{\partial x}-\frac{\partial(2\alpha xz)}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial(-\beta z^2)}{\partial x}-\frac{\partial(2\alpha xz)}{\partial y}\right)=$$

$$=\hat{i}\left(-2\beta z+2\beta z\right)-\hat{j}\left(2\alpha x-2\alpha x\right)+\hat{k}(0-0)=0$$

Il campo è conservativo e posso quindi calcolare l'energia potenziale:

$$V=-\int_{0,0,0}^{x,y,z}\vec{F}\,d\vec{s}=-\int_{0,0,0}^{x,0,0}F_x\,dx-\int_{x,0,0}^{x,y,0}F_y\,dy-\int_{x,y,0}^{x,y,z}F_z\,dz=-\int_{0,0,0}^{x,0,0}(2\alpha xz)dx-\int_{x,0,0}^{x,y,0}(-\beta z^2)dy-\int_{x,y,0}^{x,y,z}(\alpha x^2-2\beta yz)dz==$$

$$=\left[-2\alpha z\frac{x^2}{2}\right]_{000}^{x00}+\left[\beta z^2 y\right]_{x00}^{xy0}+\left[-\alpha x^2 z+2\beta y\frac{z^2}{2}\right]_{000}^{x00}=-\alpha x^2 z+\beta yz^2$$

c) avendo trovato l'energia potenziale calcolare il lavoro diventa banale:

$$L_{R,S}=V_R-V_S=(-\alpha x^2 z+\beta yz^2)_{0,1,-2}-(-\alpha x^2 z+\beta yz^2)_{1,2,2}=4\beta-(-2\alpha+8\beta)=2\alpha-4\beta Joule$$

EX 4

a) per trovare l'accelerazione angolare del disco uso la seconda equazione cardinale: $\vec{M}^{ext}=I\vec{\alpha}$. Per il calcolo dei momenti considero come polo il centro di massa del sistema in modo che si annullino il momento del peso e della reazione vincolare sul piano. Rimane allora solo il momento dovuto alla fora applicata sulla corda:

$$\vec{M}^{ext}=I\vec{\alpha}\Rightarrow(-R\hat{j})\times(T\hat{i})=I\vec{\alpha}\Rightarrow RT\hat{k}=I\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow\vec{\alpha}=\frac{RT\hat{k}}{I}=\frac{RT\hat{k}}{1/2\,MR^2}=\frac{2T}{MR}\hat{k}=\frac{2*20}{10*0.5}=8rad/s^2\hat{k}$$

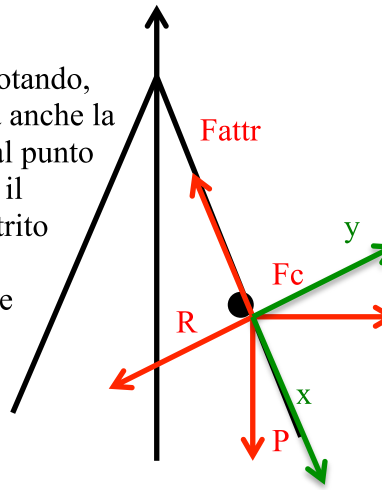
b) per calcolare l'accelerazione del centro di massa uso invece la prima equazione cardinale: $\vec{F}^{ext}=M\vec{a}_{cm}$ dove l'unica forza che agisce sul disco è la tensione della corda:

$$\vec{T} = M\vec{a}_{cm} \Rightarrow \vec{a}_{cm} = \frac{\vec{T}}{M} = \frac{20}{10} = 2m/s^2\hat{i}$$

c) la velocità del centro di massa la trovo utilizzando le equazioni di un moto uniformemente accelerato una volta che ho trovato l'accelerazione:

$$\begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v = v_0 + at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{2}at^2 \\ v = at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = \frac{1}{2}2t^2 \\ v = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{7}s \\ v = 2\sqrt{7} = 5.3m/s \end{cases}$$

EX 5



In figura sono riportate tutte le forze in gioco sull'oggetto. Siccome il cono sta ruotando, oltre alla forza peso, alla reazione vincolare e alla forza di attrito, la massa sentirà anche la forza centrifuga verso l'esterno. Il sistema di riferimento scelto è quello solidale al punto materiale che quindi è un sistema non inerziale. Se non ci fosse la forza di attrito il corpo cadrebbe sotto l'effetto della forza peso e della forza centrifuga per cui l'attrito è sicuramente diretto verso le x negative come segnato in figura.
Nel sistema non inerziale scelto il corpo è in equilibrio per cui applico l'equazione della statica per un punto materiale in cui oltre alle forze reali devo considerare anche le forze fittizie.

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{attr} + \vec{F}_c = 0$$

Proietto l'equazione lungo gli assi del sistema scelto:

$$x) P\cos\theta + F_c sen\theta - F_{attr} = 0$$
$$y) -R + F_c \cos\theta - Psen\theta = 0$$

dove $F_c = m\omega^2 d$ è la forza centrifuga sentita da un oggetto a distanza d dall'asse di rotazione.
La seconda equazione mi serve per trovare la reazione vincolare che interviene nel calcolo della forza di attrito

$$R = F_c\cos\theta - Psen\theta = 0 \Rightarrow F_{attr} = \mu_s R = \mu_s(F_c\cos\theta - Psen\theta) = \mu_s(m\omega^2 d\cos\theta - mgsen\theta)$$

Inserisco questa formula nell'equazione sulla x e ottengo la condizione sul coefficiente d'attrito:

$$P\cos\theta + F_c sen\theta - F_{attr} = 0 \Rightarrow mg\cos\theta + m\omega^2 dsen\theta - \mu_s(m\omega^2 d\cos\theta - mgsen\theta) = 0$$

$$\mu_s = \frac{mg\cos\theta + m\omega^2 dsen\theta}{m\omega^2 d\cos\theta - mgsen\theta} = 0.87$$