FISICA GENERALE T-A 23 luglio 2012

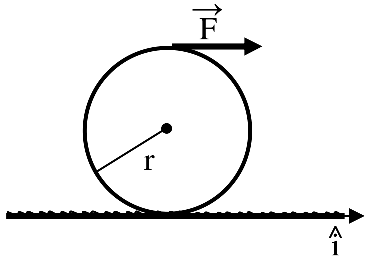
prof. spighi (CdL ingegneria Energetica)

1) Un punto materiale si muove nello spazio secondo la seguente legge oraria:
$x(t) = t^2 + 3t; \quad y(t) = 2t^2 + 5; \quad z(t) = 2\sqrt{2}\,t;$ determinare:

a) la velocità istantanea vettoriale;
b) l'accelerazione istantanea vettoriale;
c) l'angolo formato dai vettori velocità ed accelerazione al tempo t = 2s

2) Un disco rigido ed omogeneo, di massa $m = 1\,kg$, raggio $r = 0.1\,m$ rotola senza strisciare su di un piano orizzontale scabro lungo la direzione $\hat{\imath}$. Nell'estremo superiore del disco è applicata una forza costante $\vec{F} = 10\,\hat{\imath}\;N$. Determinare le espressioni delle seguenti quantità:

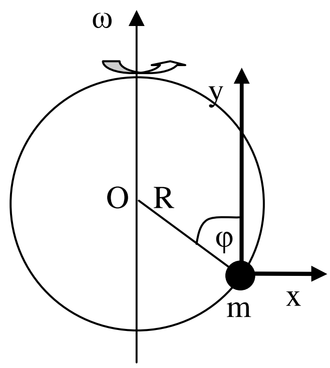
a) il modulo dell'accelerazione del centro di massa del disco;
b) la forza di attrito fornita dal piano orizzontale scabro;
c) il momento angolare del disco (rispetto al suo centro di massa) al tempo $t = 5\,s$ supponendo che la sua velocità nell'istante iniziale sia nulla.



Il momento di inerzia di un disco (massa M e raggio R) rispetto al suo cm è: $I_{disco} = \frac{1}{2}MR^2$

3) Una pallina di massa $m = 10\,g$ è vincolata a muoversi su una guida a forma di anello circolare di raggio $R = 10\,cm$ posta in un piano verticale. L'anello è messo in rotazione attorno al diametro verticale con una velocità angolare ω=14 rad/s. Calcolare rispetto a un sistema solidale con la massa *m* (vedi figura):

a) l'angolo φ rispetto alla verticale in cui si trova la pallina in condizioni di equilibrio;
b) la reazione vincolare della guida sulla pallina



4) Data la forza $\vec{F}(x, y, z) = -\frac{Az}{y^2}\hat{\imath} + \frac{2Axz}{y^3}\hat{\jmath} - \frac{Ax}{y^2}\hat{k}$ determinare:

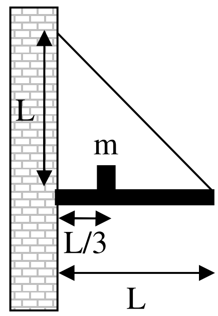
a) le dimensioni fisiche della costante A e dire se il campo è conservativo nel dominio y>0;
b) nel caso il campo sia conservativo calcolarne l'energia potenziale in un punto P(x,y,z) in tale dominio ponendo lo zero dell'energia potenziale nel punto R(1,1,1);
c) il lavoro compiuto dalla forza quando sposta il punto di applicazione da R(1,1,1) a S(2,2,2).

5) Un'asta di lunghezza $L = 50\,cm$ e massa $M = 0.5\,kg$ è incernierata ad un estremo ad un muro tramite un perno privo di attrito, mentre l'altro estremo è tenuto orizzontalmente da una corda fissata al muro a distanza L come in figura. Una massa puntiforme $m = 2\,kg$ è posta a distanza $L/3$ dal perno. Calcolare, in condizioni di equilibrio:

a) modulo, direzione e verso della tensione della fune;
b) modulo, direzione e verso della reazione vincolare del perno;

Se ad un certo istante la corda si spezza , determinare:

c) l'accelerazione angolare del sistema nell'istante iniziale.



Il momento di inerzia di un'asta (massa M e lunghezza L) rispetto al suo cm è: $I_{asta} = \frac{1}{12}ML^2$

6) Enunciare e discutere il teorema di König per l'energia cinetica.

Soluzioni compito:

Esercizio 1:

a)

Velocità istantanea: $\begin{cases} v_x(t) = 2t+3 \\ v_y(t) = 4t \\ v_z(t) = 2\sqrt{2} \end{cases}$ → $\vec{v}(t) = (2t+3)\hat{\imath} + 4t\,\hat{\jmath} + 2\sqrt{2}\,\hat{k}$

b)

Accelerazione istantanea $\begin{cases} a_x(t) = 2 \\ a_y(t) = 4 \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$ → $\vec{a}(t) = 2\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}$

c)

Angolo tra velocità ed accelerazione al tempo $t = 2\ s$:

$\vec{v}(2) = 7\hat{\imath} + 8\,\hat{\jmath} + 2\sqrt{2}\,\hat{k}$

$\vec{a}(2) = 2\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}$

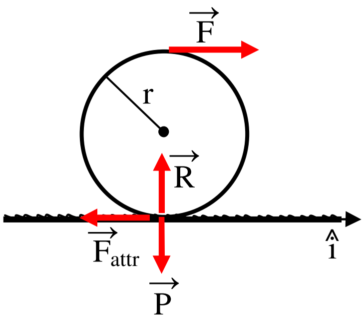
Possiamo utilizzare il prodotto scalare

$$\vec{v}(t)\bullet\vec{a}(t) = |\vec{v}(t)||\vec{a}(t)|\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{v}(t)\bullet\vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)||\vec{a}(t)|} \quad \rightarrow \text{che per} \quad t = 2\ s$$

$$\cos\alpha = \frac{\left(7\hat{\imath} + 8\,\hat{\jmath} + 2\sqrt{2}\,\hat{k}\right)\bullet\left(2\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}\right)}{\sqrt{121}\ \sqrt{4+16}} = \frac{14+32}{11\ \sqrt{20}} = 0.935 \quad \rightarrow \quad \alpha = 20.8^\circ$$

Esercizio 2:

a,b)



Il problema si risolve scrivendo le equazioni cardinali della meccanica. Sul sistema agiscono 4 forze (figura a lato) e decido di porre la forza di attrito con verso opposto al moto (se sarà corretto otterrò un valore positivo, altrimenti se otterrò un valore negativo significherà che il verso deve essere invertito).

$\begin{cases} \vec{F}_{tot} = m\vec{a}_{cm} \\ \vec{M}_{tot} = I\vec{\alpha} \end{cases}$ dove $\vec{F}_{tot}$ e $\vec{M}_{tot}$ sono rispettivamente la risultante delle forze e dei momenti delle forze. $\begin{cases} \vec{F}_{tot} = \vec{F} + \vec{F}_{attr} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_{cm} \\ \vec{M}_{tot} = I\vec{\alpha} \end{cases}$

dove $\vec{F}_{attr}$, $\vec{P}$ e $\vec{R}$ sono rispettivamente la forza di attrito, il peso del disco e la reazione del piano orizzontale.

(**Attenzione**: non si può scrivere $\left|\vec{F}_{attr}\right| = \mu_S mg$ poiché questa è la forza **massima** dell'attrito statico, ma sul disco potrebbe agire anche solo una parte di essa (non lo sappiamo a priori), dunque la $\vec{F}_{attr}$ è un'incognita del problema).

Sriviamo le equazioni cardinali della meccanica lungo le varie coordinate:

Prima equazione della dinamica: $\begin{cases} \hat{i} \\ \hat{j} \end{cases} \begin{cases} F - F_{attr} = ma_{cm} \\ R - P = 0 \end{cases}$

Seconda equazione della dinamica: ha componente solo lungo z dove:

$$I = \frac{1}{2}mr^2 \quad , \quad \vec{\alpha} = -\frac{a_{cm}}{r}\hat{k} \quad \text{e} \quad \vec{M}_{tot} = \left(\vec{r}\times\vec{F}\right)+\left(\vec{r}\times\vec{F}_{attr}\right) = -rF\,\hat{k} - rF_{attr}\,\hat{k} = -r\left(F+F_{attr}\right)\hat{k}$$

Mettendo insieme i pezzi:

$$\vec{M}_{tot} = I\vec{\alpha} \quad \rightarrow \quad -r\left(F+F_{attr}\right)\hat{k} = -\frac{1}{2}mr^2\frac{a_{cm}}{r}\hat{k} \quad \rightarrow \quad F+F_{attr} = \frac{1}{2}ma_{cm}$$

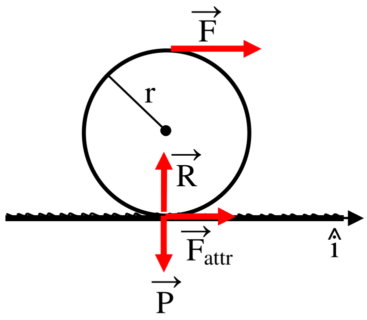
Mettiamo insieme le relazioni ottenute:

$$\begin{cases} F - F_{attr} = ma_{cm} \\ F + F_{attr} = \frac{1}{2}ma_{cm} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_{attr} = F - ma_{cm} \\ F + F - ma_{cm} = \frac{1}{2}ma_{cm} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_{attr} = -\frac{1}{3}F = -3.3\,\hat{i}\ N \\ a_{cm} = \frac{4}{3}\frac{F}{m} = 13.3\,\hat{i}\ m/s^2 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE:

La forza di attrito risulta negativa

$$F_{attr} = -3.3\,\hat{i}\ N$$



dunque significa che l'ipotesi che avevo fatto nella figura precedente non è corretta e la vera situazione è quella rappresentata a fianco. Questo è uno dei pochi casi in cui la forza di attrito aumenta l'accelerazione (e dunque la velocità) del centro di massa confermato anche dal secondo risultato ottenuto .

$$a_{cm} = \frac{4}{3}\frac{F}{m} = 13.3\,\hat{i}\ m/s^2$$

dove si vede che $a_{cm} > \frac{F}{m}$ che è l'accelerazione che si otterrebbe in assenza di attrito statico. Da un punto di vista fisico si spiega in questo modo: se non ci fosse l'attrito, la forza $\vec{F}$ creerebbe sia traslazione (perchè è una forza non nulla) che rotazione (perchè ha un momento della forza non nullo) e la rotazione sarebbe maggiore di quella che invece si ha con l'attrito statico perdendo velocità traslazionale. L'attrito statico permette al corpo di rotolare senza strisciare acquistando una maggiore velocità traslazionale.

c)

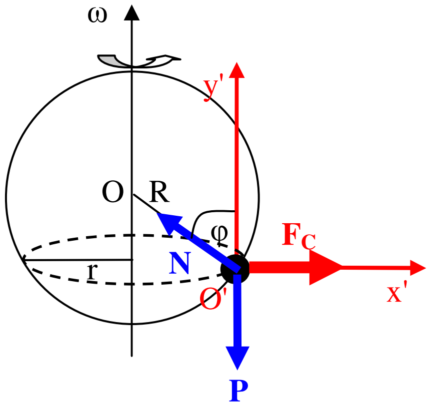
Siccome l'accelerazione del centro di massa è costante, il moto del centro di massa è uniformemente accelerato → $\vec{v}_{cm} = \vec{v}_0 + \vec{a}_{cm}t = \vec{a}_{cm}t$

Il momento angolare del disco rispetto al suo cm è dato da:

$$|\vec{K}| = I\left|\vec{\omega}\right| = \frac{1}{2}mr^2\left|\frac{\vec{v}_{cm}}{r}\right| = \frac{1}{2}mr\left|\vec{v}_0 + \vec{a}_{cm}t\right| = \frac{1}{2}mr\left|\frac{4}{3}\frac{F}{m}t\right| = \frac{2}{3}rFt = 3.33\,kgm^2/s$$

Esercizio 3:

a,b)



Rispetto ad un sistema di riferimento (sdr) solidale con la pallina, con l'origine sulla pallina stessa e gli assi x, y e z diretti come in figura a lato (sdr rosso), sulla pallina di massa m agiscono 3 forze: la forza peso e la forza centripeta (forze reali di colore blu) ed una forza fittizia (vedremo quale di colore rosso). Rispetto a questo sdr la pallina è ferma e dunque :

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{fitt} = 0$$

dove:

$\vec{P} = -mg\,\hat{j}'$ è la forza peso

$\vec{N} = -N sen\varphi\,\hat{i}' + N\cos\varphi\,\hat{j}'$ è la forza centripeta

$$\vec{F}_{fitt} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' - ma_{oo'} = -ma_{oo'} = m\omega^2 r\hat{i}' = m\omega^2 R sen\varphi\hat{i}'$$

Scriviamo la relazione $\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{fitt} = 0$ lungo i 2 assi:

$$\begin{cases} -N sen\varphi + m\omega^2 R sen\varphi = 0 \\ N\cos\varphi - mg = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = m\omega^2 R \\ N\cos\varphi = mg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = m\omega^2 R = 0.01\times 14^2\times 0.1 = 0.196\,[N] \\ \cos\varphi = \dfrac{g}{\omega^2 R} = \dfrac{9.81}{14^2\times 0.1} = 0.5 \end{cases}$$

Da cui segue che $\varphi = 60^\circ$ e $\vec{N} = 0.196\left(-0.866\,\hat{i}' + 0.5\,\hat{j}'\right)$

Esercizio 4

a)

La costante A ha le seguenti dimensioni fisiche:

[A] = [F][L]=[M]][L^2] [T^{-2}] e unità di misura *Nm* oppure $Kgm^2/(s^2)$.

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo.

b)

Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra il punto R(1,1,1) ed un punto generico P(*x,y,z*)

$$L_{RP} = \int_{111}^{x11} F_x\,dx + \int_{x11}^{xy1} F_y\,dy + \int_{xy1}^{xyz} F_z\,dz =$$

$$L_{RP} = -\int_{111}^{x11} \frac{Az}{y^2}\,dx + \int_{x11}^{xy1} \frac{2Axz}{y^3}\,dy - \int_{xy1}^{xyz} \frac{Ax}{y^2}\,dz =$$

$$= -\left[A\frac{xz}{y^2}\right]_{111}^{x11} - \left[A\frac{xz}{y^2}\right]_{x11}^{xy1} - \left[A\frac{xz}{y^2}\right]_{xy1}^{xyz} = -Ax + A - A\frac{x}{y^2} + Ax - A\frac{xz}{y^2} + A\frac{x}{y^2} = A\left(1 - \frac{xz}{y^2}\right)$$

dunque $L_{RP} = V(1,1,1) - V(x,y,z) = A\left(1 - \frac{xz}{y^2}\right)$

da cui segue l'energia potenziale $V(x,y,z) = -A\left(1 - \frac{xz}{y^2}\right)$.

c)

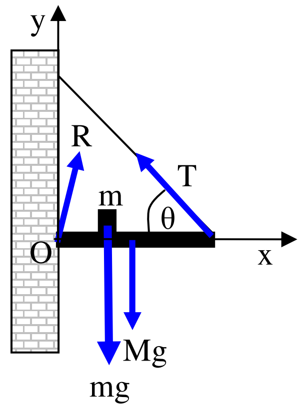
Visto che il campo è conservativo, il lavoro tra i punti R(1,1,1) e S(2,2,2) si ottiene dalla relazione:

$$L_{RS} = V(R) - V(S) = V(1,1,1) - V(2,2,2) = 0$$

Esercizio 5

a,b)

Bisogna imporre le condizioni della statica alle forze che agiscono sul sistema. Innanzitutto sul sistema agiscono 4 forze (figura a lato): le 2 forze peso dell'asta e della massa, la tensione della corda e la reazione vincolare del perno (che non so come è diretta ed è stata disegnata a caso). Tutte queste forze sono applicate in punti diversi. Scegliamo un sistema di riferimento (sdr) con origine O sul perno e assi x e y come in figura e valutiamo il momento della forza rispetto al polo O. Con ovvie considerazioni geometriche si otttiene $\theta = 45^\circ$.



Condizioni di statica:

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M}_O = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{P}_A + \vec{P}_m + \vec{T} + \vec{R} = 0 \\ \frac{L}{2}\hat{i} \times (-Mg)\hat{j} + \frac{L}{3}\hat{i} \times (-mg)\hat{j} + L\hat{i} \times \left(-T\cos\theta\,\hat{i} + T\sin\theta\, j\right) + 0 \times \vec{R} = 0 \end{cases}$$

dove $\vec{P}_A = -Mg\hat{j}$ è il peso dell'asta, $\vec{P}_m = -mg\hat{j}$ è il peso della massa m, $\vec{T} = -T\cos\theta\,\hat{i} + T\sin\theta\, j$ è la tensione del filo e $\vec{R}$ è la reazione del perno. Svolgendo i prodotti vettoriali si ottiene:

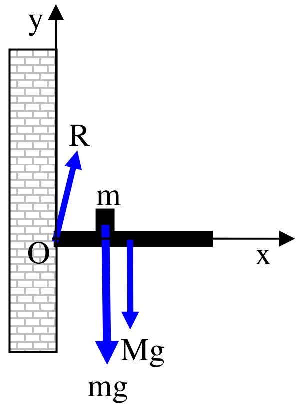
$$\begin{cases} \vec{P}_A + \vec{P}_m + \left(-T\cos\theta\,\hat{i} + T\sin\theta\, j\right) + \vec{R} = 0 \\ -\frac{MLg}{2}\hat{k} - \frac{mLg}{3}\hat{k} + LT\sin\theta\,\hat{k} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -Mg\hat{j} - mg\hat{j} + \left(-T\cos\theta\,\hat{i} + T\sin\theta\, j\right) + \vec{R} = 0 \\ T = \frac{g}{\sin\theta}\left(\frac{M}{2} + \frac{m}{3}\right) = 12.7\ N \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{R} = (Mg+mg)\hat{j} - \left(-T\cos\theta\,\hat{i} + T\sin\theta\, j\right) = T\cos\theta\,\hat{i} + (Mg+mg-T\sin\theta)\hat{j} = \left(8.98\hat{i} + 15.5\hat{j}\right) N \\ \vec{T} = -T\cos\theta\,\hat{i} + T\sin\theta\, j = \left(-8.98\hat{i} + 8.98\, j\right) N \end{cases}$$

I moduli delle due forze risultano: $\begin{cases} \left|\vec{R}\right| = 17.9\ N \\ \left|\vec{T}\right| = 12.7\ N \end{cases}$

c)



Una volta spezzata la corda, la tensione del filo non esiste più ed il sistema è soggetto solo alle rimanenti 3 forze (dove $\vec{R}$ è stata disegnata a caso).
Applichiamo la seconda equazione cardinale della meccanica:

$\vec{M}_O^{est} = I_{tot,O}\,\vec{\alpha}$ dove

$\vec{M}_O^{est}$ è il momento delle forze esterne calcolate rispetto ad O;
$I_{tot,O} = I_{A,O} + I_{m,O}$ è il momento d'inerzia totale rispetto al punto O che è dato dal momento d'inerzia dell'asta rispetto al punto O ($I_{A,O}$) più quello relativo alla massa m sempre rispetto ad O ($I_{m,O}$);
$\vec{\alpha}$ è l'accelerazione angolare richiesta.

Calcoliamo i vari termini:

$$\vec{M}_O^{est} = \frac{L}{2}\hat{i}\times(-Mg)\hat{j} + \frac{L}{3}\hat{i}\times(-mg)\hat{j} = -\frac{MLg}{2}\hat{k} - \frac{mLg}{3}\hat{k} = -\frac{gL}{6}(3M+2m)\hat{k}$$

$$I_{tot,O} = I_{A,O} + I_{m,O} = \left(\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right) + m\left(\frac{L}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{1}{9}mL^2 = \frac{1}{9}(3M+m)L^2$$

Dunque:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{M}_O^{est}}{I_{tot,O}} = \frac{-\frac{gL}{6}(3M+2m)\hat{k}}{\frac{1}{9}(3M+m)L^2} = -\frac{3g(3M+2m)}{2L(3M+m)}\hat{k} = -46.25\,\hat{k}\ rad/s^2$$