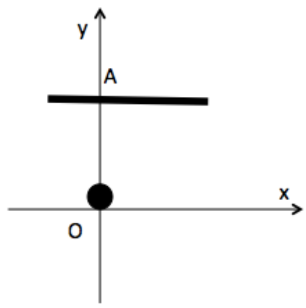
FISICA GENERALE T-A 25 Luglio 2013 prof. Spighi (CdL ingegneria Energetica)

1) L'energia potenziale di un campo di forze è pari a $V(x,y,z) = \alpha y^2 - \beta z$. Determinare:

a) l'espressione della forza;

b) le equazioni del moto di un corpo di massa m lasciato nel punto A(2,1,0) m con velocità iniziale (3,0,1) m/s, sapendo che le costanti α e β sono positive.

2) Un'asta rigida omogenea di massa M=1 kg, lunghezza L=50 cm, dimensioni trasversali trascurabili, è libera di ruotare attorno ad un asse fisso orizzontale passante per il punto A distante L/3 dal suo estremo. L'asta inizialmente ferma in posizione orizzontale è lasciata libera di cadere (vedi figura). Quando passa per la verticale, l'estremo inferiore dell'asta urta instantaneamente e in modo totalmente anelastico un punto materiale fermo di massa m=0,4 kg. Determinare:



a) il vettore accelerazione angolare dell'asta nell'istante iniziale;

b) la velocità angolare dell'asta prima dell'urto;

c) la velocità del sistema dopo l'urto.

(Momento d'inerzia di una sbarra lunga L di massa M rispetto a un asse passante per il centro di massa $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$)

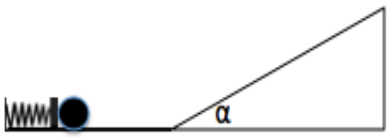
3) Dato il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = \alpha y^2 \hat{\imath} + (2\alpha xy - \beta z^3)\hat{\jmath} - 3\beta yz^2 \hat{k}$ determinare:

a) le dimensioni fisiche delle costanti α e β;

b) se il campo di forze è conservativo e nel caso calcolarne l'energia potenziale;

c) il lavoro fatto dalla forza quando sposta il punto di applicazione da R(0,2,-2) a S (1,3,-1).

4) Un punto materiale di massa m=4kg è inizialmente attaccato a una molla ideale, di costante elastica k=200 N/m compressa di una quantità D=30cm, posta su un piano orizzontale liscio. A un certo istante la molla viene lasciata libera di espandersi. Il punto materiale nel suo moto incontra un piano inclinato di α=30° scabro con coefficiente di attrito dinamico μ_d=0,3. Calcolare:

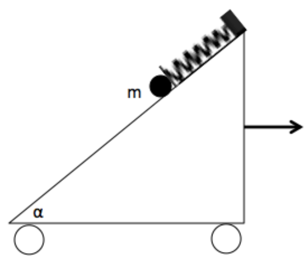


a) la velocità con cui il punto raggiunge il piano inclinato;

b) l'altezza massima raggiunta dal punto sul piano inclinato;

c) la massima compressione della molla quando il punto materiale ridiscende dal piano inclinato la prima volta.

5) Un punto materiale di massa m=1 kg è attaccato a una molla di costante elastica k=100 N/m fissata al piano inclinato di un angolo α=30° liscio di un carrello in moto verso destra (vedi figura). Sapendo che il punto materiale è in equilibrio, calcolare l'allungamento della molla:



a) nel caso in cui il carrello si muova con velocità costante v=6 m/s;

b) nel caso in cui il carrello si muova con accelerazione costante a= 4 m/s^2.

6) Enunciare e spiegare la seconda equazione cardinale della dinamica.

SOLUZIONI

EX 1

La formula che lega la forza alla sua energia potenziale è $\vec{F}(x,y,z) = -\vec{\nabla}V$ quindi:

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{dV}{dx} = 0 \\ F_y = -\dfrac{dV}{dy} = -2\alpha y \Rightarrow \vec{F}(x,y,z) = -2\alpha y\hat{j} + \beta\hat{k} \\ F_z = -\dfrac{dV}{dz} = \beta \end{cases}$$

Per ottenere le equazioni del moto partiamo dalla seconda equazione della dinamica $\vec{F}(x,y,z) = m\vec{a}$ per cui:

$$\begin{cases} F_x = ma_x \Rightarrow 0 = ma_x \\ F_y = ma_y \Rightarrow -2\alpha y = ma_y \\ F_z = ma_z \Rightarrow \beta = ma_z \end{cases}$$

e studiamo il moto asse per asse.

Sull'asse x, essendo la massa non nulla, l'accelerazione è nulla per cui si tratta di un moto rettilineo uniforme, in cui s_0 e v le trovo dalle condizioni iniziali sulla posizione e sulla velocità $x(t) = x_0 + v * t = 2 + 3t$

Sull'asse y si vede che l'accelerazione dipende dalla posizione, caratteristica tipica di un moto armonico. Infatti:

$$-2\alpha y = ma_y \Rightarrow -2\alpha y = m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{2\alpha}{m} y = 0$$

è l'equazione di un moto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}}$

La soluzione dell'equazione è del tipo: $z(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ dove A e φ si ricavano dalle condizioni iniziali.

$$\begin{cases} y(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{y}(t) = -A\omega sen(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = A\cos\varphi = 1 \\ \dot{y}(0) = -A\omega sen\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cos\varphi = 1 \\ sen\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}} t\right)$$

Sull'asse z infine si ha un'accelerazione costante $a_z = \dfrac{\beta}{m}$ per cui si tratta di un moto uniformemente accelerato. Di nuovo s_0 e v_0 le troviamo dalle condizioni iniziali:

$$z(t) = z_0 + v_0 * t + \frac{1}{2} a * t^2 = 0 + 1 * t + \frac{1}{2}\frac{\beta}{m} t^2 = t + \frac{1}{2}\frac{\beta}{m} t^2$$

EX 2

Per trovare l'accelerazione angolare iniziale usiamo la seconda equazione cardinale della dinamica, notando che l'unica forza che agisce è il peso dell'asta applicato nel suo centro di massa. Prendiamo come polo per il calcolo dei momenti il punto A per cui passa l'asse di rotazione dell'asta. Allora il centro di massa si trova a una distanza $\frac{L}{2}-\frac{L}{3}=\frac{L}{6}$ del punto A. Il momento d'inerzia dell'asta va calcolato rispetto allo stesso polo per cui

$$I_{asta}=\frac{1}{12}ML^2+M\left(\frac{L}{6}\right)^2=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\right)ML^2=\frac{1}{9}ML^2$$

L'equazione cardinale allora diventa:

$$\vec{M}^{ext}=I\vec{\alpha}\Rightarrow\left(\frac{L}{6}\hat{i}\right)x(-Mg\hat{j})=I\vec{\alpha}\Rightarrow-\frac{LMg}{6}\hat{k}=I\vec{\alpha}\Rightarrow\vec{\alpha}=\frac{-\frac{LMg}{6}\hat{k}}{\frac{ML^2}{9}}=-\frac{3g}{2L}\hat{k}=-29{,}4\hat{k}rad/s^2$$

Visto che non sono presenti attriti e che il peso è una forza conservativa, per calcolare la velocità angolare prima dell'urto applichiamo la conservazione dell'energia meccanica fra il punto iniziale in cui l'asta è orizzontale e il punto finale prima dell'urto in cui l'asta è in posizione verticale. Come sistema di riferimento prendiamo quello suggerito in figura per cui all'istante iniziale il centro di massa della sbarra si trova a quota 2L/3 mentre nel punto finale il centro di massa si trova a quota L/2. L'equazione da imporre è:

$$E_{iniz}^{mecc}=E_{fin}^{mecc}\Rightarrow E_{iniz}^{pot}+E_{iniz}^{cin}=E_{fin}^{pot}+E_{fin}^{cin}\Rightarrow Mg\frac{2}{3}L+0=Mg\frac{L}{2}+\frac{1}{2}I\omega^2$$

$$4MgL=3MgL+3I\omega^2\Rightarrow MgL=3\frac{ML^2}{9}\omega^2\Rightarrow g=\frac{L}{3}\omega^2\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{3g}{L}}=7{,}7rad/s$$

Per trovare la velocità finale del sistema dobbiamo imporre la conservazione del momento angolare. Infatti l'asta essendo vincolata in A non costituisce un sistema isolato, quindi non si conserva la quantità di moto. Quindi:

$$\vec{K}_{iniz}=\vec{K}_{fin}\Rightarrow I_{asta}\omega_{inizi}=I_{tot}\omega_{fin}$$

Da notare che essendo l'urto anelastico il punto materiale rimane attaccato all'estremo inferiore dell'asta, per cui il momento d'inerzia dopo l'urto non è più solo quello dell'asta, ma è quello dell'intero sistema, ovvero:

$$I_{tot=}I_{asta}+I_{punto}=\frac{1}{9}ML^2+m\left(\frac{2L}{3}\right)^2=\frac{1}{9}ML^2+\frac{4}{9}mL^2=\frac{L^2}{9}(M+4m)$$

La velocità angolare finale sarà quindi:

$$I_{asta}\omega_{inizi}=I_{tot}\omega_{fin}\Rightarrow\frac{1}{9}ML^2\omega_{iniz}=\frac{L^2}{9}(M+4m)\omega_{fin}\Rightarrow\omega_{fin}=\frac{\frac{1}{9}ML^2}{\frac{L^2}{9}(M+4m)}\omega_{iniz}=\frac{M}{M+4m}\omega_{iniz}=2{,}96rad/s^2$$

EX 3

a) le dimensioni delle costanti si ottengo imponendo che tutte le componenti della forza siano nelle dimensioni idonee cioè $[N]=[MLT^{-2}]$. Quindi:

$$[\alpha]=\frac{[MLT^{-2}]}{[y^2]}=\frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]}=[ML^{-1}T^{-2}]$$

$$[\beta]=\frac{[MLT^{-2}]}{[yz^2]}=\frac{[MLT^{-2}]}{[L^3]}=[ML^{-2}T^{-2}]$$

b) per verificare se il campo è conservativo calcolo il rotore della forza:

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \delta/\delta x & \delta/\delta y & \delta/\delta z\\ F_x & F_y & F_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \delta/\delta x & \delta/\delta y & \delta/\delta z\\ \alpha y^2 & 2\alpha xy-\beta z^3 & -3\beta yz^2\end{pmatrix}=$$

$$=\hat{i}\left(\frac{\partial(-3\beta yz^2)}{\partial y}-\frac{\partial(2\alpha xy-\beta z^3)}{\partial z}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial(-3\beta yz^2)}{\partial x}-\frac{\partial(\alpha y^2)}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial(2\alpha xy-\beta z^3)}{\partial x}-\frac{\partial(\alpha y^2)}{\partial y}\right)=$$

$$=\hat{i}\left(-3\beta z^2-0+3\beta z^2\right)-\hat{j}\left(0-0\right)+\hat{k}(2\alpha y-0-2\alpha y)=\vec{0}$$

Il campo è conservativo e posso quindi calcolare l'energia potenziale:

$$V=-\int_{0,0,0}^{x,y,z}\vec{F}\,d\vec{s}=-\int_{0,0,0}^{x,0,0}F_x\,dx-\int_{x,0,0}^{x,y,0}F_y\,dy-\int_{x,y,0}^{x,y,z}F_z\,dz=-\int_{0,0,0}^{x,0,0}(\alpha y^2)dx-\int_{x,0,0}^{x,y,0}(2\alpha xy-\beta z^3)dy-\int_{x,y,0}^{x,y,z}(-3\beta yz^2)dz==$$

$$=\left[\alpha xy^2\right]_{000}^{x00}-\left[2\alpha x\frac{y^2}{2}-\beta yz^3\right]_{x00}^{xy0}+\left[-3\beta y\frac{z^3}{3}\right]_{000}^{x00}=-\alpha xy^2+\beta yz^3$$

c) avendo trovato l'energia potenziale calcolare il lavoro diventa banale:

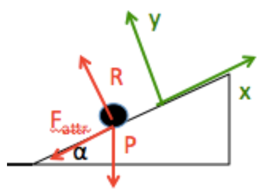
$$L_{R,S}=V_R-V_S=(-\alpha xy^2+\beta yz^3)_{0,2,-2}-(-\alpha xy^2+\beta yz^3)_{1,3,-1}=-13\beta+9\alpha Joule$$

EX 4

Essendo il piano orizzontale privo di attriti, la velocità con cui il punto arriva all'inizio del piano inclinato si trova imponendo la conservazione dell'energia meccanica fra in punto iniziale in cui la massa è attaccata alla molla e il punto finale in cui arriva alla fine del piano orizzontale. Essendo tutto il moto sullo stesso piano, non è presente energia potenziale gravitazionale, resta solo l'energia potenziale elastica iniziale e quella cinetica finale. Quindi:

$$E_{iniz}^{mecc}=E_{fin}^{mecc}\Rightarrow E_{iniz}^{pot}+E_{iniz}^{cin}=E_{fin}^{pot}+E_{fin}^{cin}\Rightarrow\frac{1}{2}kD^2=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow v=D\sqrt{\frac{k}{m}}=2{,}12m/s$$

Per calcolare l'altezza a cui arriva il punto sul piano inclinato, serve calcolare prima l'accelerazione del punto. Applichiamo quindi la seconda equazione della dinamica, considerando tutte le forze che agiscono sul corpo (in rosso in figura):



$$\vec{R}+\vec{P}+\vec{F}_{attr}=m\vec{a}$$

e la andiamo a proiettare lungo i due assi di un sistema di riferimento scelto (in verde in figura). Se il corpo sale, la forza di attrito sarà verso il basso:

$$\begin{cases} x) - Psen\alpha - F_{attr} = ma \\ y) R - P\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mgsen\alpha - \mu_d mg\cos\alpha = ma \Rightarrow a = -g(sen\alpha + \mu_d \cos\alpha) = -7{,}4m/s^2 \\ R = P\cos\alpha \Rightarrow F_{attr} = \mu_d R = \mu_d P\cos\alpha = \mu_d mg\cos\alpha \end{cases}$$

Si tratta quindi di un moto uniformemente accelerato. Notando che l'altezza massima è raggiunta dal punto quando si annulla la sua velocità, usando le equazioni del moto si ricava lo spazio percorso:

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2{,}12 - 7{,}45t \\ s = 2{,}12t - \frac{1}{2} * 7{,}45t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0{,}28s \\ s = 0{,}3m \end{cases}$$

L'altezza massima si trova allora dalla trigonometria:

$h = s * sen\alpha = 0{,}15m$

Per trovare la compressione della molla quando il punto ritorna sul piano orizzontale la prima volta, occorre prima trovare l'accelerazione con cui m ridiscende dal piano inclinato. Le equazioni sono le stesse usate prima, con l'unica accortezza che stavolta si inverte il segno della forza di attrito che per definizione è sempre opposta al moto:

$$\begin{cases} x) - Psen\alpha + F_{attr} = -ma \\ y) R - P\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mgsen\alpha + \mu_d mg\cos\alpha = -ma \Rightarrow a = g(sen\alpha - \mu_d \cos\alpha) = 2{,}35m/s^2 \\ R = P\cos\alpha \Rightarrow F_{attr} = \mu_d R = \mu_d P\cos\alpha = \mu_d mg\cos\alpha \end{cases}$$

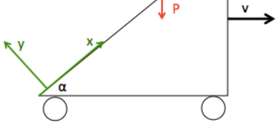
Usiamo le equazioni del moto uniformemente accelerato per trovare la velocità con cui il punto arriva sul piano orizzontale (notare che lo spazio percorso in discesa sul piano inclinato è lo stesso che abbiamo calcolato prima quando m sale sul piano):

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 2{,}35t \\ 0{,}3 = \frac{1}{2} * 2{,}35t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0{,}51s \\ v = 1{,}19m \end{cases}$$

Ora imponiamo di nuovo la conservazione dell'energia meccanica (non ci sono attriti sul piano orizzontale) per trovare la massima compressione della molla:

$$E_{iniz}^{mecc} = E_{fin}^{mecc} \Rightarrow E_{iniz}^{pot} + E_{iniz}^{cin} = E_{fin}^{pot} + E_{fin}^{cin} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kD^2 \Rightarrow D = v\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}16m$$

EX 5

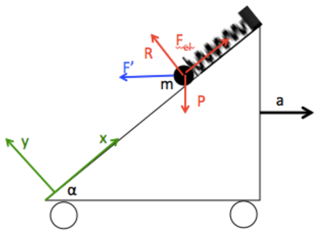


Partiamo dal caso in cui il carrello si muove con velocità costante. Per il primo principio della dinamica, un sistema di riferimento solidale col punto materiale è un sistema inerziale per cui applico l'equazione della statica (il corpo in questo sistema di riferimento è fermo) considerando tutte le forze in gioco su m, disegnate in rosso nel disegno:

$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{R} + \vec{P} + \vec{F}_{el} = 0$

Ora scomponiamo l'equazione lungo i due assi del sistema scelto (in verde in figura):

$$\begin{cases} x) - Psen\alpha + F_{el} = 0 \\ y) R - P\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = P\cos\alpha \\ -mgsen\alpha + k\Delta x = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = \frac{mgsen\alpha}{k} = 4,9 * 10^{-2}\, m$$



Nel caso in cui il carrello si muova di moto uniformemente accelerato, lo stesso sistema solidale col corpo puntiforme diventa un sistema non inerziale, per cui posso usare le stesse equazioni di prima a patto di aggiungere alle forze reali (in rosso) le forze fittizie dovute alla non inerzialità (in blu. Si ricordi che le forze fittizie sono causate da un'accelerazione reale a, hanno quindi la stessa direzione dell'accelerazione, ma verso opposto, e si scrivono come le forze reali $\vec{F}' = m\vec{a}$):

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{R} + \vec{P} + \vec{F}_{el} + \vec{F}' = 0$$

Proiettiamo l'equazione sullo stesso sistema di riferimento di prima:

$$\begin{cases} x) - Psen\alpha + F_{el} - F'\cos\alpha = 0 \\ y) R - P\cos\alpha + F' sen\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = P\cos\alpha - F' sen\alpha \\ -mgsen\alpha + k\Delta x - F'\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R = mg\cos\alpha - masen\alpha \\ -mgsen\alpha + k\Delta x - ma\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = \frac{mgsen\alpha + ma\cos\alpha}{k} = 8,4 * 10^{-2}\, m$$