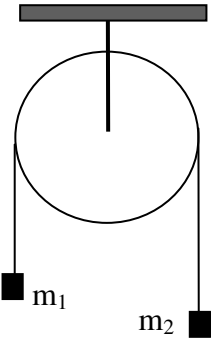


1) Oreste Pestalozzi, centravanti della Sassisgonfi Football Club, tira una punizione da 40 m dalla porta. Per rendere la traiettoria più difficile da parare decide di calciare imprimendo alla palla un angolo di $\alpha = 45^\circ$ rispetto al terreno e di collocare la palla sotto la traversa a 2 metri da terra. In assenza di attrito, determinare:

- il modulo della velocità iniziale v_0 della palla;
- modulo, direzione e verso del vettore velocità della palla quando entra in porta;
- se viene posta una barriera a 10 m dalla palla ed è alta 2 m, questa riesce ad intercettare la palla?

2) Un sistema è composto da 2 corpi puntiformi di massa $m_1 = 1 \text{ kg}$ ed $m_2 = 2 \text{ kg}$ collegati da una corda inestensibile e di massa trascurabile che scorre senza attrito attorno ad una puleggia anch'essa di massa trascurabile (vedi figura). La puleggia è attaccata al soffitto per mezzo di un'altra corda anch'essa inestensibile e di massa trascurabile. Determinare:



- l'accelerazione del sistema;
- la tensione della corda che collega i corpi di massa m_1 ed m_2 ;
- la tensione della corda che tiene attaccata la puleggia al soffitto.

3) Una molla ideale di costante elastica $k = 40 \text{ N/m}$ e lunghezza a riposo nulla, è fissata al soffitto di un treno e all'altra estremità è attaccato un corpo puntiforme di massa $m_1 = 1 \text{ kg}$. Nell'ipotesi che il sistema sia in equilibrio stabile e che il treno proceda di moto rettilineo uniforme con $v_t = 50 \text{ km/h}$, determinare:

- l'elongazione della molla;
- l'angolo che essa forma con la verticale al soffitto del treno.

Ad un istante il treno accelera con accelerazione $a_t = 5 \text{ m/s}^2$, determinare, sempre in condizioni di stabilità,:

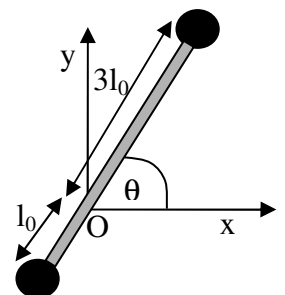
- l'elongazione della molla;
- l'angolo che essa forma con la verticale al soffitto del treno.

4) Un corpo è soggetto all'azione di 2 forze: $\vec{F}_1 = B(y^2 z^3 - x^2 y z^2)\hat{i} + (Ax^3 z - Bxyz^3)\hat{j} + 2B(xy^2 z^2 - x^2 y^2 z)\hat{k}$ ed $\vec{F}_2 = -\frac{B}{2}(y^2 z^3 - 2x^2 y z^2)\hat{i} + (2Bxyz^3 - Ax^3 z)\hat{j} + B(2x^2 y^2 z - \frac{1}{2}xy^2 z^2)\hat{k}$ dove x, y, z sono le coordinate cartesiane,

$A = 1 \text{ N/m}^4$ e $B = 2 \text{ N/m}^5$. Determinare:

- se il campo della forza risultante è conservativo;
- l'energia potenziale in un punto $P(x, y, z)$, nel caso il campo della forza risultante sia conservativo;
- il lavoro della forza risultante quando sposta il punto di applicazione da $P(1, 1, 1)$ a $Q(2, 2, 2)$.

5) Un sistema è costituito da una sbarra omogenea di lunghezza $4l_0$ (con $l_0 = 1 \text{ m}$), sezione trasversale trascurabile e massa $m_s = 1 \text{ kg}$ e da due corpi puntiformi ciascuno di massa $m_c = 1 \text{ kg}$ posti all'estremità della sbarra. Il sistema può ruotare senza attrito su un piano verticale attorno ad un asse fisso passante per O distante l_0 dall'estremità della sbarra (vedi figura). Inizialmente la sbarra è tenuta ferma ad un angolo $\vartheta = 60^\circ$ rispetto all'orizzontale, poi è lasciata libera. Determinare:



- il momento di inerzia del sistema rispetto al punto O;
- il vettore accelerazione angolare del sistema appena lasciata libera la sbarra;
- il modulo del vettore velocità angolare ω nel momento in cui la sbarra passa per l'orizzontale;

Si ricordi che il momento d'inerzia di una sbarra lunga d rispetto al suo cm è $I_{CM} = md^2 / 12$.

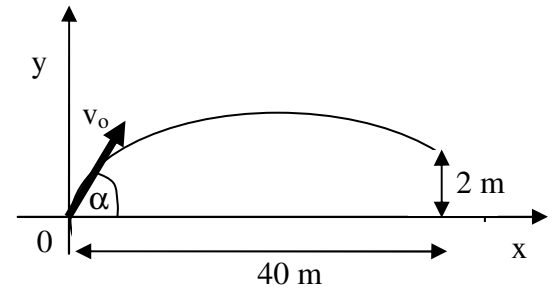
6) Enunciare e discutere il teorema di König.

Soluzioni compito:

Esercizio 1:

a)

Il moto della palla è parabolico. Scegliamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con l'origine O nel punto dove viene calciata la palla (vedi figura). Non essendoci alcuna forma di attrito, il moto è rettilineo uniforme lungo l'asse x, mentre ha una accelerazione $-g$ lungo l'asse y. Le condizioni iniziali sono che all'istante iniziale $t = 0$ la posizione della palla è $\vec{P}(t = 0) = (0, 0)$



e la sua velocità $\vec{v}(t = 0) = (v_o \cos \alpha, v_o \sin \alpha) = v_o (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Scriviamo la $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} F_x = ma_x = 0 \\ F_y = ma_y = -mg \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g \end{cases} \quad \text{e integrando} \quad \begin{cases} v_x = v_o \cos \alpha \\ v_y = v_o \sin \alpha - gt \end{cases} \quad \text{continuando ad}$$

integrare possiamo ottenere la posizione in funzione del tempo:

$$\begin{cases} x = v_o \cos \alpha t \\ y = v_o \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Queste sono 2 equazioni in 2 incognite v_o e t ; imponendo che la palla passi per il punto $\vec{P} = (x_p, y_p) = (40, 2)$ e che $\alpha = 45^\circ$ si ottiene:

$$\begin{cases} x_p = v_o \frac{\sqrt{2}}{2} t \\ y_p = v_o \frac{\sqrt{2}}{2} t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{x_p}{v_o} \\ v_o = \frac{2}{t\sqrt{2}} \left(y_p + \frac{1}{2}gt^2 \right) \end{cases} \quad \text{sostituendo si ottiene} \quad \begin{cases} v_o = 20.3 \text{ m/s} \\ t = 2.78 \text{ s} \end{cases}$$

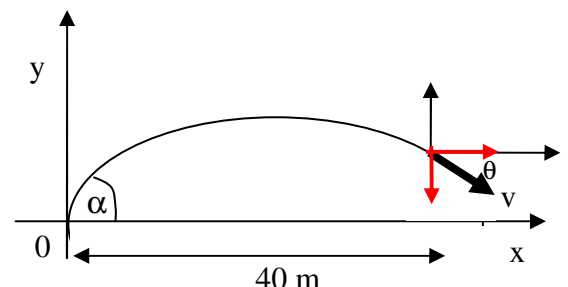
b) l'angolo con cui la palla entra in porta è ricavabile dal rapporto tra la componente y ed x della velocità nel punto in cui la palla entra in porta. Dalle equazioni

$$\begin{cases} v_x = v_o \cos \alpha \\ v_y = v_o \sin \alpha - gt \end{cases} \quad \text{dove si sostituisce } t = 2.78 \text{ s}, v_o = 20.3 \text{ m/s e } \alpha = 45^\circ \text{ si ottiene}$$

$$\begin{cases} v_x = 14.3 \text{ m/s} \\ v_y = -12.9 \text{ m/s} \end{cases} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 19.3 \text{ m/s}$$

e facendo il rapporto tra le componenti della velocità si ricava:

$$\vartheta = \arctg\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \arctg\left(\frac{-12.9}{14.3}\right) = \arctg(-0.9) \rightarrow \vartheta = -42.1^\circ$$



c) la barriera è nel punto $\vec{B} = (10, 2)$ dunque è sufficiente vedere se la traiettoria della palla nel punto

$x = 10 \text{ m}$ è più alta di 2 m . L'equazione della traiettoria la ricaviamo da
$$\begin{cases} x = v_o \cos \alpha t \\ y = v_o \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \text{dove}$$

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_o \cos \alpha} \\ y = v_o \sin \alpha \left(\frac{x}{v_o \cos \alpha} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_o \cos \alpha} \right)^2 \end{cases}$$

da cui si ricava la traiettoria:

$$y = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_o^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

sostituendo $x = 10 \text{ m}$ si ottiene $y = 7.6 \text{ m}$ e si deduce che la barriera non riesce ad intercettare la palla.

Esercizio 2

a) b)

Per risolvere questo problema è necessario scrivere la $\vec{F} = m\vec{a}$ per i corpi m_1 ed m_2 (non si considera la carrucola in quanto ha massa trascurabile).

Le forze sono tutte dirette verticalmente, dunque è sufficiente scegliere un sistema di riferimento con il solo asse verticale (cioè un asse coincidente con la direzione del moto) prendendo come verso (scelta arbitraria) quello in cui il corpo di massa m_1 sale verso l'alto e di conseguenza il corpo di massa m_2 verso il basso (vedi figura); capiremo dal segno della soluzione se la scelta del verso dell'asse è corretta o no. Data l'inestensibilità della corda, l'accelerazione del sistema è la stessa per i 2 corpi: se uno sale con una certa accelerazione, l'altro scende con la stessa accelerazione.

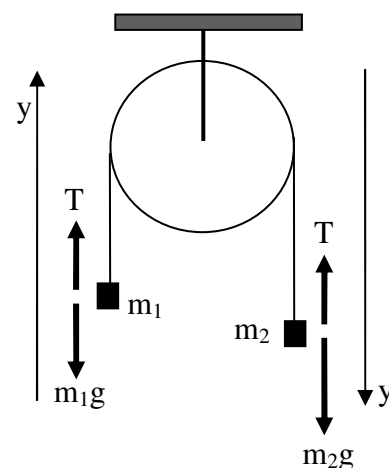
Scriviamo la $\vec{F} = m\vec{a}$:

$$\text{corpo } m_1 \text{ ed } m_2 \quad \begin{cases} T - m_1 g = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases}$$

questo è un sistema a 2 equazioni in 2 incognite (a e T) che risolto dà il seguente risultato:

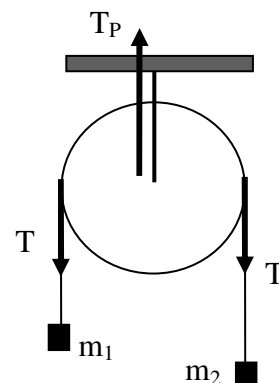
$$a = \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} g = \frac{g}{3} = 3.27 \text{ m/s}^2 \quad \text{e} \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{4}{3} g = 13.1 \text{ N}$$

Dal risultato si evince che se i corpi m_1 ed m_2 avessero stessa massa otterremo $a = 0$ e $T = mg$ come ci si attende. Se invece $m_2 > m_1$ allora a risulta positiva (cioè verso l'alto per m_1 e verso il basso per m_2).



c) Sulla puleggia agiscono 3 forze: la tensione della corda che tiene appesa la puleggia T_p e le 2 tensioni T (soluzione del punto b) della corda cui sono appese i corpi di massa m_1 ed m_2 (vedi figura). Visto che la puleggia è ferma, la sommatoria delle forze applicate ad essa deve essere nulla, anche in questo caso tutte le forze sono dirette lungo l'asse y e dunque omettiamo il segno di vettore:

$$T_p - T - T = 0 \rightarrow T_p = 2T = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{8}{3} g = 26.2 \text{ N}$$

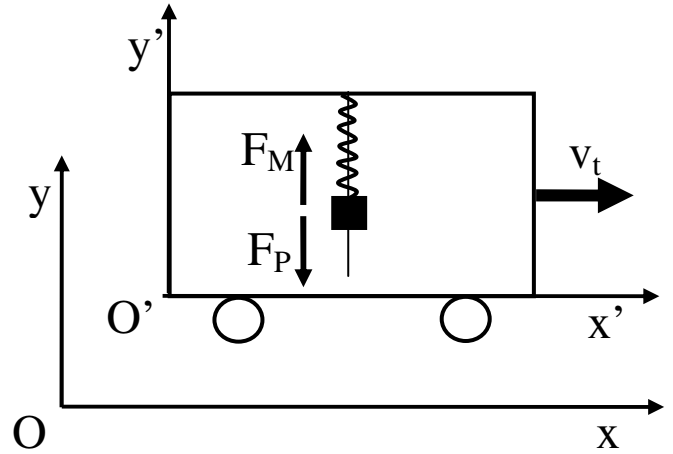


Ovviamente nel caso avessimo un esercizio di statica cioè $m_1 = m_2 = m$ le 2 masse non si muoverebbero e la tensione risulterebbe $T_p = 2T = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}g = \frac{4m^2}{2m}g = 2mg$ come atteso.

Esercizio 3

a) b)

Prendiamo un sistema di riferimento OXY fisso rispetto al terreno ed uno mobile O'X'Y' solidale al treno: i due sistemi viaggiano ad una velocità $\vec{v}_t$ l'uno rispetto all'altro (stessa situazione delle trasformazioni di Galileo). Siccome i due sistemi di riferimento hanno accelerazione nulla (in quanto uno è fermo e l'altro si muove di moto rettilineo uniforme), sono inerziali e in entrambi non si sviluppa alcuna forza fittizia. Dovendo studiare le forze che agiscono sul corpo di massa m_1 possiamo scegliere uno qualsiasi tra questi due sistemi di riferimento che il risultato non cambierà. In



condizione di staticità, le uniche forze reali che agiscono sul corpo di massa m_1 sono la forza peso $\vec{F}_p$ e la forza della molla $\vec{F}_M$, dirette entrambe lungo la verticale (vedi figura), dunque:

$$\vec{F}_M = \vec{F}_p \rightarrow Kl = m_1g \rightarrow \text{elongazione } l = \frac{m_1g}{k} = \frac{9.81}{40} = 0.245 \text{ m}$$

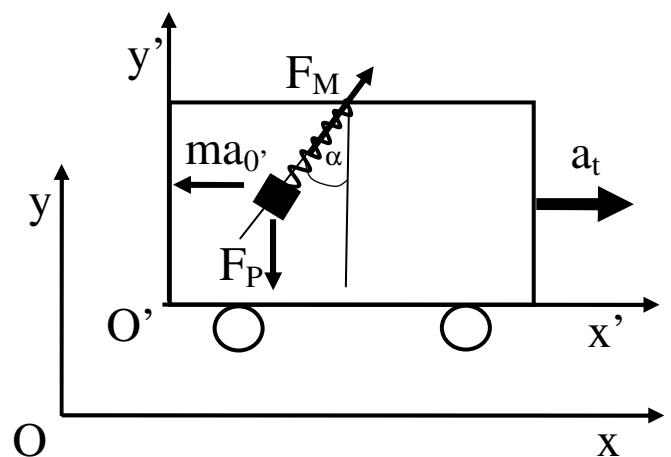
L'angolo che la molla forma con la verticale al soffitto è $\alpha = 0$

in quanto tutte le forze sono dirette lungo la verticale. Notare che entrambe le quantità sono indipendenti dalla velocità del treno.

d) e)

Come nel caso precedente prendiamo un sistema di riferimento OXY fisso rispetto al terreno ed uno mobile O'X'Y' solidale al treno: in questo caso il sistema mobile ha un'accelerazione non nulla rispetto al sistema fisso e dunque non essendo un sistema inerziale, al suo interno “nascono” le forze fittizie. Poiché il sistema è in condizioni di staticità, nel sistema mobile il corpo di massa m_1 è fermo, dunque su di lui la sommatoria delle forze $\vec{F}'$ è zero:

$$\vec{F}' = \vec{F}_{\text{reali}} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m\vec{a}_{oo'} = 0$$



Dove $\vec{F}_{\text{reali}} = \vec{F}_p + \vec{F}_M$ e di tutti i termini fittizi l'unico diverso da zero è $m\vec{a}_{oo'}$ in quanto in tutti compare la

velocità angolare $\vec{\omega}$ o l'accelerazione angolare $\dot{\vec{\omega}}$ che sono entrambi nulli avendo il sistema mobile il solo moto traslazionale rispetto al fisso. Sostituendo i termini otteniamo:

$$\vec{F}_p + \vec{F}_M - m_1\vec{a}_{oo'} = 0 \rightarrow kl(\sin\alpha\hat{i}' + \cos\alpha\hat{j}') - m_1g\hat{j}' - m_1a_t\hat{i}' = 0 \quad \text{scomponendo lungo gli assi } \hat{i}' \text{ e } \hat{j}'$$

otteniamo:

$$\begin{cases} kl(\sin\alpha \hat{i}') - m_1 a_t \hat{i}' = 0 \\ kl(\cos\alpha \hat{j}') - m_1 g \hat{j}' = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} kl \sin\alpha = m_1 a_t \\ kl \cos\alpha = m_1 g \end{cases} \rightarrow \text{queste sono 2 equazioni in 2 incognite (} l \text{ ed } \alpha \text{) che}$$

$$\text{risolte danno: } \begin{cases} tg\alpha = \frac{a_t}{g} \\ l = \frac{m_1}{k} \sqrt{a_t^2 + g^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \arctg\left(\frac{5}{9.81}\right) = 27^\circ \\ l = \frac{m_1}{k} \sqrt{a_t^2 + g^2} = 0.025 \sqrt{5^2 + 9.81^2} = 0.275 \text{ m} \end{cases}$$

Da notare che la molla è maggiormente estesa quando il treno ha un moto accelerato rispetto a quando ha un moto uniforme.

Esercizio 4

a)

La risultante delle forze è data da: $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{B}{2} y^2 z^3 \hat{i} + Bxyz^3 \hat{j} + \frac{3}{2} Bxy^2 z^2 \hat{k}$.

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo.

b)

Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine $O(0,0,0)$ ed un punto generico $C(x,y,z)$ si ottiene l'energia potenziale $V = -\frac{1}{2} Bxyz^3$.

c)

Il lavoro tra i punti $P(1,1,1)$ e $Q(2,2,2)$ si ottiene dalla relazione:

$$L_{PQ} = V(P) - V(Q) = -\frac{B}{2} + \frac{64}{2} B = \frac{63}{2} B = 63 \text{ J}$$

Esercizio 5

a)

Il momento di inerzia totale del sistema rispetto all'asse di rotazione I_T è dato dalla somma del momento di inerzia della sbarra I_S sommato a quello dei due corpi I_{C1} e I_{C2} (posti a diversa distanza dall'asse di rotazione):

$$I_T = I_S + I_{C1} + I_{C2} \text{ dove}$$

$$I_S = \frac{m_s (4l_o)^2}{12} + m_s (l_o)^2 = \frac{16m_s l_o^2}{12} + m_s l_o^2 = \frac{7m_s l_o^2}{3} \quad \text{ottenuto usando il teorema di Huygens-Steiner}$$

$$I_{C1} = m_C (l_o)^2 \text{ e}$$

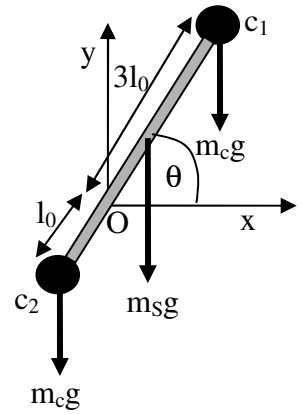
$$I_{C2} = m_C (3l_o)^2 = 9m_C l_o^2.$$

Sommando tutti i termini si ottiene:

$$I_T = \frac{7m_s l_o^2}{3} + m_C l_o^2 + 9m_C l_o^2 = \frac{7m_s l_o^2}{3} + 10m_C l_o^2 = \frac{7}{3} + 10 = \frac{37}{3} \text{ kg m}^2$$

b)

L'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ è determinabile dalla seconda equazione cardinale della meccanica: $\vec{M} = I_T \vec{\alpha}$. Sul sistema agiscono 4 forze: le due forze peso dei corpi 1 e 2, la forza peso della sbarra applicata nel suo centro di massa (punto di mezzo) e la reazione del vincolo applicata in O (vedi figura). Dovendo calcolare il momento della forza $\vec{M}$ rispetto al punto O, intervengono solo le forze peso e non la reazione vincolare (che è applicata in O), come mostrato in figura.



Calcoliamo il momento della forza dei vari corpi del sistema rispetto al punto O e scegliendo come assi x, y, z quelli in figura con l'asse z uscente dal foglio.:

corpo c₁

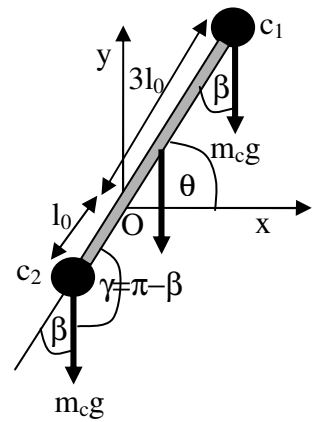
$$\vec{M}_{c_1} = \vec{r} \wedge \vec{F} = -3l_0 m_c g \sin \beta \hat{k} = -3l_0 m_c g \sin \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) \hat{k} = -3l_0 m_c g \cos \vartheta \hat{k}$$

corpo c₂

$$\vec{M}_{c_2} = \vec{r} \wedge \vec{F} = l_0 m_c g \sin(\pi - \beta) \hat{k} = l_0 m_c g \sin \left(\frac{\pi}{2} + \vartheta \right) \hat{k} = l_0 m_c g \cos \vartheta \hat{k}$$

Sbarra

$$\vec{M}_s = \vec{r} \wedge \vec{F} = -l_0 m_s g \sin \beta \hat{k} = -l_0 m_s g \sin \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) \hat{k} = -l_0 m_s g \cos \vartheta \hat{k}$$



Risultante del momento della forze $\vec{M}_T = \vec{M}_s + \vec{M}_{c_1} + \vec{M}_{c_2} = -l_0 g \cos \vartheta (2m_c + m_s) \hat{k}$.

$$\text{Dunque } \vec{\alpha} = \frac{\vec{M}}{I_T} = \frac{-l_0 g \cos \vartheta (2m_c + m_s) \hat{k}}{\frac{7m_s l_o^2}{3} + 10m_c l_o^2} = \frac{-g \frac{1}{2} 3 \hat{k}}{\frac{37}{3}} = -\frac{9g}{74} \hat{k} = -1.19 \hat{k} \text{ rad/s}^2$$

c)

Le forze che agiscono sul sistema o sono forze che non compiono lavoro (la forza del vincolo in O) o sono forze conservative (le 3 forze peso) e dunque posso applicare la conservazione dell'energia meccanica. Scegliendo lo stesso sistema di riferimento mostrato in figura, otteniamo

$E_{ini} = E_{fin}$. In particolare:

$$E_{ini} = -m_c g l_o \sin \vartheta + m_c g 3l_o \sin \vartheta + m_s g l_o \sin \vartheta = g l_o \sin \vartheta (2m_c + m_s)$$

$$E_{fin} = \frac{1}{2} I_T \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{7m_s l_o^2}{3} + 10m_c l_o^2 \right) \omega^2$$

dove si può notare che nell'istante iniziale si ha solo energia potenziale, mentre in quello finale solo cinetica.

Dunque $gl_o \sin \vartheta (2m_c + m_s) = \frac{1}{2} \left(\frac{7m_s l_o^2}{3} + 10m_c l_o^2 \right) \omega^2$

da cui si ricava la velocità angolare $\omega = \sqrt{\frac{gl_o \sin \vartheta (2m_c + m_s)}{\frac{1}{2} \left(\frac{7m_s l_o^2}{3} + 10m_c l_o^2 \right)}} = \sqrt{\frac{3g \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{37}{3}}} = \sqrt{\frac{9g\sqrt{3}}{74}} = 1.44 \text{ rad/s}$

Ovviamente l'energia finale poteva anche essere scritta nel modo seguente:

$$E_{fin} = \frac{1}{2} I_s \omega^2 + \frac{1}{2} m_{c1} v^2 + \frac{1}{2} m_{c2} v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{7m_s l_o^2}{3} \right) \omega^2 + \frac{1}{2} m_{c1} (3l_o \omega)^2 + \frac{1}{2} m_{c2} (l_o \omega)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{7m_s l_o^2}{3} \right) \omega^2 + 10m_c l_o^2 \omega^2$$

ottenendo lo stesso risultato precedente.