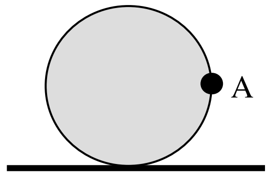
FISICA GENERALE T-A **scritto 17/9/2013 prof. Spighi (CdL ingegneria Energetica)**

1) La posizione di un punto materiale è $\vec{r}(t) = \frac{t^3}{3}\hat{i} + \sqrt{2}\,t^2\hat{j} + 4t\hat{k}$ con r in metri e t in secondi. Calcolare:

a) la velocità vettoriale media fra i punti $t_1 = 0s$ e $t_2 = 2s$;
b) la velocità scalare media fra gli stessi istanti di tempo;
c) il raggio di curvatura al tempo $t_3 = 1s$.

2) Un sistema é formato da un disco omogeneo di raggio R e massa M e da una massa puntiforme di valore M/2 fissata nel punto A alla stessa altezza del centro del disco (vedi figura). Il sistema é inizialmente fermo nel piano verticale e poggia su un piano orizzontale sul quale rotola senza strisciare. Determinare:



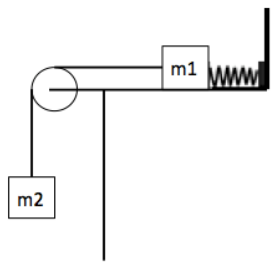
a) il vettore accelerazione angolare nell'istante iniziale rispetto ad un asse perpendicolare al disco e passante per il punto di contatto col piano;
b) il modulo della velocità angolare del sistema quando, dopo aver rotolato, il punto A si trova sul piano orizzontale.

Il momento d'inerzia di un disco di massa M e raggio R attorno a un asse passante per il centro di massa $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$

3) Dato il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = 2\alpha xy\hat{i} + \beta x^2\hat{j}$ determinare:

a) le dimensioni fisiche delle costanti α e β;
b) per quale condizione sulle costanti α e β il campo di forze è conservativo e in quel caso calcolarne l'energia potenziale;
c) il lavoro fatto dalla forza quando è conservativa per spostare il punto da A(2,-2,-1) a B (0,1,0).

4) Due masse m_1=2 kg e m_2=3 kg sono collegate tra loro da una fune inestensibile di massa trascurabile passante sopra una carrucola (vedi figura). La massa m_1 è appoggiata su un piano orizzontale liscio, tenuta inizialmente ferma da una molla di costante elastica k=200 N/m, mentre la massa m_2 è appesa lungo la verticale. In condizioni di equilibrio, determinare:



a) l'allungamento della molla nel caso la carrucola sia ideale con massa trascurabile;
b) l'allungamento della molla nel caso la carrucola sia reale approssimabile ad un disco di raggio R=20 cm e massa M= 2kg.

Ad un certo istante la molla si rompe e il sistema inizia a muoversi, determinare:

c) l'accelerazione delle masse nel caso la carrucola sia ideale con massa trascurabile;
d) l'accelerazione delle masse nel caso la carrucola sia reale come nella domanda b).

Il momento d'inerzia di un disco di massa M e raggio R attorno a un asse passante per il centro di massa $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$

5) Un pendolo costituito da una massa m collegata ad un filo inestensibile di lunghezza l=1 m é appeso al soffitto di un ascensore in moto verticale lungo dei binari e sta oscillando. Determinare (nell'approssimazione delle piccole oscillazioni) il periodo del pendolo nel caso:

a) l'ascensore scenda a velocità costante;
b) l'ascensore scenda con un'accelerazione costante di $g/3$;

6) Enunciare, sottolineando somiglianze e differenze, le forze di attrito statico e dinamico.

SOLUZIONI

EX 1

a) la velocità vettoriale media si calcola tramite la formula

$$<\vec{v}_m> = \frac{\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{\left(\frac{8}{3}\hat{i}+4\sqrt{2}\hat{j}+8\hat{k}\right)-\left(0\hat{i}+0\hat{j}+0\hat{k}\right)}{2-0} = \frac{\frac{8}{3}\hat{i}+4\sqrt{2}\hat{j}+8\hat{k}}{2} = \frac{4}{3}\hat{i}+2\sqrt{2}\hat{j}+4\hat{k}$$

b) la velocità scalare media invece si ottiene con la formula

$$<v_m> = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove per prima cosa bisogna calcolare il valore Δs che rappresenta la lunghezza del percorso.

Sapendo che $\vec{v}(t)=\frac{d\vec{s}}{dt}$ allora $\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} |v| dt$ con |v| modulo della velocità. Quindi:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = t^2\hat{i}+2\sqrt{2}t\hat{j}+4\hat{k} \Rightarrow |v| = \sqrt{(t^2)^2+(2\sqrt{2}t)^2+4^2} = \sqrt{t^4+8t^2+16} = \sqrt{(t^2+4)^2} = t^2+4$$

$$\Delta s = \int_{t_{10}}^{t_2} |v| dt = \int_0^2 (t^2+4)dt = \left[\frac{t^3}{3}+4t\right]_0^2 = \left(\frac{8}{3}+8\right)-(0+0) = \frac{8}{3}+8 = \frac{32}{3} = 10.7m$$

Quindi

$$<v_m> = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10.7}{2} = 5.3m/s$$

c) per trovare il raggio di curvatura al tempo t=1s devo prima trovare la velocità e l'accelerazione al tempo t=1s. Quindi:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = t^2\hat{i}+2\sqrt{2}t\hat{j}+4\hat{k} \Rightarrow \vec{v}(t=1) = \hat{i}+2\sqrt{2}\hat{j}+4\hat{k} \Rightarrow |v(t=1)| = \sqrt{1+8+16} = 5m/s$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 2t\hat{i}+2\sqrt{2}\hat{j} \Rightarrow \vec{a}(t=1) = 2\hat{i}+2\sqrt{2}\hat{j} \Rightarrow |a(t=1)| = \sqrt{4+8} = 2\sqrt{3}m/s^2$$

Adesso possiamo calcolare il versore tangente alla traiettoria all'istante t=0s

$$\hat{u}_t(t=0) = \frac{\vec{v}(t=1)}{|v(t=1)|} = \frac{\hat{i}+2\sqrt{2}\hat{j}+4\hat{k}}{5} = \frac{1}{5}\hat{i}+\frac{2\sqrt{2}}{5}\hat{j}+\frac{4}{5}\hat{k}$$

La componente scalare dell'accelerazione tangenziale la ottengo proiettando l'accelerazione vettoriale sul vettore tangente (quindi facendo il prodotto scalare):

$$a_t(t=1) = \hat{u}_t(t=1)\cdot\vec{a}(t=1) = \frac{2}{5}+\frac{8}{5} = 2m/s^2$$

La componente normale dell'accelerazione la trovo come differenza vettoriale fra l'accelerazione totale e l'accelerazione tangenziale (che si ottiene moltiplicando a_t per u_t)

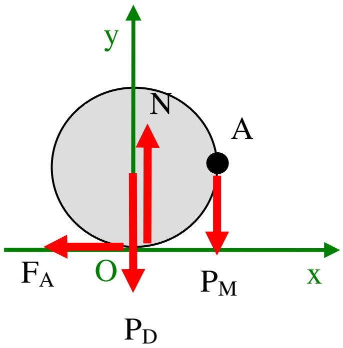
$$\vec{a}(t)=\vec{a}_t(t)+\vec{a}_n(t)\Rightarrow \vec{a}_n(t)=\vec{a}(t)-\vec{a}_t(t)=(2\hat{j}+2\sqrt{2}\hat{j})-(\frac{2}{5}\hat{i}+\frac{4\sqrt{2}}{5}\hat{j}+\frac{8}{5}\hat{k})=\left(2-\frac{2}{5}\right)\hat{i}+\left(2\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)-\frac{8}{5}\hat{k}$$

$$\vec{a}_n(t)=\frac{8}{5}\hat{i}+\frac{6\sqrt{2}}{5}\hat{j}-\frac{8}{5}\hat{k}\Rightarrow |a_n|=\sqrt{\frac{64}{25}+\frac{72}{25}+\frac{64}{25}}=\sqrt{\frac{200}{25}}=\frac{10\sqrt{2}}{5}=2\sqrt{2}\ m/s^2$$

Ora posso calcolare il raggio di curvatura al tempo t=1 s:

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{25}{2\sqrt{2}}=8{,}84m$$

EX 2



a) Nell'istante iniziale il sistema si trova nella posizione mostrata in figura e su di esso agiscono 4 forze: il Peso del disco, il peso della massa puntiforme, la forza di attrito statico tra disco e piano e la reazione vincolare del piano(P_D, P_M , F_A e N).

Prendendo un sistema di riferimento come in figura con l'asse z uscente dal disco,si scrive la seconda equazione cardinale della meccanica:

$$\vec{M}=I_O\vec{\alpha}$$

dove $\vec{M}$ é il momento della forza, I_O é il momento d'inerzia del sistema e $\vec{\alpha}$ é la sua accelerazione angolare, tutti valutati rispetto ad un asse passante per il punto O.

Col teorema di Huygens Steiner si ricava I_O →

$$I_O=I_{Disco}+I_M$$

dove, essendo il punto O coincidente con il punto di contatto si ottiene

$$I_{Disco}=\frac{1}{2}MR^2+MR^2=\frac{3}{2}MR^2$$

e essendo la massa puntiforme a distanza $\sqrt{2}R$ dal punto O → $I_M=\frac{M}{2}\left(\sqrt{2}R\right)^2=MR^2$

da cui → $I_O=\frac{5}{2}MR^2$

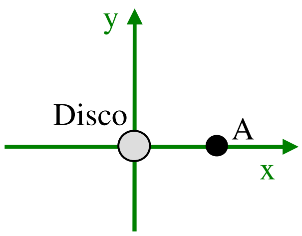
Al momento della forza contribuisce solo la forza peso della massa posta in A

$$\vec{M}=\vec{r}\times\frac{M}{2}\vec{g}=-\frac{RMg}{2}\hat{k}$$

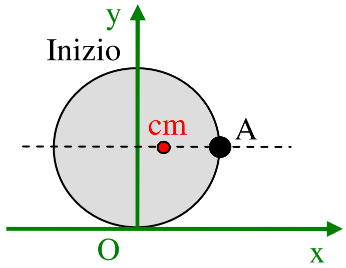
dunque sostituendo in $\vec{M}=I_O\vec{\alpha}$ → si ottiene $-\frac{RMg}{2}\hat{k}=\frac{5}{2}MR^2\vec{\alpha}$

da cui $\vec{\alpha}=-\frac{g}{5R}\hat{k}$

b) Le forze coinvolte o non fanno lavoro (F_A e N) oppure sono conservative (P_D e P_M) dunque si può utilizzare la conservazione dell'energia. Nell'istante iniziale il sistema é fermo dunque esso ha solo energia potenziale data dal peso del sistema per l'altezza del suo centro di massa. La posizione del centro di massa si ottiene supponendo il disco posto nel suo centro e la massa puntiforme a distanza R Prendendo un sistema di riferimento come in figura (il cm é indipendente dalla scelta del sistema di riferimento), il centro di massa si troverà sulla congiungente dei due punti rimanendo alla loro stessa altezza e sarà dato dalla formula:

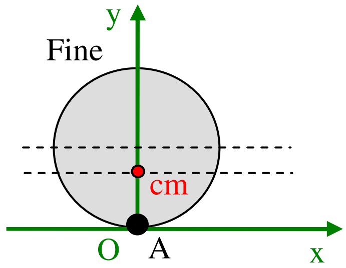


$$xcm = \frac{\frac{M}{2}R}{M + \frac{M}{2}} = \frac{\frac{M}{2}R}{\frac{3M}{2}} = \frac{R}{3}$$



Dunque, tenendo il sistema di riferimento della domanda a), l'energia nell'istante iniziale é data da:

$$E_{INI} = \left(M + \frac{M}{2} \right) gR = \frac{3MgR}{2}$$



Nell'istante finale il sistema avrà sia energia potenziale dato che ora il centro di massa si trova ad un'altezza pari a $\frac{2}{3}R$ che energia cinetica dato che esso sta anche ruotando attorno al punto di contatto, da cui:

$$E_{FIN} = \left(M + \frac{M}{2} \right) g \frac{2}{3} R + \frac{1}{2} I_o \omega^2 = MgR + \frac{1}{2} I'_o \omega^2$$

Attenzione: adesso il momento di inerzia é diverso da quello valutato nella domanda A perché la massa in A non contribuisce:

$$I'_o = I_{disco,cm} + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

per cui

$$E_{FIN} = MgR + \frac{1}{2} I'_o \omega^2 = MgR + \frac{1}{2}\frac{3}{2} MR^2 \omega^2 = MgR + \frac{3}{4} MR^2 \omega^2$$

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica si ottiene

$$E_{INI} = E_{FIN} \rightarrow$$

$$\frac{3MgR}{2} = MgR + \frac{3}{4} MR^2 \omega^2 \rightarrow \quad \frac{3}{4} MR^2 \omega^2 = \frac{MgR}{2} \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{2g}{3R} \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$$

EX 3

a) le dimensioni delle costanti si ottengo imponendo che tutte le componenti della forza siano nelle dimensioni idonee cioè $[N]=[MLT^{-2}]$. Quindi:

$$[\alpha]=\frac{[MLT^{-2}]}{[xy]}=\frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]}=[ML^{-1}T^{-2}]$$

$$[\beta]=\frac{[MLT^{-2}]}{[x^2]}=\frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]}=[ML^{-1}T^{-2}]$$

b) per verificare quando il campo è conservativo calcolo il rotore della forza. Imponendo che il rotore sia nullo ottengo la condizione sulle costanti che rendono il campo di forze conservativo.

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \delta/\delta x & \delta/\delta y & \delta/\delta z\\ F_x & F_y & F_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \delta/\delta x & \delta/\delta y & \delta/\delta z\\ 2\alpha xy & \beta x^2 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\hat{i}\left(\frac{\partial(0)}{\partial y}-\frac{\partial(\beta x^2)}{\partial z}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial(0)}{\partial x}-\frac{\partial(2\alpha xy)}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial(\beta x^2)}{\partial x}-\frac{\partial(2\alpha xy)}{\partial y}\right)=$$

$$=\hat{i}(0-0)-\hat{j}(0-0)+\hat{k}(2\beta x-2\alpha x)\Rightarrow\nabla\times\vec{F}=\vec{0}\Longleftrightarrow x(\beta-\alpha)=0\Rightarrow\alpha=\beta$$

Ovviamente il dominio di questa forza é $x\neq 0$.

Il campo è conservativo se α=β. Posso quindi calcolare l’energia potenziale di un campo di forze del tipo:

$\vec{F}(x,y,z)=2\alpha xy\hat{i}+\alpha x^2\hat{j}$

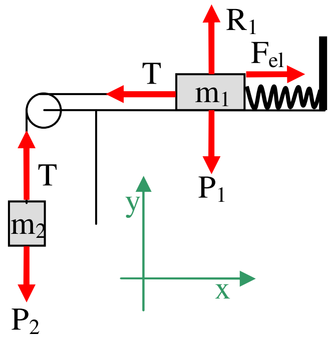
$$V=-\int_{0,0,0}^{x,y,z}\vec{F}d\vec{s}=-\int_{0,0,0}^{x,0,0}F_x dx-\int_{x,0,0}^{x,y,0}F_y dy-\int_{x,y,0}^{x,y,z}F_z dz=-\int_{0,0,0}^{x,0,0}(2\alpha xy)dx-\int_{x,0,0}^{x,y,0}(\alpha x^2)dy-\int_{x,y,0}^{x,y,z}(0)dz=$$

$$=\left[2\alpha y\frac{x^2}{2}\right]_{000}^{x00}-\left[\alpha x^2 y\right]_{x00}^{xy0}=-\alpha x^2 y$$

c) avendo trovato l’energia potenziale calcolare il lavoro diventa banale:

$$L_{A,B}=V_A-V_B=(-\alpha x^2 y)_{2,-2,-1}-(-\alpha x^2 y)_{0,1,0}=[-\alpha*2^2*(-2)]-[-\alpha*0*1]=8\alpha Joule$$

EX 4

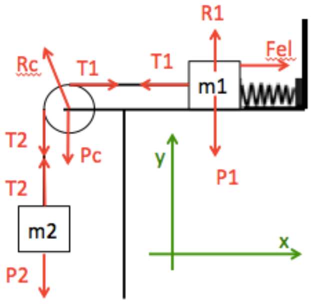


a) Partiamo dal caso in cui il sistema sia in equilibrio statico e la carrucola sia ideale e di massa trascurabile. Per studiare il sistema é sufficiente considerare le due masse (in figura sono rappresentate tutte le forze in gioco). La tensione ai capi della carrucola é la stessa. Essendo in equilibrio scriviamo che la risultante delle forze sulle due masse é nulla.:

$$\begin{cases}m_1\Rightarrow\vec{T}+\vec{P}_1+\vec{R}_1+\vec{F}_{el}=0\\ m_2\Rightarrow\vec{T}+\vec{P}_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m_1\ (x)\Rightarrow -T+k\Delta x=0\\ m_1\ (y)\Rightarrow R_1-m_1 g=0\\ m_2\ (y)\Rightarrow T-m_2 g=0\end{cases}$$

Da cui si deduce facilmente che $\Delta x = \dfrac{m_2 g}{k} = 0{,}147m$.

b) Vediamo il caso in cui il sistema sia in equilibrio statico e la carrucola sia reale.In figura sono segnate in rosso tutte le forze agenti sui tre corpi (massa 1, massa 2 e carrucola), mentre in verde è segnato il sistema di riferimento scelto. Essendo in equilibrio, applichiamo le equazioni della statica sui tre corpi, tenendo presente che la carrucola essendo reale presenta tensioni diverse ai suoi capi dove sono appesi i corpi e che essendo un corpo esteso deve annullarsi anche il momento delle forze. Perciò:



$$\begin{cases} m_1 \Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{F}_{el} = 0 \\ m_2 \Rightarrow \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = 0 \\ carr,\vec{F})\, \vec{T}_1 + \vec{P}_c + \vec{T}_2 + \vec{R}_C = 0 \\ carr,\vec{M})\, (R\hat{j}) \times (T_1 \hat{i}) + (-R\hat{i}) \times (-T_2 \hat{j}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ (x) \Rightarrow -T_1 + k\Delta x = 0 \\ m_1\ (y) \Rightarrow R_1 - m_1 g = 0 \\ m_2\ (y) \Rightarrow T_2 - m_2 g = 0 \\ carr,\vec{F},x) - R_{CX} + T_1 = 0 \\ carr,\vec{F},y)\ R_{CY} + T_2 - m_C g = 0 \\ carr,\vec{M}) - RT_1\hat{k} + RT_2\hat{k} = 0 \end{cases}$$

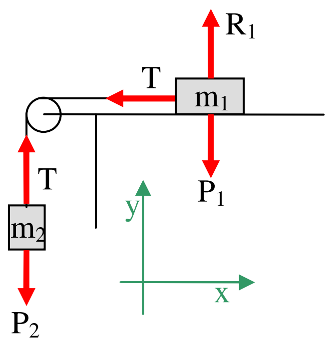
dove nella seconda colonna abbiamo proiettato le equazioni lungo gli assi del sistema di riferimento. Notiamo che bastano le equazioni $m_1(x)$, $m_2(y)$ e carr(M) per risolvere il problema. Allora risolvendo si ottiene

$T_1 = T_2$ e
$T_2 = m_2 * g$

perciò l'allungamento della molla é uguale al caso precedente:

$$-T + k\Delta x = 0 \Rightarrow k = \frac{T}{k} = \frac{m_2 g}{k} = 0{,}147m$$

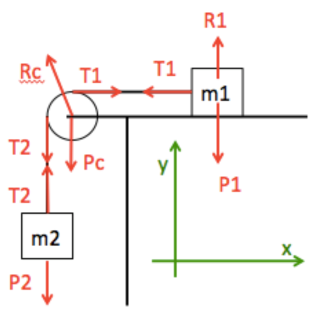
c) Consideriamo il caso in cui il sistema sia in moto (molla rotta) e la carrucola ideale (vedi disegno). La situazione e quella della domanda a) con la differenza che i due corpi non sono fermi, ma hanno la stessa accelerazione "a" (ovviamente lungo il filo).



$$\begin{cases} m_1 \Rightarrow \vec{T} + \vec{P}_1 + \vec{R}_1 = m_1 a \\ m_2 \Rightarrow \vec{T} + \vec{P}_2 = m_2 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ (x) \Rightarrow -T = -m_1 a \\ m_1\ (y) \Rightarrow R_1 - m_1 g = 0 \\ m_2\ (y) \Rightarrow T - m_2 g = -m_2 a \end{cases}$$

Da cui si ottiene che $a = \dfrac{m_2}{m_2 + m_1} g = 5.88\, m/s^2$

d) Consideriamo adesso il caso in cui il sistema sia in moto dopo la rottura della molla e la carrucola sia reale. Le equazioni da usare stavolta sono quelle della dinamica di punti materiali per le due masse 1 e 2 e la seconda equazione cardinale per la carrucola (per i nostri scopi non importa scrivere la prima):



$$\begin{cases} m_1 \Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{P}_1 + \vec{R}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ m_1 \Rightarrow \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2\vec{a}_2 \\ carr, \vec{M}) \ \ (R\hat{j})\times(T_1\hat{i}) + (-R\hat{i})\times(-T_2\hat{j}) = I\vec{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1(x) \Rightarrow -T_1 = -m_1 a_1 \\ m_1(y) \Rightarrow R_1 - m_1 g = 0 \\ m_2(y) \Rightarrow T_2 - m_2 g = -m_2 a_2 \\ carr, \vec{M}) - RT_1\hat{k} + RT_2\hat{k} = I\alpha\hat{k} \end{cases}$$

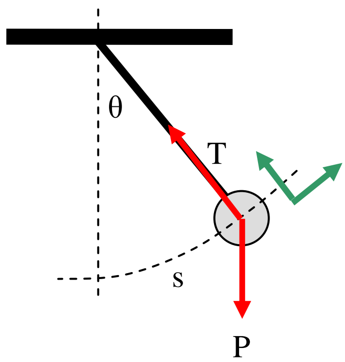
$$\begin{cases} T_1 = m_1 a_1 \\ T_2 = m_2(g - a_2) \\ -RT_1 + RT_2 = I\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = m_1 a_1 \\ T_2 = m_2(g - a_2) \\ -RT_1 + RT_2 = \frac{1}{2}MR^2\alpha \end{cases}$$

Adesso notiamo che essendo un sistema legato $a_1=a_2$ e che l'accelerazione angolare della carrucola è legata all'accelerazione del sistema visto che si muove di moto di puro rotolamento quindi $\alpha=a/R$. Inserendo queste informazioni nel sistema sopra otteniamo un sistema di tre equazioni nelle tre incognite richieste, ovvero l'accelerazione del sistema e le tensioni dei fili che legano le masse:

$$\begin{cases} T_1 = m_1 a \\ T_2 = m_2(g - a) \\ -RT_1 + RT_2 = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = m_1 a \\ T_2 = m_2(g - a) \\ -T_1 + T_2 = \frac{1}{2}Ma \end{cases} \Rightarrow$$ da cui si ricava l'accelerazione del sistema

$a = \dfrac{2m_2 g}{2m_2 + 2m_1 + M} = \dfrac{g}{3} = 3.27\ m/s^2$ Si può notare che la soluzione coincide con quella della domanda c nel caso la massa della carrucola sia nulla e che ovviamente l'accelerazione é minore del caso precedente.

EX 5



a) L'ascensore procede a velocità costante e dunque sulla massa m del pendolo agiscono solo le forze reali (l'ascensore é un sistema inerziale) come mostrato in figura. Per trovare il periodo del pendolo o si ricorda a memoria ($T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 2.0\ s$), oppure si ricava dall'equazione del moto. Scegliendo un sistema di coordinate intrinseche con i versori tangente e normale alla traiettoria (versori verdi nella figura). Scriviamo la seconda legge della dinamica F=ma sulla massa m del pendolo:

$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$

che scomposto nelle due direzioni delle coordinate intrinseche diventa

$$\begin{cases} \hat{n} \Rightarrow T - P\cos\theta = m\dfrac{v^2}{l} \\ \hat{t} \Rightarrow -Psen\theta = m\dfrac{d^2 s}{dt^2} \end{cases}$$

Dove lungo la direzione normale l'accelerazione é quella centripeta e lungo la direzione tangenziale e la derivata seconda dello spazio percorso s sulla traiettoria. L'equazione del moto si ottiene dall'equazione lungo la direzione tangente che, approssimata per le piccole oscillazioni $sen\theta = \theta$, e scrivendo lo spazio percorso in funzione dell'angolo $s = l\theta$ diventa:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

poiché la quantità $\frac{g}{l}$ é positiva ed ha le dimensioni di t^{-2} possiamo introdurre la quantità $\omega^2 = \frac{g}{l}$ →

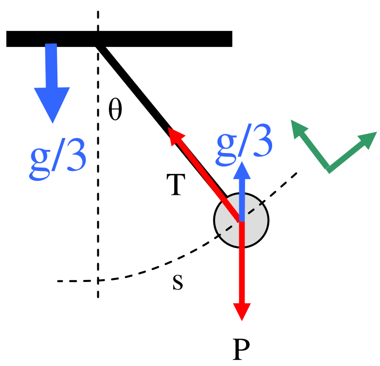
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

dove ω é detto pulsazione. Il periodo si ricava dalla relazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2.0\ s$$

b) soluzione veloce

Si capisce che siccome l'ascensore ha un'accelerazione g/3 verso il basso, la massa del pendolo sentirà per reazione un'accelerazione g/3 verso l'alto (vedi figura). Essendo il periodo del pendolo dato da



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

dove il termine g indica la risultante delle forze lungo la direzione tangenziale adesso il periodo sarà dato da:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - \frac{g}{3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{2g}{3}}} = 2.46\ s$$

b) Soluzione dettagliata

L'ascensore cade con un'accelerazione pari a g/3 verso il basso. L'ascensore é un sistema NON inerziale dunque sulla massa m del pendolo si avranno delle forze fittizie (vedi figura) . Scriviamo la F=ma in un sistema di riferimento non inerziale

$$\vec{F}' = \vec{F}_{reali} + \vec{F}_{fittizie} = \vec{F}_{reali} - 2m\vec{\omega}' \times \vec{v}' - m\vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}}' \times \vec{r}' - ma_{oo'}$$

dove $\vec{\omega}'$ (da non confondere con ω pulsazione del pendolo) é la velocità angolare del sistema non inerziale (ascensore). Poiché l'ascensore compie un movimento rettilineo tutti i termini contenenti $\vec{\omega}'$ sono nulli e l'unica forza apparente sulla massa m é data dal termine $-ma_{oo'}$ che dà una forza verso l'alto (vedi figura). L'espressione sopra diventa:

$$\vec{F}' = \vec{F}_{reali} - m\vec{a}_{oo'} = \vec{T} + \vec{P} - m\frac{\vec{g}}{3}$$

Utilizzando come prima le coordinate intrinseche nelle direzioni tangente e normale si ottiene:

$$\begin{cases} \hat{n} \Rightarrow T - P\cos\theta + m\dfrac{g}{3}\cos\theta = m\dfrac{v^2}{l} \\ \hat{t} \Rightarrow -Psen\theta + m\dfrac{g}{3}sen\theta = m\dfrac{d^2s}{dt^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{n} \Rightarrow T - \dfrac{2}{3}mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{l} \\ \hat{t} \Rightarrow -m\dfrac{2g}{3}sen\theta = m\dfrac{d^2s}{dt^2} \end{cases}$$

e dunque (seguendo le considerazioni già fatte nella domanda a) lungo la componente tangenziale l'equazione diventa:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{3}\frac{g}{l}\theta = 0$$

dove la pulsazione é data da $\omega^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{l}$ → e il periodo risulta

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{2g}{3}}} = 2.46\ s$$